

Metodi iterativi per sistemi lineari

Dario A. Bini, Università di Pisa

30 agosto 2020

Sommario

Questo modulo didattico contiene risultati relativi ai metodi iterativi per risolvere sistemi di equazioni lineari.

I metodi basati sulle fattorizzazioni LU e QR per risolvere un sistema di n equazioni lineari in n incognite $Ax = b$ forniscono la soluzione in un numero di operazioni aritmetiche dell'ordine di n^3 . In certi problemi provenienti dalle applicazioni il valore di n è molto elevato. Ad esempio, nel problema del calcolo del vettore di PageRank nei motori di ricerca sul Web, il valore di n è circa 40 miliardi. In questo caso il costo computazionale di n^3 operazioni diventa proibitivo. Anche usando il calcolatore più veloce esistente attualmente dovrebbero passare molti millenni prima che l'eliminazione gaussiana o il metodo di Householder fornisca la soluzione del sistema. Quindi per trattare problemi di dimensioni così elevate occorre escogitare qualcosa di diverso.

Una caratteristica particolare delle matrici di grosse dimensioni che si incontrano nelle applicazioni del web è che la maggior parte dei loro elementi sono nulli e il numero di elementi diversi da zero è dell'ordine di grandezza di n . Questa proprietà è nota come *sparsità*. Per queste matrici "sparse" è relativamente poco costoso calcolare il prodotto matrice - vettore, visto che il numero di operazioni aritmetiche da eseguire è circa il doppio del numero di elementi diversi da zero.

La figura 1 riporta una tipica matrice sparsa che descrive l'insieme dei collegamenti di $n = 1000$ pagine sul Web. Gli elementi diversi da 0, riportati graficamente con un asterisco, sono poche migliaia. Un elemento non nullo in posizione (i, j) denota un link dalla pagina i alla pagina j per $i, j = 1, \dots, n$.

In questo articolo descriviamo dei metodi che generano successioni di vettori $x^{(k)}$ che convergono alla soluzione cercata. Per generare il generico vettore $x^{(k)}$ questi metodi richiedono il calcolo del prodotto di una matrice per un vettore e questa è l'operazione computazionale più costosa del metodo. Se la successione converge abbastanza velocemente alla soluzione allora è sufficiente calcolare pochi elementi della successione per raggiungere una buona approssimazione. Inoltre in molti casi, come ad esempio nelle applicazioni grafiche, non è necessario conoscere molte cifre della soluzione per cui il numero di elementi della successione da calcolare diventa trascurabile rispetto alla dimensione.

Questa classe di metodi che approssimano la soluzione generando successioni di vettori è nota come classe dei *metodi iterativi*.

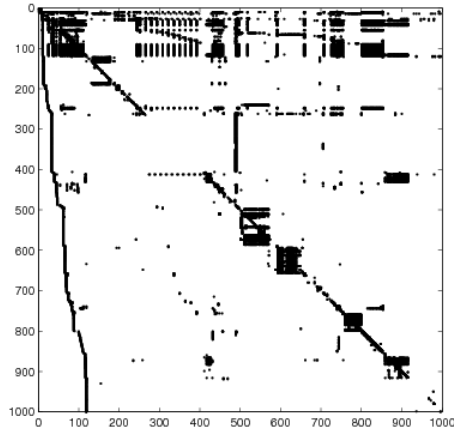


Figura 1: Matrice sparsa 1000x1000 che descrive le connessioni di un insieme di 1000 pagine del Web. L'elemento di posto (i, j) è uguale a 1 se esiste un link dalla pagina i alla pagina j . Gli asterischi denotano elementi non nulli

1 Metodi stazionari

Dato il sistema lineare $Ax = b$ dove A è una matrice $n \times n$ e b vettore di n componenti, si consideri un generico partizionamento additivo di A :

$$A = M - N, \quad \det M \neq 0.$$

Possiamo allora riscrivere equivalentemente il sistema come $Mx = Nx + b$ che conduce alla seguente scrittura equivalente del sistema originale

$$x = M^{-1}Nx + M^{-1}b =: Px + q. \quad (1)$$

La formulazione del problema in (1) è data nella forma di *problema di punto fisso* e produce in modo naturale il seguente metodo per generare una successione di vettori una volta scelto $x^{(0)} \in \mathbb{C}^n$:

$$x^{(k+1)} = Px^{(k)} + q. \quad (2)$$

Chiamiamo *metodo iterativo stazionario* l'espressione (2) o, più formalmente, l'insieme delle successioni generate da (2) al variare di $x^{(0)} \in \mathbb{C}^n$. Il metodo iterativo (2) è detto *stazionario* poichè nell'espressione (2) la matrice P e il vettore q sono indipendenti da k . La matrice P viene detta *matrice di iterazione* del metodo.

Osserviamo che se la successione generata dalla (2) fissato $x^{(0)}$ ha un limite x^* allora x^* è soluzione del sistema lineare $Ax = b$. Infatti il limite del primo

membro della (2) è x^* , e per la continuità delle applicazioni lineari, il limite del secondo membro è $Px^* + q$. Per cui $x^* = Px^* + q$, cioè $Ax^* = b$.

Questo fatto implica che ci basta dimostrare la convergenza della successione $x^{(k)}$ per concludere sull'efficacia del metodo iterativo.

1.1 Convergenza

Il seguente risultato fornisce condizioni sufficienti di convergenza facilmente verificabili.

Teorema 1 *Se esiste una norma di matrice indotta $\|\cdot\|$ tale che $\|P\| < 1$ allora la matrice A è invertibile per cui esiste unica la soluzione x del sistema $Ax = b$. Inoltre per ogni vettore iniziale $x^{(0)} \in \mathbb{C}^n$ la successione generata da (2) converge alla soluzione x .*

Dim. Se fosse $\det A = 0$ esisterebbe v vettore non nullo tale che $Av = 0$ cioè $Mv = Nv$ quindi $v = M^{-1}Nv$. Cioè la matrice $P = M^{-1}N$ avrebbe raggio spettrale ρ maggiore o uguale a 1 per cui per ogni norma indotta si avrebbe $\|P\| \geq \rho(P) \geq 1$ che contraddice le ipotesi. Sia allora x la soluzione del sistema $Ax = b$, definiamo il vettore $e^{(k)} = x^{(k)} - x$ che ci rappresenta l'errore di approssimazione al passo k e osserviamo che sottraendo da entrambi i membri della (2) i membri corrispondenti della relazione $x = Px + q$, si ottiene

$$e^{(k+1)} = Pe^{(k)}.$$

Applicando la relazione precedente in modo induttivo si ottiene

$$e^{(k)} = Pe^{(k-1)} = P^2e^{(k-2)} = \dots = P^ke^{(0)}. \quad (3)$$

Scegliamo una norma vettoriale arbitraria $\|\cdot\|$ e consideriamo la norma di matrice indotta. Allora dalle proprietà delle norme si ha che per ogni $x^{(0)}$, e quindi per ogni $e^{(0)}$ vale

$$\|e^{(k)}\| \leq \|P^k\| \|e^{(0)}\| \leq \|P\|^k \|e^{(0)}\|$$

da cui $\lim_k \|e^{(k)}\| = 0$ per ogni $x^{(0)}$. □

Definiamo il metodo iterativo (2) *convergente* se per ogni scelta del vettore $x^{(0)}$ la successione $x^{(k)}$ converge ad una soluzione del sistema. Il teorema 1 dà quindi una condizione sufficiente di convergenza per il metodo iterativo. Inoltre la norma di P ci fornisce una maggiorazione della riduzione dell'errore in ciascun passo del metodo iterativo. Viene quindi naturale confrontare la velocità di convergenza di due metodi iterativi in base alla norma delle rispettive matrici di iterazione. Questo confronto non è rigoroso poiché dipende dalla norma scelta e inoltre si basa su maggiorazioni dell'errore che non sappiamo quanto siano accurate.

Il seguente risultato dà una condizione *necessaria e sufficiente* di convergenza in termini del raggio spettrale $\rho(P)$ della matrice di iterazione P .

Teorema 2 *Il metodo iterativo è convergente e $\det A \neq 0$ se e solo se $\rho(P) < 1$.*

Dim. Se $\rho(P) < 1$ allora esiste un $\epsilon > 0$ tale che $\rho(P) + \epsilon < 1$. Sappiamo dalle proprietà delle norme che esiste una norma indotta $\|\cdot\|$ tale che $\|P\| \leq \rho(P) + \epsilon < 1$. Allora per il teorema 1 il metodo iterativo è convergente e $\det A \neq 0$. Viceversa, supponiamo che $\det A \neq 0$ e che il metodo sia convergente. In questo caso la soluzione x del sistema esiste ed è unica. L'arbitrarietà della scelta di $x^{(0)}$ implica l'arbitrarietà del vettore $e^{(0)} = x^{(0)} - x$. Per cui, per le ipotesi, la successione degli errori $e^{(k)}$ converge a zero qualunque sia il vettore $e^{(0)}$. Scegliendo allora $e^{(0)}$ uguale ad un autovettore di P corrispondente all'autovalore λ , cioè tale che $Pe^{(0)} = \lambda e^{(0)}$, dalla (3) si ha

$$e^{(k)} = P^k e^{(0)} = \lambda^k e^{(0)}.$$

Poichè $\lim_k e^{(k)} = 0$, ne segue che $\lim_k \lambda^k e^{(0)} = 0$ da cui $\lim_k \lambda^k = 0$. Ciò implica che $|\lambda| < 1$. \square

Si osservi che la condizione $\det A \neq 0$ non può essere rimossa dalle ipotesi del teorema precedente. Si consideri infatti il caso di un sistema singolare omogeneo $Ax = 0$ in cui $A = M - N$ dove $M = I$ e N ha autovalori λ_i e autovettori linearmente indipendenti $v^{(i)}$, $i = 1, \dots, n$ cioè $Nv^{(i)} = \lambda_i v^{(i)}$, dove $\lambda_1 = 1$ e $|\lambda_i| < 1$ per $i = 2, \dots, n$. Posto $x^{(0)} = \sum_{i=1}^n \xi_i v^{(i)}$ vale $x^{(k)} = \sum_{i=1}^n \xi_i \lambda_i^k v^{(i)}$. Per cui si ha $\lim_k x^{(k)} = \xi_1 v^{(1)}$, cioè si ha convergenza della successione qualunque sia $x^{(0)}$ anche se il limite dipende dalla scelta di $x^{(0)}$. Ciò è il metodo iterativo è convergente ma il raggio spettrale di $P = M^{-1}N = N$ è 1.

È interessante osservare che dal teorema precedente segue che se un metodo iterativo è convergente allora esiste una norma indotta per cui $\|P\| < 1$. Ciò vale anche il "solo se" nel teorema 1. Per dimostrare questo basta osservare che essendo $\rho(P) < 1$, esiste un $\epsilon > 0$ per cui $\rho(P) + \epsilon < 1$ e, per le proprietà delle norme indotte, esiste una norma indotta per cui $\|P\| \leq \rho(P) + \epsilon < 1$.

Il raggio spettrale di P , oltre a darci una condizione necessaria e sufficiente di convergenza, esprime in una forma che preciseremo meglio tra poco, la riduzione media asintotica per passo dell'errore. Per cui è corretto confrontare la velocità di convergenza di due metodi iterativi in base al raggio spettrale delle rispettive matrici di iterazione.

Osserviamo che data una norma $\|\cdot\|$, il quoziente $\|e^{(k)}\|/\|e^{(k-1)}\|$ esprime la riduzione dell'errore al k -esimo passo del metodo iterativo misurato nella norma vettoriale scelta. Consideriamo allora la media geometrica di queste riduzioni dell'errore fatta sui primi k passi.

$$\theta_k(e^{(0)}) = \left(\frac{\|e^{(1)}\|}{\|e^{(0)}\|} \cdot \frac{\|e^{(2)}\|}{\|e^{(1)}\|} \cdots \frac{\|e^{(k)}\|}{\|e^{(k-1)}\|} \right)^{\frac{1}{k}}. \quad (4)$$

Semplificando numeratori e denominatori in (4) e tenendo presente che $e^{(k)} = P^k e^{(0)}$ si ottiene

$$\theta_k(e^{(0)}) = \left(\frac{\|P^k e^{(0)}\|}{\|e^{(0)}\|} \right)^{\frac{1}{k}} \leq \|P^k\|^{\frac{1}{k}}$$

dove la disuguaglianza non è lasca poiché l'uguaglianza si ottiene per un particolare vettore $e^{(0)}$, quello che realizza il $\max \|P^k e^{(0)}\|/\|e^{(0)}\| = \|P^k\|$.

Definiamo la *riduzione asintotica media per passo* di un metodo iterativo con errore iniziale $e^{(0)}$ il valore $\theta(e^{(0)}) = \lim_k \theta_k(e^{(0)})$. Prendendo il limite su k si ottiene

$$\lim_k \theta_k(e^{(0)}) \leq \lim_k \|P^k\|^{\frac{1}{k}} = \rho(P).$$

L'uguaglianza è raggiunta per $e^{(0)}$ uguale ad un autovettore di P corrispondente ad un autovalore λ di P tale che $|\lambda| = \rho(P)$.

Si può concludere col seguente risultato

Teorema 3 *La riduzione asintotica media per passo $\theta(e^{(0)})$ dell'errore di un metodo iterativo applicato con errore iniziale $e^{(0)}$ è minore o uguale al raggio spettrale della matrice di iterazione P . Inoltre, se $e^{(0)}$ è proporzionale a un autovettore corrispondente ad un autovalore di modulo massimo, allora $\theta(e^{(0)})$ coincide con il raggio spettrale di P .*

Un esempio significativo di metodo iterativo è dato dal *metodo di Richardson* definito dalla relazione

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha(Ax^{(k)} - b)$$

dove α è un opportuno parametro. Se la matrice è definita positiva, la scelta $\alpha = 1/\|A\|$, con $\|\cdot\|$ norma indotta, garantisce la convergenza del metodo.

2 I metodi di Jacobi e di Gauss-Seidel

Si decomponga la matrice A nel modo seguente

$$A = D - B - C$$

dove

- D è la matrice diagonale con elementi diagonali $d_{i,i} = a_{i,i}$;
- B è la matrice strettamente triangolare inferiore con elementi $b_{i,j} = -a_{i,j}$ per $i > j$;
- C è la matrice strettamente triangolare superiore con elementi $c_{i,j} = -a_{i,j}$ per $i < j$.

Il metodo iterativo ottenuto col partizionamento additivo $A = M - N$ con $M = D$ e $N = B + C$ è detto *metodo di Jacobi*. Il metodo che si ottiene ponendo $M = D - B$ e $N = C$ viene detto *metodo di Gauss-Seidel*.

Chiaramente, per la loro applicabilità questi metodi richiedono che $\det M \neq 0$ e quindi $a_{i,i} \neq 0$ per $i = 1, \dots, n$.

Le matrici di iterazione $P = M^{-1}N$ del metodo di Jacobi e del metodo di Gauss-Seidel, denotate rispettivamente con J e G , sono date da

$$J = D^{-1}(B + C), \quad G = (D - B)^{-1}C.$$

Vale il seguente teorema che dà condizioni sufficienti di convergenza facilmente verificabili.

Teorema 4 *Se vale una delle seguenti condizioni allora $\rho(J) < 1$ e $\rho(G) < 1$:*

1. A è fortemente dominante diagonale;
2. A^T è fortemente dominante diagonale;
3. A è irriducibilmente dominante diagonale;
4. A^T è irriducibilmente dominante diagonale.

Dim. Si osserva innanzitutto che sotto le condizioni del teorema risulta $a_{i,i} \neq 0$ per $i = 1, \dots, n$. Si supponga per assurdo che la matrice J abbia un autovalore λ di modulo maggiore o uguale a 1. Allora dalla condizione $\det(\lambda I - J) = 0$ si deduce che $\det(\lambda I - D^{-1}(B + C)) = 0$, cioè

$$\det(\lambda D - B - C) = 0.$$

Ma la matrice $H = \lambda D - B - C$ si ottiene dalla matrice A moltiplicando i suoi elementi diagonali per λ . Quindi se A è fortemente dominante diagonale, a maggior ragione H è fortemente dominante diagonale essendo $|\lambda| \geq 1$. Analogamente se A è irriducibilmente dominante diagonale così è H . Quindi, per il primo o per il terzo teorema di Gerschgorin (a seconda delle ipotesi su A) risulta $\det H \neq 0$ che contraddice l'ipotesi fatta. Discorso analogo vale se A^T è fortemente o irriducibilmente dominante diagonale. Per quanto riguarda il metodo di Gauss-Seidel, l'esistenza di un autovalore λ di G di modulo maggiore o uguale a 1 implica che $\det(\lambda I - G) = 0$ cioè $\det(\lambda I - (D - B)^{-1}C) = 0$. Si deduce quindi che

$$\det(D - B - \lambda^{-1}C) = 0.$$

Ma la matrice $H = D - B - \lambda^{-1}C$ differisce dalla matrice A per il fatto che gli elementi della parte triangolare superiore sono moltiplicati per λ^{-1} cioè per una quantità di modulo minore o uguale a 1. Per cui se A è fortemente o irriducibilmente dominante diagonale lo è a maggior ragione la matrice H . Quindi, anche in questo caso, per il primo o per il terzo teorema di Gerschgorin (a seconda dell'ipotesi su A) risulta $\det H \neq 0$ che contraddice l'ipotesi fatta. \square

3 Aspetti computazionali

L'iterazione del metodo di Jacobi si lascia scrivere come

$$x^{(k+1)} = D^{-1}((B + C)x^{(k)} + b)$$

che in componenti diventa

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{i,i}}(b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{i,j}x_j^{(k)}). \quad (5)$$

L'iterazione del metodo di Gauss-Seidel si lascia scrivere come

$$x^{(k+1)} = (D - B)^{-1}(Cx^{(k)} + b).$$

Se guardiamo a questa relazione come a un sistema lineare con matrice triangolare inferiore, cioè $(D - B)x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + b$, allora la sua risoluzione mediante il metodo di sostituzione in avanti fornisce la formula che ci dà il metodo di Gauss-Seidel in componenti:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{i,i}}(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{i,j}x_j^{(k)}). \quad (6)$$

La stessa relazione si ottiene in modo equivalente scrivendo l'espressione $(D - B)x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + b$ nella forma $Dx^{(k+1)} = Cx^{(k)} + Bx^{(k+1)} + b$ e quindi

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(Cx^{(k)} + Bx^{(k+1)} + b).$$

Un confronto tra la (5) e la (6) mostra che i due metodi impiegano lo stesso numero di operazioni aritmetiche che è di circa n^2 moltiplicazioni e n^2 addizioni. Il metodo di Jacobi esegue queste operazioni intervenendo sulle componenti di $x^{(k)}$ mentre il metodo di Gauss-Seidel usa anche le componenti già aggiornate di $x^{(k+1)}$. Questo fatto porta a pensare che il metodo di Gauss-Seidel, utilizzando informazione più aggiornata rispetto al metodo di Jacobi, debba avere migliori proprietà di convergenza. Generalmente è così anche se si possono costruire degli esempi in cui il metodo di Jacobi converge più velocemente del metodo di Gauss-Seidel. Esistono particolari classi di matrici per le quali si può mettere in relazione esplicita $\rho(J)$ con $\rho(G)$. Questo lo vedremo tra poco.

Si osserva ancora che dalla (6) segue che l'aggiornamento della i -esima componente di $x^{(k)}$ può essere effettuato solo dopo aver aggiornato i valori delle componenti di indice minore di i . Per questo motivo il metodo di Gauss-Seidel è chiamato anche metodo degli *spostamenti successivi* mentre il metodo di Jacobi viene detto metodo degli *spostamenti simultanei*. Questa differente caratteristica è cruciale dal punto di vista computazionale quando si dispone di un ambiente di calcolo parallelo in cui diversi processori matematici possono svolgere simultaneamente operazioni aritmetiche sui dati. Per il metodo di Jacobi la disponibilità di n processori permette di aggiornare simultaneamente tutte le

componenti di $x^{(k)}$ nel tempo richiesto dall'aggiornamento di una singola componente. Per il metodo di Gauss-Seidel questo non è possibile e la disponibilità di più processori aritmetici non può essere pienamente sfruttata.

Un'altra osservazione utile riguarda il fatto che, se la matrice A è sparsa, cioè il numero dei suoi elementi non nulli è dell'ordine di n , allora anche B e C sono sparse, per cui il calcolo di un passo di questi due metodi costa un numero di operazioni proporzionale a n e non a n^2 come sarebbe per una matrice densa. Ciò costituisce un grosso vantaggio per tutti quei problemi in cui la proprietà di sparsità non si accompagna ad esempio ad una struttura a banda, per cui applicando l'eliminazione gaussiana o il metodo di Householder si ottengono matrici A_k (complementi di Schur) che perdono rapidamente la proprietà di sparsità. Questo fenomeno è chiamato *fill-in*. A causa del fill-in il costo computazionale dei metodi basati sulla fattorizzazione quali l'eliminazione gaussiana o il metodo di Householder diventa dell'ordine di n^3 per cui non si riesce a trarre vantaggio dal fatto che la matrice è sparsa. Occorre sottolineare che in letteratura sono state sviluppate tecniche di riordinamento di righe e colonne di una matrice sparsa che in alcuni casi permettono di contenere il fenomeno del fill-in e quindi raggiungere un costo computazionale inferiore a quello che si avrebbe applicando un metodo di risoluzione basato su fattorizzazioni al caso di una matrice densa.

4 Confronto tra i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel

Come già osservato, ci sono delle classi di matrici per cui si può dare una relazione esplicita tra i raggi spettrali di J e di G .

Teorema 5 (di Stein-Rosenberg). *Se la matrice A ha elementi diagonali non nulli e J ha elementi non negativi allora vale una sola delle seguenti proprietà*

- $\rho(J) = \rho(G) = 0$,
- $0 < \rho(G) < \rho(J) < 1$,
- $\rho(J) = \rho(G) = 1$,
- $1 < \rho(J) < \rho(G)$.

Quindi alla luce del teorema 3, nelle ipotesi del teorema 5 la convergenza del metodo di Gauss-Seidel è più veloce di quella del metodo di Jacobi.

Per matrici tridiagonali si riesce a quantificare la maggior velocità di convergenza del metodo di Gauss-Seidel. Vale infatti il seguente

Teorema 6 *Se A è una matrice tridiagonale con elementi diagonali non nulli, allora per ogni autovalore λ di J esiste un autovalore μ di G tale che $\mu = \lambda^2$. Per ogni autovalore non nullo μ di G esiste un autovalore λ di J tale che $\mu = \lambda^2$. In particolare vale*

$$\rho(G) = \rho(J)^2.$$

Dim.

Sia λ autovalore di J e μ autovalore di G allora vale $\det(\lambda I - J) = 0$ e $\det(\mu I - G) = 0$. Queste due condizioni possono essere riscritte rispettivamente come

$$\begin{aligned}\det(\lambda D - B - C) &= 0, \\ \det(\mu D - \mu B - C) &= 0.\end{aligned}\tag{7}$$

Ora si consideri un parametro $\alpha \neq 0$ e si definisca la matrice diagonale $D_\alpha = \text{diag}(1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1})$ e si osservi che $D_\alpha D D_\alpha^{-1} = D$, poiché D è diagonale, mentre $D_\alpha B D_\alpha^{-1} = \alpha B$ e $D_\alpha C D_\alpha^{-1} = \alpha^{-1} C$, essendo B bidiagonale inferiore e C bidiagonale superiore. Quindi si ottiene

$$D_\alpha(\lambda D - B - C)D_\alpha^{-1} = \lambda D - \alpha B - \alpha^{-1} C = \alpha^{-1}(\lambda \alpha D - \alpha^2 B - C).$$

Per cui la prima delle due condizioni in (7) si può riscrivere come

$$\det(\lambda \alpha D - \alpha^2 B - C) = 0.\tag{8}$$

Confrontando la (8) con la seconda delle (7) si vede allora che scegliendo $\alpha = \lambda$ e $\mu = \lambda^2$ ne segue che se λ è autovalore di J non nullo allora $\mu = \lambda^2$ è autovalore di G . Se μ è autovalore non nullo di G allora i λ tali che $\lambda^2 = \mu$ sono autovalori di J . D'altro canto, se λ è autovalore nullo di J allora $\mu = 0$ è comunque autovalore di G essendo G singolare. Quindi la restrizione $\lambda \neq 0$ può essere tolta dall'enunciato. \square

Dal teorema precedente, alla luce del teorema 3, segue che mediamente il metodo di Gauss-Seidel richiede la metà dei passi richiesti dal metodo di Jacobi per ridurre l'errore di una quantità prefissata.

5 Metodi a blocchi

Se la matrice A di dimensione $mn \times mn$ è partizionata in n^2 blocchi $m \times m$

$$A = (A_{i,j}) = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \dots & A_{n,n} \end{bmatrix}$$

possiamo considerare una decomposizione additiva $A = D - B - C$ dove D è la matrice diagonale a blocchi con blocchi diagonali uguali a $A_{i,i}$, $i = 1, \dots, n$, $B = (B_{i,j})$ la matrice triangolare inferiore a blocchi tale che $B_{i,j} = -A_{i,j}$ se $i > j$ mentre $B_{i,j} = 0$ altrimenti, e $C = (C_{i,j})$ la matrice triangolare superiore a blocchi tale che $C_{i,j} = -A_{i,j}$ per $i < j$ e $C_{i,j} = 0$ altrimenti. In questo modo, se i blocchi diagonali $A_{i,i}$ di A sono non singolari, possiamo considerare i metodi iterativi definiti da $M = D$, $N = B + C$, e da $M = D - B$, $N = C$. Il primo metodo è detto metodo di *Jacobi a blocchi* mentre il secondo è detto metodo di *Gauss-Seidel a blocchi*.

Per i metodi di Jacobi a blocchi e di Gauss-Seidel a blocchi vale un analogo del teorema 6.

Teorema 7 Sia $A = (A_{i,j})$ una matrice tridiagonale a blocchi, cioè tale che $A_{i,j} = 0$ se $|i - j| \geq 2$, con blocchi diagonali $A_{i,i}$ non singolari. Siano J_B e G_B le matrici di iterazione dei metodi di Jacobi a blocchi e di Gauss-Seidel a blocchi. Allora per ogni autovalore di λ di J_B esiste un autovalore μ di G_B tale che $\mu = \lambda^2$. Per ogni autovalore non nullo μ di G_B esiste un autovalore λ di J_B tale che $\mu = \lambda^2$. In particolare vale

$$\rho(G) = \rho(J)^2.$$

La dimostrazione del teorema 7 si svolge esattamente nello stesso modo della dimostrazione del teorema 6, per cui non viene riportata.

6 Metodi iterativi non stazionari (cenno)

Esistono metodi iterativi non stazionari in cui la successione $x^{(k)}$ non si può scrivere nella forma (2). Una classe molto studiata di questi metodi è quella basata sulle successioni dei *sottospazi di Krylov*. Dato un vettore iniziale $x^{(0)}$ si costruisce lo spazio di Krylov \mathcal{S}_k di dimensione al più k che è generato dai vettori $x^{(0)}, Ax^{(0)}, \dots, A^{k-1}x^{(0)}$. In questa classe di metodi iterativi il vettore $x^{(k)}$ viene scelto nello spazio \mathcal{S}_k con opportuni criteri che determinano il tipo di metodo e le proprietà computazionali e di convergenza.

Fanno parte di questa classe i metodi del gradiente quali il metodo della *discesa più ripida* e il metodo del *gradiente coniugato*.

7 Esercizi

Esercizio 1 Sia $n > 2$ un intero e si denoti con $e = (1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^{n-1}$, $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^{n-1}$.

- Costruire la matrice di Householder P tale che $Pe = \theta e_1$, dove $\theta \in \mathbb{R}$
- Sia $A = (a_{i,j})$ matrice reale $n \times n$ tale che $a_{1,i} = a_{i,1} = 1$ per $i = 2, \dots, n$ e $a_{i,j} = 0$ altrove. Si costruisca una matrice ortogonale Q tale che $B = QAQ^T$ abbia tutti elementi nulli tranne $b_{2,1} = b_{1,2}$. Si determini il valore di $b_{2,1}$.
- Dare condizioni su α affinché il metodo di Jacobi applicato al sistema $(I - \alpha A)x = b$ sia convergente.
- Dare condizioni su α affinché il metodo di Gauss-Seidel applicato al sistema $(I - \alpha A)x = b$ sia convergente. Si confrontino le velocità di convergenza dei due metodi.

Soluzione

Una matrice reale di Householder P è tale che $P = I - \beta uu^T$ dove $u \in \mathbb{R}^n$, $u \neq 0$ e $\beta = 2/\|u\|_2^2$.

a) Dalla relazione $Pe = \theta e_1$ e dalla ortogonalità di P si deduce che $\|e\|_2 = |\theta|$, cioè $\theta = \pm\sqrt{n-1}$. Dalla espressione $P = I - \beta uu^T$ si deduce che $\beta uu^T e = e - \theta e_1$. Per evitare cancellazione numerica si sceglie allora $\theta = -\sqrt{n-1}$, per cui $u = e + \sqrt{n-1}e_1$, $\beta = 2/\|u\|_2^2 = 1/(\sqrt{n-1} + n - 1)$.

b) Se P è la matrice di Householder tale che $Pe = \theta e_1$, la matrice $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix}$ risulta ortogonale e inoltre

$$QAQ^T = \begin{bmatrix} 0 & e^T P \\ Pe & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{n-1} & 0 & \dots & 0 \\ -\sqrt{n-1} & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix}$$

c) La matrice di iterazione del metodo di Jacobi è αA . Il suo raggio spettrale è α per il raggio spettrale di A . Quest'ultimo coincide col raggio spettrale della matrice $\begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{n-1} \\ -\sqrt{n-1} & 0 \end{bmatrix}$ che è $\sqrt{n-1}$. Quindi il metodo di Jacobi è convergente se $\alpha < 1/\sqrt{n-1}$.

d) La matrice di iterazione del metodo di Gauss-Seidel è

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha e & I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & \alpha e^T \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha e^T \\ 0 & -\alpha^2 ee^T \end{bmatrix}$$

Il suo raggio spettrale coincide con il raggio spettrale di $\alpha^2 ee^T$. Questa matrice ha $n-1$ autovalori nulli corrispondenti agli autovettori nello spazio ortogonale a e e un autovalore pari a $\alpha^2(n-1)$ corrispondente all'autovettore e . Il suo raggio spettrale è quindi $\alpha^2(n-1)$ e la condizione di convergenza del metodo di Gauss-Seidel è quindi $|\alpha| < 1/\sqrt{n-1}$. Cioè la stessa del metodo di Jacobi. Però il raggio spettrale della matrice di iterazione del metodo di Gauss-Seidel è il quadrato di quello della matrice del metodo di Jacobi. Per cui la velocità di convergenza del metodo di Gauss-Seidel è doppia di quella del metodo di Jacobi. \square

Esercizio 2 È dato il sistema lineare $Ax = b$ dove A è una matrice $n \times n$ reale simmetrica definita positiva di autovalori $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$. Si consideri il metodo iterativo definito da

$$x^{(i+1)} = x^{(i)} + \alpha(b - Ax^{(i)}),$$

con α parametro reale.

a) Dare condizioni su α in termini degli autovalori di A necessarie e sufficienti per la convergenza del metodo.

b) Determinare in funzione degli autovalori di A il valore di α che massimizza la velocità di convergenza.

c) Determinare condizioni su α in funzione degli elementi di A sufficienti per la convergenza del metodo.

d) Se A è una matrice $n \times n$ reale arbitraria determinare condizioni sugli autovalori di A affinché esista un α che rende il metodo iterativo convergente.

Soluzione

Il metodo iterativo si può scrivere come $X^{(i+1)} = Px^{(i)} + q$ con $P = I - \alpha A$ e $q = \alpha b$. Inoltre x è soluzione del sistema $Ax = b$ se e solo se $x = Px + q$. Condizione necessaria e sufficiente per la convergenza di un metodo iterativo è che il raggio spettrale della matrice di iterazione sia minore di 1.

a) La matrice di iterazione del metodo è $P = I - \alpha A$, i suoi autovalori sono quindi $1 - \alpha\lambda_i$, $i = 1, \dots, n$. Il raggio spettrale di P è il massimo dei $|1 - \alpha\lambda_i|$, $i = 1, \dots, n$. Quindi la condizione cercata su α è $-1 < 1 - \lambda_i\alpha < 1$ cioè $\alpha < 2/\lambda_i$. Dato l'ordinamento degli autovalori si ottiene $\alpha < 2/\lambda_n$.

b) Poiché il raggio spettrale è uguale alla riduzione asintotica media per passo dell'errore, per massimizzare la velocità di convergenza basta minimizzare il raggio spettrale. Basta cioè trovare il

$$\min_{\alpha} \max_i |1 - \alpha\lambda_i|$$

cioè il minimo dell'involuppo superiore delle funzioni $f_i(\alpha) = |1 - \alpha\lambda_i|$. Come si vede dalla figura tale involuppo è dato da

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \alpha_1 x & \text{per } x < \alpha_0 \\ 1 - \alpha_n & \text{per } x \geq \alpha_0 \end{cases}$$

con $\alpha_0 = 2/(\alpha_1 + \alpha_n)$ e il suo minimo, preso in α_0 vale $(\lambda_n - \lambda_1)/(\lambda_1 + \lambda_n)$

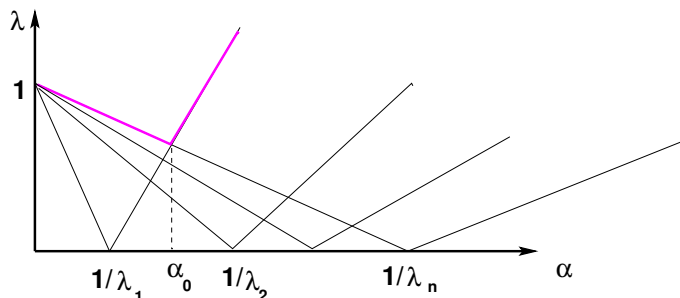


Figura 2: Inviluppo superiore delle funzioni $|1 - \alpha\lambda_i|$

c) Dal punto a) si ha che per la convergenza occorre e basta che $\alpha < 2/\lambda_n$. Poiché per ogni norma matriciale indotta $\|\cdot\|$ vale $\lambda_n = |\lambda_n| \leq \|A\|$, ne segue che la condizione $\alpha < 2/\|A\|$ è sufficiente per la convergenza. Ad esempio, con la norma infinito basta che $\alpha < 2/\max_i \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$.

d) Gli autovalori di A devono essere tali che esista un α per cui $|1 - \lambda_i\alpha| < 1$, cioè $-1 < 1 - \lambda_i\alpha < 1$. Le due disequazioni valgono se e solo se $0 < \lambda_i\alpha < 2$. Per cui gli autovalori devono essere tutti dello stesso segno e non nulli, inoltre $0 < \alpha < 2/\lambda_i$ oppure $2/\lambda_i < \alpha < 0$. \square

Esercizio 3 Siano rispettivamente J e G le matrici di iterazione dei metodi di Jacobi e di Gauss-Seidel applicati al sistema $Hx = b$ dove $H = (h_{i,j})$ è la matrice tridiagonale $n \times n$ tale che $h_{i,i} = 3$ per $i = 1, \dots, n$ e $h_{i+1,i} = h_{i,i+1} = 1$ per $i = 1, \dots, n-1$.

a) Dimostrare che per $n \geq 2$ vale $\rho(J) < 2/3$, $\rho(G) < 4/9$, dove $\rho(\cdot)$ indica il raggio spettrale.

b) Sia $n = 2m$ pari, e si partizioni H in blocchi 2×2 in modo che H possa essere vista come matrice $m \times m$ i cui elementi sono blocchi 2×2 . In questo modo H risulta tridiagonale a blocchi con blocchi diagonali $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, blocchi sopradiagonali $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, blocchi sottodiagonali B^T . Si consideri il metodo iterativo di Jacobi a blocchi dato dal partizionamento $H = M - N$ con M matrice diagonale a blocchi 2×2 con blocchi diagonali uguali ad A . Si dimostri che il raggio spettrale della matrice di iterazione $M^{-1}N$ è minore di $1/2$.

c) Sia \tilde{H} la matrice ottenuta da H ponendo uguale a 1 l'elemento di posto $(1,1)$. Dimostrare che il metodo di Jacobi applicato al sistema $\tilde{H}x = b$ è convergente e dare una limitazione superiore più accurata possibile del raggio spettrale della matrice di iterazione.

Soluzione

La matrice di iterazione del metodo di Jacobi è $-(1/3)H$ dove $H = (h_{i,j})$ è la matrice tridiagonale con elementi $h_{i+1,i} = h_{i,i+1} = 1$ e nulli altrove. La norma infinito di H è 2 quindi per il raggio spettrale ρ vale $\rho(-(1/3)H) \leq 2/3$. Poiché la matrice del sistema A è tridiagonale, sappiamo che il raggio spettrale della matrice di iterazione del metodo di Gauss-Seidel è il quadrato di quello della matrice del metodo di Jacobi. Esso è quindi maggiorato da $(2/3)^2 = 4/9$.

La matrice di iterazione del metodo di Jacobi a blocchi è data dalla matrice tridiagonale a blocchi con blocchi diagonali nulli, blocchi sopra diagonali uguali a $\begin{bmatrix} -1/8 & 0 \\ 3/8 & 0 \end{bmatrix}$, e blocchi sottodiagonali $A^{-1}B^T = \begin{bmatrix} 0 & 3/8 \\ 0 & -1/8 \end{bmatrix}$. I cerchi di Gerschgorin per questa matrice hanno centri 0 e tutti quelli relativi alle righe dalla terza alla terzultima hanno raggio $3/8 + 1/8 = 1/2$. Il primo e l'ultimo cerchio hanno raggio $1/8$, il secondo e il penultimo hanno raggio $3/8$. Quindi il raggio spettrale è minore o uguale a $1/2$. Se la matrice fosse irriducibile, il terzo teorema di Gerschgorin garantirebbe che non ci sono autovalori di modulo $1/2$.

Verifichiamo se la matrice è o meno irriducibile. Dalla sua struttura si vede che nel grafo diretto associato ci sono archi che connettono ogni nodo dispari col nodo dispari successivo e col nodo pari precedente, cioè il nodo $2i+1$ si collega col nodo $2i+3$ e col nodo $2i$, quando i valori $2i+3$ e $2i$ sono compresi tra 1 e n , mentre ogni nodo pari si connette al dispari successivo e al pari precedente, cioè il nodo $2i$ si collega ai nodi $2i+1$ e a $2i-1$ quando questi sono compresi tra 1 e n . Per cui ogni nodo dispari si collega a tutti i nodi dispari successivi, ogni nodo pari si collega a tutti i pari precedenti, da un nodo pari si può passare al dispari successivo e da un nodo dispari al pari precedente. Tutti i nodi sono quindi raggiungibili da ogni altro nodo tranne il primo e l'ultimo che non sono raggiungibili. Infatti la prima e l'ultima colonna della matrice sono nulle. Quindi manca la riducibilità della matrice. In effetti il grafo associato

è formata da tre componenti connesse, una formata dal singolo nodo 1, una formata dal singolo nodo n e una formata dai rimanenti nodi $2, \dots, n-1$. Se la matrice viene perturbata ponendo uguale ad $\epsilon \neq 0$ gli elementi di posto $(2, 1)$ e $(n-1, n)$, la nuova matrice così ottenuta è irriducibile poiché al grafo associato sono stati aggiunti due archi che collegano la componente connessa formata dai nodi $2, \dots, n-1$ al primo e ultimo nodo. Il terzo teorema di Gerschgorin si può allora applicare e si ha che se $\epsilon \leq 1/8$ tutti i raggi dei cerchi di Gerschgorin valgono al più $1/2$ mentre il primo e l'ultimo sono minori di $1/2$. Per cui gli autovalori hanno modulo minore di $1/2$ per ogni ϵ di modulo al più $1/8$. Facendo tendere ϵ a zero, per la continuità degli autovalori si conclude che anche la matrice originale ha raggio spettrale di modulo strettamente minore di $1/2$.

La matrice J di iterazione del metodo di Jacobi applicato al sistema con \tilde{H} è tridiagonale con elementi principali nulli, elementi sotto diagonali uguali a $-1/3$, elementi sopra diagonali uguali a $-1/3$ ad eccezione dell'elemento in posizione $(1, 2)$ che vale -1 . Vale cioè

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & & & & & \\ -1/3 & 0 & -1/3 & & & & \\ & & \ddots & \ddots & & & \\ & & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & -1/3 & \\ & & & & -1/3 & 0 & \end{bmatrix}$$

Il secondo teorema di Gerschgorin garantisce che il raggio spettrale di questa matrice è minore di 1 e quindi il metodo di Jacobi è convergente. Una stima del raggio spettrale si può ottenere considerando la matrice ottenuta moltiplicando la prima riga per $\epsilon > 0$ e dividendo la prima colonna per ϵ . Questa matrice ha gli stessi autovalori di J però il primo cerchio di Gerschgorin ha raggio $r_1 = \epsilon$ mentre il secondo ha raggio $r_2\epsilon^{-1}/3 + 1/3$. La condizione $r_1 = r_2$ fornisce il valore ottimale $\epsilon = (1 + \sqrt{13})/6$ che costituisce una limitazione superiore al raggio spettrale. \square

Esercizio 4 Sia $A = (a_{i,j})$ la matrice $n \times n$, $n \geq 2$, tale che $a_{i,i} = 1$ per $i = 1, \dots, n$, $a_{1,i} = a_{i,1} = \alpha \neq 0$ per $i = 2, \dots, n$, $a_{i,j} = 0$ altrimenti. Si denotino con J e G le matrici di iterazione rispettivamente dei metodi di Jacobi e di Gauss-Seidel applicati al sistema lineare $Ax = b$.

- Determinare J e G e dimostrare che J ha rango 2 mentre G ha rango 1.
- Determinare il raggio spettrale di J e di G e dare condizioni necessarie e sufficienti di convergenza per i metodi di Jacobi e di Gauss-Seidel
- Determinare una matrice di Householder P tale che la matrice $B = PAP^T$ abbia la forma

$$B = \begin{bmatrix} 1 & \theta & & & & & \\ \theta & 1 & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

e si confronti il raggio spettrale delle matrici di iterazione dei metodi di Jacobi e di Gauss-Seidel relativi a B con quelli relativi ad A .

Soluzione

a) La matrice A ha la forma

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \dots & \alpha \\ \alpha & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \alpha & & & 1 \end{bmatrix}$$

Quindi per definizione vale

$$J = - \begin{bmatrix} 0 & \alpha & \dots & \alpha \\ \alpha & 0 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \alpha & & & 0 \end{bmatrix}, \quad G = - \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \alpha & & & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & \alpha & \dots & \alpha \\ 0 & 0 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix} = uv^T$$

dove $u = [-1, \alpha, \dots, \alpha]^T$ e $v^T = [0, \alpha, \dots, \alpha]$. Chiaramente $G = uv^T$ ha rango 1. Inoltre J si lascia scrivere come $J = e_1 v^T + v e_1^T$, dove $e_1 = [1, 0, \dots, 0]^T$ e quindi ha rango 2.

b) La matrice $G = uv^T$ ha $n - 1$ autovalori nulli e un autovalore uguale a $v^T u = \alpha^2(n - 1)$. Quindi il suo raggio spettrale è $\alpha^2(n - 1)$. Poiché v è ortogonale a e_1 , rappresentando la matrice J in una base in cui il primo vettore è e_1 e il secondo vettore è $\hat{v} = (1/\theta)v$, $\theta = \alpha\sqrt{n - 1}$, la matrice J si trasforma in $\theta e_1 e_2^T + \theta e_2 e_1^T$ ed ha $n - 2$ autovalori nulli e due autovalori uguali a $\pm\theta$. Quindi il raggio spettrale di J è $|\alpha|\sqrt{n - 1}$. Si può concludere che i metodi di Jacobi e di Gauss-seidel sono convergenti se e solo se $|\alpha| < 1/\sqrt{n - 1}$. Inoltre vale $\rho(G) = \rho(J)^2$, quindi il metodo di Gauss-Seidel, se convergente, ha velocità di convergenza doppia rispetto al metodo di Jacobi

c) È sufficiente scegliere una matrice di Householder Q di ordine $n - 1$, tale che $Qe = \sqrt{n - 1}e_1$, dove $e, e_1 \in \mathbb{R}^{n-1}$ sono rispettivamente il vettore di tutti uni e il primo versore della base canonica. Ponendo $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}$, P risulta di Householder e vale $PAP^T = B$ con $\theta = \alpha\sqrt{n - 1}$. Denotando con \hat{J} e \hat{G} le matrici di iterazione dei metodi di Jacobi e di Gauss-Seidel applicati a un sistema con matrice B , risulta $\rho(\hat{J}) = |\theta| = |\alpha|\sqrt{n - 1}$, $\rho(\hat{G}) = |\theta^2| = \alpha^2(n - 1)$. I raggi spettrali sono gli stessi del caso precedente. \square

Esercizio 5 Sia $A = (a_{i,j})$ la matrice $n \times n$ con elementi $a_{i+1,i} = 1, a_{i,n} = \alpha$ per $i = 1, \dots, n - 1, a_{i,j} = 0$ altrove.

a) Dare condizioni sufficienti su α affinché gli autovalori di A abbiano modulo minore di 1.

b) Dare condizioni sufficienti su α affinché il metodo di Jacobi applicato al sistema lineare $(I + A)x = b$ sia convergente.

c) Dare condizioni sufficienti su α affinché il metodo di Gauss-Seidel applicato al sistema lineare $(I + A)x = b$ sia convergente.

d) Per $\alpha = 1/n$ dire di quanto viene ridotto l'errore iniziale dopo n passi del metodo di Gauss-Seidel e del metodo di Jacobi.

Soluzione

□

Esercizio 6 Dato un numero reale α e un intero $n > 2$ sia $M = (m_{i,j})$ la matrice $n \times n$ triangolare superiore con elementi $m_{i,j} = 1$ per $i \leq j$. Sia inoltre $N = \alpha uv^T$ dove $u = (u_i), v = (v_i) \in \mathbb{R}^n$ sono tali che $u_i = i$ per $i = 1, \dots, n$ e $v_i = (-1)^{i+1}$ per $i = 1, \dots, n-1$ e $v_n = 0$. Si consideri il sistema lineare $Ax = b$, con $b \in \mathbb{R}^n$, dove $A = M - N$, e il metodo iterativo $x^{(k+1)} = M^{-1}(Nx^{(k)} + b)$.

a) Dire per quali valori di α il metodo iterativo è convergente.

b) Sia $\alpha = 3/4$ e $n = 1000$. Calcolare il raggio spettrale $\rho(P)$ della matrice $P = M^{-1}N$ e dimostrare che esiste una norma indotta $\|\cdot\|$ tale che $\|P\| = \rho(P)$. Dire quanti passi occorrono per ridurre l'errore iniziale di un fattore 10^{-6} utilizzando la norma individuata.

c) Sia $\alpha = 3/4$ e $n = 1001$. Calcolare il raggio spettrale $\rho(P)$ della matrice $P = M^{-1}N$ e dire se esiste una norma indotta $\|\cdot\|$ tale che $\|P\| = \rho(P)$. Dire quanti passi occorrono per ridurre l'errore iniziale di un fattore 10^{-6} utilizzando la norma infinito.

Soluzione

□

Esercizio 7 Dati i vettori $u = (u_i), v = (v_i), w = (w_i), z = (z_i), b = (b_i) \in \mathbb{R}^n$ si consideri il sistema di $2n$ equazioni e $2n$ incognite $Ax = b$ dove

$$A = \begin{bmatrix} I & \alpha uv^T \\ \alpha wz^T & I \end{bmatrix}.$$

a) Valutare i raggi spettrali $\rho(J)$ e $\rho(G)$ delle matrici di iterazione J e G rispettivamente dei metodi di Jacobi e di Gauss-Seidel applicati al sistema $Ax = b$.

In particolare dimostrare che $\rho(G) = \rho(J)^2$ e dare condizioni sufficienti su α per la convergenza.

b) Sia $\alpha = 1/(2\sqrt{n})$, e $u_i = 1, v_i = i, w_i = 1/i, z_i = (-1)^i$ per $i = 1, \dots, n$. Dire quante iterazioni del metodo di Jacobi e del metodo di Gauss-Seidel sono sufficienti per ridurre l'errore iniziale di un fattore 10^{-6} se $n = 1000$ e se $n = 1001$.

c) Dire se esiste una norma indotta $\|\cdot\|$ tale che $\|J\| = \rho(J)$. Dire se esiste una norma indotta $\|\cdot\|$ tale che $\|G\| = \rho(G)$.

Soluzione

□

Esercizio 8 La matrice A reale $n \times n$ ha m autovalori uguali ad $a \in \mathbb{R}$ e $n - m$ autovalori uguali a $b \in \mathbb{R}$, dove $1 \leq m < n$.

a) Dire sotto quali condizioni su a e b esiste un $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che le successioni definite da $x^{(k+1)} = G_\alpha(x^{(k)})$ con $G_\alpha(x) = x + \alpha(f - Ax)$, convergono alla soluzione del sistema $ax = f$, con $f \in \mathbb{R}^n$ per ogni $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$. Nell'ipotesi di esistenza determinare il valore di α che massimizza la velocità di convergenza.

b) Dire sotto quali condizioni su a e b esistono $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che le successioni generate da $x^{(k+1)} = G_\alpha(G_\beta(x^{(k)}))$ convergono alla soluzione del sistema per ogni $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$. In caso di convergenza determinare i valori ottimali di α e β .

c) Con i valori di α e β ottenuti al punto b) studiare la velocità di convergenza delle successioni al punto b) se A ha m autovalori in $[a - \epsilon, a + \epsilon]$ e $n - m$ autovalori in $[b - \epsilon, b + \epsilon]$, dove $|a|, |b| > 1$ e $0 < \epsilon < |a - b|/4$.

Soluzione

□

Esercizio 9 Sia $n \geq 3$ intero e $u = (u_i), v = (v_i) \in \mathbb{R}^{n-1}$, $u, v \neq 0$. Si consideri la matrice $B(u, v) = (b_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tale che $b_{1,i+1} = v_i$, $b_{i+1,1} = u_i$ per $i = 1, \dots, n - 1$, $b_{i,j} = 0$ altrove.

a) Si dimostri che esiste una matrice di Householder P tale che $PB(u, v)P^T = B(\alpha e_1, \hat{v})$ dove $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^{n-1}$ e $\hat{v} \in \mathbb{R}^{n-1}$. Si deduca che B ha $n - 2$ autovalori nulli e due autovalori di modulo $|v^T u|^{1/2}$.

b) Si determinino i raggi spettrali delle matrici J e G rispettivamente dei metodi di Jacobi e di Gauss Seidel applicati al sistema $Ax = b$ dove $A = I - B$. Si diano condizioni sui vettori u e v per la convergenza dei due metodi e si confrontino le velocità di convergenza.

c) Posto $u_i = i$, per $i = 1, \dots, n - 1$, e $v_i = 1$ se $i = 0 \pmod{4}$, o se $i = 1 \pmod{4}$, $v_i = -1$ altrimenti, si dica se si ha convergenza dei metodi di Jacobi e di Gauss Seidel per $n = 4000$ e $n = 4001$. Nel caso di convergenza si dica per i due metodi quante iterazioni sono sufficienti a ridurre l'errore iniziale di un fattore almeno 10^{10} in norma infinito.

Soluzione

□

Esercizio 10 Sia A la matrice tridiagonale $n \times n$, dove n è pari, tale che $a_{i,i} = (-1)^i \alpha$, per $i = 1, \dots, n$, $a_{i,i+1} = a_{i+1,i} = 1$ per $i = 1, \dots, n - 1$, dove $\alpha \in \mathbb{R}$. Per la risoluzione del sistema $Ax = b$ si consideri il metodo iterativo $Mx_{k+1} = Nx_k + b$, ottenuto dal partizionamento $A = M - N$, dove M è la matrice diagonale a blocchi 2×2 con blocchi diagonali $\begin{bmatrix} -\alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix}$.

a) Dimostrare che la successione $\{x_k\}$ è ben definita per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

b) Dare condizioni sufficienti su α per la convergenza del metodo e dare una limitazione superiore al raggio spettrale della matrice di iterazione.

c) Confrontare il metodo col metodo di Jacobi, più precisamente mostrare che

esistono valori di α per cui il metodo è convergente mentre il metodo di Jacobi non lo è.

Soluzione

□

Esercizio 11 Sia A una matrice reale simmetrica $n \times n$ con autovalori λ_i , $i = 1, \dots, n$ e autovettori ortonormali u_i , $i = 1, \dots, n$. Per la risoluzione del sistema $Ax = b$ si consideri il metodo iterativo $x_{k+1} = M^{-1}(Nx_k + b)$, dove $A = M - N$ e $\det M \neq 0$.

- Si diano condizioni necessarie e sufficienti sui λ_i affinché il metodo ottenuto con $M = I$ sia convergente.
- Si diano condizioni necessarie e sufficienti sui λ_i affinché esista un numero reale α tale che il metodo ottenuto con $M = \alpha I$ sia convergente.
- Supponendo $0 < \lambda_i \leq \lambda_{i+1} < 1$ per $i = 1, 2, \dots, n-1$ e assumendo di conoscere λ_1 e u_1 , si determinino i valori di α per cui il metodo iterativo ottenuto con $M = I + \alpha u_1 u_1^T$ sia convergente. Si determini un valore di α che massimizzi la velocità di convergenza del metodo.
- Supponendo $\lambda_i \leq \lambda_{i+1} < 1$ per $i = 1, 2, \dots, n-1$ si diano condizioni necessarie e sufficienti sugli autovalori di A affinché esista un α tale che il metodo ottenuto con $M = I + \alpha u_1 u_1^T$ sia convergente.

Soluzione

□

Esercizio 12 Per n intero positivo, siano $u, v, b \in \mathbb{R}^n$ e D una matrice $n \times n$ diagonale tale che $\det D \neq 0$. Per risolvere il sistema lineare $Ax = b$ con $A = D + uv^T$ si consideri il metodo iterativo $x_{k+1} = M^{-1}(Nx_k + b)$ dove $A = M - N$ e $M = \alpha D$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$.

- Dire sotto quali condizioni su u, v, D esiste un α per cui il metodo iterativo è convergente e determinare il raggio spettrale di $P = M^{-1}N$.
- Determinare il valore di α che minimizza il raggio spettrale di P .
- Si dimostri che per $\alpha = 1$ l'errore di approssimazione $e_1 = x_1 - x$ ottenuto dopo un passo a partire da un qualunque x_0 è proporzionale a $D^{-1}u$. Se $v = D^{-1}u$ si usi questa proprietà per determinare x_0 tale che $e_1 = 0$.

Soluzione

□

Esercizio 13 Si consideri il sistema lineare $Ax = b$ dove la matrice $n \times n$ $A = (a_{i,j})$ è tale che $a_{i,j} = d_i$ se $i = j$, $a_{1,j} = v_j$, se $j > 1$, $a_{i,1} = u_i$ se $i > 1$ e $a_{i,j} = 0$ altrimenti.

- Si consideri il metodo iterativo dato dal partizionamento $A = M - N$ con $M = (m_{i,j})$, $m_{1,1} = \alpha$, $m_{i,j} = a_{i,j}$ per $i \geq j$ e $(i,j) \neq (1,1)$. Dare condizioni sui valori di u_i e v_i affinché esista un α per cui il metodo è convergente.
- Determinare il valore ottimale di α che massimizza la velocità di convergenza.

c) Se $\alpha = 0$ e $\sum_{i=2}^n u_i v_i = 0$ determinare il numero di passi del metodo iterativo sufficienti a ridurre l'errore iniziale di un fattore 10^{-10} .

Soluzione

□

Esercizio 14 Per $n > 2$ intero, si consideri la matrice $n \times n$,

$$C = (c_{i,j}) = \begin{bmatrix} 0 & & & -1 \\ 1 & 0 & & -1 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

tale che $c_{i+1,i} = 1, i = 1, \dots, n-1, c_{i,n} = -1, i = 1, \dots, n, c_{i,j} = 0$ altrove. Sia inoltre $A = \alpha I - C$, con $\alpha > 0$ parametro reale.

a) Si dimostri che gli autovalori di C sono le radici $(n+1)$ -esime dell'unità diverse da 1.

b) Si studi la convergenza del metodo iterativo dato dal partizionamento $A = M - N, M = \alpha I, N = C$, per la risoluzione del sistema $Ax = b$, al variare di α .

c) Si studi la convergenza del metodo di Gauss Seidel applicato al sistema $Ax = b$ al variare di α e si confrontino i risultati con quelli del punto b).

Soluzione

□

Esercizio 15 Sia $m \geq 2$ un numero intero e si definiscano le matrici $m \times m$ $B = (b_{i,j}), E = (e_{i,j})$ tali che $b_{i,i} = \alpha, b_{i,i+1} = -1, i = 1, \dots, m-1, b_{i,j} = 0$ altrimenti; $e_{m,1} = -1, e_{i,j} = 0$ altrimenti. Si consideri la matrice $2m \times 2m$ definita da

$$A = \begin{bmatrix} B & E \\ E^T & B^T \end{bmatrix}$$

e il sistema lineare $Ax = b$. Dire per quali valori di α reale i metodi iterativi basati sul partizionamento $A = M - N$ sono convergenti alla soluzione del sistema e si valuti il raggio spettrale delle relative matrici di iterazione

a) $M = \alpha I$; b) $M = \begin{bmatrix} \alpha I & 0 \\ E^T & B^T \end{bmatrix}$; c) $M = \begin{bmatrix} \alpha I & E \\ E^T & \alpha I \end{bmatrix}$.

Per $\alpha = 2$ si dica quale dei metodi è più conveniente per ridurre l'errore iniziale di un fattore 10^{-10} e si valuti il numero di operazioni necessario a tale scopo.

Soluzione

□

Esercizio 16 Sia $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ partizionata in 9 blocchi $A_{i,j}, i, j = 1, 2, 3$, dove i blocchi $A_{i,i}, i = 1, 2, 3$, sono quadrati e $A_{1,2}, A_{2,3}, A_{3,1}$ sono nulli. Si decomponga A in $A = D - B - C$ dove

$$D = \begin{bmatrix} A_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & A_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & A_{3,3} \end{bmatrix}, B = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ A_{2,1} & 0 & 0 \\ 0 & A_{3,2} & 0 \end{bmatrix}, C = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & A_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- a) Si dimostri che se $\det(\lambda D - B - C) = 0$ e $\lambda \neq 0$, allora $\mu = \lambda^3$ è tale che $\det(\mu(D - B) - C) = 0$ e viceversa.
- b) Si dimostri che il metodo iterativo $x_{k+1} = M^{-1}(Nx_k + b)$ per risolvere il sistema lineare $Ax = b$ ottenuto con $M = D$, $N = B + C$ (Jacobi a blocchi) è convergente se e solo se lo è il metodo ottenuto con $M = D - B$, $N = C$ (Gauss-Seidel a blocchi). Si confrontino le velocità asintotiche di convergenza dei due metodi.

Soluzione

□

Esercizio 17 Sia $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $E = -E^T$ e i l'unità immaginaria tale che $i^2 = -1$.

- a) Si dimostri che se $n = 2m$, $m > 0$ intero, allora gli autovalori di E sono $\{\pm i\mu_j, \mu_j \in \mathbb{R}, j = 1, \dots, m\}$; se $n = 2m + 1$ allora gli autovalori sono $\{0\} \cup \{\pm i\mu_j, \mu_j \in \mathbb{R}, j = 1, \dots, m\}$, dove $m > 0$ è un intero.
- b) Sia inoltre $\rho(E) = 2$, $A = I - E$, $M = \alpha I$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $N = M - A$. Si dimostri che il metodo iterativo per risolvere il sistema lineare $Ax = b$, dato dal partizionamento $A = M - N$, è convergente se e solo se $\alpha > 5/2$ e per $\alpha = 5$ raggiunge la massima velocità di convergenza.
- c) Si determini in funzione di $\rho(E)$ il valore ottimale di α che massimizza la velocità di convergenza del metodo iterativo.

Soluzione

□

Esercizio 18 Si consideri il sistema lineare $Ax = b$, con A matrice reale $n \times n$.

- a) Si dimostri che se esistono matrici diagonali D_1 e D_2 tali che $D_1 A D_2$ è fortemente dominante diagonale (per righe o per colonne), oppure è irriducibile e dominante diagonale (per righe o per colonne) allora i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel applicati al sistema $Ax = b$ sono convergenti.
- b) Sia $a_{i,j} < 0$ per $i \neq j$ e $a_{i,j} > 0$ per $i = j$. Si dimostri che se esiste w con componenti positive tale che Aw oppure $A^T w$ hanno componenti positive (oppure non negative e A è irriducibile) allora i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel applicati a $Ax = b$ sono convergenti.
- c) Si dica per quali valori di $\alpha \leq 1$ i metodi di Jacobi e Gauss Seidel applicati alla matrice $n \times n$ tridiagonale $A = (a_{i,j})$, $a_{1,1} = \alpha$, $a_{i,i} = 2$, $a_{i,i-1} = a_{i-1,i} = -1$, $i = 2, \dots, n$, sono convergenti.

Soluzione

□

Esercizio 19 Dato il polinomio $p(x) = x^n - \sum_{i=0}^{n-1} x^i a_i$, dove n è un intero positivo, si associ a $p(x)$ la matrice $n \times n$ $B = (b_{i,j})$, tale che $b_{i+1,i} = 1$, $i = 1, \dots, n-1$, $b_{1,j} = a_{n-j}$, $j = 1, \dots, n$, $b_{i,j} = 0$ altrimenti.

- a) Si dimostri che $\det(xI - B) = p(x)$.

- b) Sia $n = 2m \geq 4$, $p(x) = (x^m - 1)^2$, $A = \alpha I - B$. Si studi al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza dei metodi di Jacobi e di Gauss-Seidel applicati al sistema $Ax = b$ e si confrontino le velocità di convergenza dei due metodi.
- c) Per $\alpha > 1$ e $0 < \theta < 1$, si valuti in funzione di α e θ il numero k di iterazioni per cui $\|e^{(k)}\|_\infty \leq \theta \|e^{(0)}\|_\infty$, dove $e^{(k)}$ è l'errore generato dopo k passi del metodo di Gauss-Seidel. Si tratti poi il caso particolare in cui $e_m^{(0)} = e_n^{(0)} = 0$.

Soluzione

□

Esercizio 20 Dati $a, b, c, d \in \mathbb{R}^n$ si dimostri che i vettori ortogonali a b e d stanno nel nucleo della matrice $V = ab^T + cd^T$ e che gli autovalori di

$$\begin{bmatrix} b^T a & b^T c \\ d^T a & d^T c \end{bmatrix}$$

sono autovalori di V . Si consideri poi il sistema lineare $Ax = f$, $x, f \in \mathbb{R}^n$, $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, dove $a_{i,i}, a_{n,i}, a_{1,i} \neq 0$, $i = 1, \dots, n$, $a_{i,j} = 0$ altrimenti. Si studi la convergenza dei metodi di Jacobi e di Gauss-Seidel applicati a tale sistema e se ne confrontino le velocità di convergenza.

Soluzione

□

Esercizio 21 Sia $A_n = (a_{i,j})$ la matrice tridiagonale $n \times n$ con elementi $a_{i,i} = 2$, $i = 1, \dots, n$, $a_{i+1,i} = a_{i,i+1} = -1$, $i = 1, \dots, n-1$.

a) Verificare che A è invertibile e che la prima ed ultima colonna dell'inversa di A sono rispettivamente $\frac{1}{n+1}(n, n-1, \dots, 2, 1)^T$ e $\frac{1}{n+1}(1, 2, \dots, n-1, n)^T$.

b) Si supponga che $n = 2m$, si partizioni A_n in 4 blocchi $m \times m$ e si scriva la matrice di iterazione del metodo di Jacobi a blocchi applicato al sistema $Ax = b$. Si analizzi la velocità di convergenza dei metodi di Jacobi e Gauss-Seidel a blocchi applicati al sistema $Ax = b$.

c) Cosa si può dire se $n = 3m$ e A_n è partizionata in 9 blocchi $m \times m$? Cosa si può dire nel caso generale in cui $n = km$ e A_n è partizionata in k^2 blocchi $m \times m$?

Soluzione

□

Esercizio 22 Sia $A = (a_{i,j})$ una matrice simmetrica $n \times n$ con autovalori $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n = 1$. Per risolvere il sistema $Ax = b$ si consideri la classe di metodi iterativi definiti da $x^{(k+1)} = x^{(k)} - \theta H(Ax^{(k)} - b)$, dove H è una matrice $n \times n$. Si studi la convergenza nei due casi $H = I$ e $H = 2I - A$ al variare del parametro θ . Si determini in funzione dei λ_i il valore ottimo di θ nei due casi. Si dica quali dei due metodi è più conveniente in termini computazionali (cioè in base al costo computazionale per passo e in base alla velocità di convergenza) nel caso in cui θ abbia il valore ottimo.

Soluzione

□

Esercizio 23 Sia $A = (a_{i,j})$ la matrice $n \times n$ di elementi $a_{i,i} = i$, per $i = 1, \dots, n$, $a_{i,n} = -1$, $a_{i+1,i} = -1$ per $i = 1, \dots, n-1$, $a_{i,j} = 0$ altrove. Si scrivano le matrici di iterazione J e G dei metodi di Jacobi e di Gauss Seidel applicati a un sistema lineare con matrice A e si dimostri che tali metodi sono convergenti. Si diano maggiorazioni dei raggi spettrali di J e di G e si individui il metodo che ha la migliore stima di velocità di convergenza.

Sia A_α la matrice ottenuta da A moltiplicando gli elementi diagonali di A per α . Dire per quali valori di α il metodo di Gauss-Seidel applicato ad un sistema con matrice A_α è convergente.

Soluzione

□

Esercizio 24 Sia A una matrice $n \times n$ non singolare di elementi reali e si consideri il partizionamento additivo $A = M - N_1 - N_2$, con M, N_1, N_2 matrici $n \times n$ ad elementi reali, $\det M \neq 0$. Per risolvere il sistema lineare $Ax = b$, $b \in \mathbb{R}^n$, si consideri l'iterazione $x^{(k+1)} = M^{-1}(N_1x^{(k)} + N_2x^{(k-1)} + b)$, $k = 1, 2, \dots$, dove $x^{(0)}, x^{(1)}$ sono scelti in modo arbitrario.

a) Si riscriva l'iterazione nella forma

$$z^{(k+1)} = \mathcal{P}z^{(k)} + q, \quad z^{(k)} = \begin{bmatrix} x^{(k)} \\ x^{(k-1)} \end{bmatrix}$$

esplicitando $\mathcal{P} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ e $q \in \mathbb{R}^{2n}$.

b) Si dimostri che gli autovalori di \mathcal{P} sono gli zeri di $\det(\lambda^2 M - \lambda N_1 - N_2)$.

c) Sia M la matrice diagonale con elementi principali $a_{i,i}$, N_1 la matrice strettamente triangolare inferiore con elementi $-a_{i,j}$ per $i > j$. Si dimostri che se A è fortemente dominante diagonale o irriducibilmente dominante diagonale allora la successione $\{x_k\}$ converge per ogni scelta di x_0, x_1 .

d) Con le specifiche di M, N_1 e N_2 del punto c), se A è matrice tridiagonale si confronti il raggio spettrale di \mathcal{P} con quello della matrice di iterazione del metodo di Jacobi applicato al sistema lineare $Ax = b$.

Soluzione

□

Esercizio 25 Dati i vettori $a = (a_i), f = (f_i) \in \mathbb{R}^n$ e $b = (b_i), c = (c_i) \in \mathbb{R}^{n-1}$ si consideri la matrice tridiagonale T di dimensione $n \times n$ che ha elementi diagonali $a_i \neq 0$, sottodiagonali b_i e sopradiagonali c_i . Si scrivano le relazioni che legano due iterate successive del metodo di Jacobi applicato al sistema $Tx = f$. Si dimostri che le formule sono stabili all'indietro. Si scriva una function nella sintassi di Octave che, presi in input $a, u, f \in \mathbb{R}^n, b, c \in \mathbb{R}^{n-1}$ fornisce in output l'approssimazione $v \in \mathbb{R}^n$ ottenuta applicando un passo del metodo di Jacobi al vettore u .

Soluzione

□

Esercizio 26 Dati i vettori $a = (a_i), f = (f_i) \in \mathbb{R}^n$ e $b = (b_i), c = (c_i) \in \mathbb{R}^{n-1}$ si consideri la matrice tridiagonale T di dimensione $n \times n$ che ha elementi diagonali $a_i \neq 0$, sottodiagonali b_i e sopradiagonali c_i . Si scrivano le relazioni che legano due iterate successive del metodo di Jacobi applicato al sistema $Tx = f$. Si dimostri che le formule sono stabili all'indietro. Si scriva una function nella sintassi di Octave che, presi in input $a, u, f \in \mathbb{R}^n, b, c \in \mathbb{R}^{n-1}$ fornisce in output l'approssimazione $v \in \mathbb{R}^n$ ottenuta applicando un passo del metodo di Jacobi al vettore u .

Soluzione

□

Esercizio 27 Si consideri il sistema lineare $Ax = f$ con $f \in \mathbb{R}^n$ e $A = (a_{i,j})$ tale che $a_{i+1,i} = -\alpha$ per $i = 1, \dots, n-1$, $a_{1,n} = -\beta$, $a_{i,i} = 1$ per $i = 1, \dots, n$, $a_{i,j} = 0$ altrove.

a) Scrivere le matrici di iterazione dei metodi di Jacobi e Gauss-Seidel applicati a tale sistema, e determinare i loro raggi spettrali. Dare condizioni su α e β necessarie e sufficienti per la convergenza dei due metodi.

b) Confrontare le velocità di convergenza dei due metodi in termini asintotici nel numero di iterazioni.

c) Dimostrare che dopo un passo del metodo di Gauss-Seidel l'errore di approssimazione è proporzionale al vettore $(1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1})^T$.

Usare questo fatto per ricavare direttamente la soluzione del sistema dal vettore ottenuto applicando un solo passo del metodo ad un qualsiasi vettore iniziale.

Soluzione La matrice A ha la forma

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & -\beta \\ -\alpha & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & -\alpha & 1 \end{bmatrix}$$

Le matrici di Jacobi e di Gauss Seidel hanno la forma

$$J = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \beta \\ \alpha & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \alpha & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 \\ -\alpha & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & -\alpha & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \beta \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

per cui

$$G = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ \alpha^{n-1} & \dots & \alpha & 1 \end{bmatrix} \beta e_1 e_n^T = \beta u e_n^T, \quad u = (1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1})^T$$

Gli autovalori λ di J sono tali che $\det(\lambda - J) = 0$. Calcolando il determinante con la regola di Laplace sulla prima riga si ottiene $\det(\lambda I - J) = \lambda^n - \beta\alpha^{n-1}$ da cui gli autovalori di J sono le radici n -esime di $\beta\alpha^{n-1}$ e il raggio spettrale è quindi $\rho(J) = |\beta\alpha^{n-1}|^{1/n}$.

La matrice $G = ue_n^T$ ha l'autovalore 0 di molteplicità $n-1$ corrispondente agli autovettori ortogonali a e_n , e l'autovalore $\mu = \beta e_n^T u = \beta\alpha^{n-1}$ corrispondente all'autovettore u . pertanto $\rho(G) = |\beta\alpha^{n-1}|$. Si osserva quindi che $\rho(G) = \rho(J)^n$. Condizione necessaria e sufficiente per la convergenza di entrambi i metodi è $|\beta\alpha^{n-1}| < 1$. Poiché il raggio spettrale dà la riduzione asintotica media per passo, dalla relazione $\rho(G) = \rho(J)^n$ si deduce che il metodo di Gauss Seidel impiega asintoticamente un numero di iterazioni n volte inferiore a quello richiesto dal metodo di Jacobi.

Se x^* è la soluzione del sistema e se $\epsilon^{(0)} = x^{(0)} - x^*$ è l'errore iniziale allora dalla teoria sappiamo che dopo un passo del metodo di Gauss-Seidel l'errore è $\epsilon^{(1)} = Ge^{(0)} = ue_n^T \epsilon^{(0)} = \epsilon_n^{(0)} u =: \xi u$.

Vale quindi $x^{(1)} - x^* = \xi u$ per calcolare x^* conoscendo $x^{(1)}$ e u , basta calcolare ξ . Poiché $Ax^* = f$ si ha $\xi Au = Ax^{(1)} - f$ da cui, considerando ad esempio la prima componente, $\xi = (x_1^{(1)} - \beta x_n^{(1)} - f_1)/(1 - \beta\alpha^{n-1})$. \square

Esercizio 28 Siano A, D_1, D_2 matrici reali $n \times n$, D_1 e D_2 matrici diagonali non singolari. Si consideri il sistema lineare $Ax = f$ con $f \in \mathbb{R}^n$ e il sistema equivalente $By = g$ con $B = D_1 A D_2$, $x = D_2 y$, $g = D_1 f$.

a) Si metta a confronto il metodo di Jacobi applicato al sistema $Ax = f$ e al sistema $By = g$. Si svolga la stessa analisi per il metodo di Gauss-Seidel.

b) Si scrivano le matrici di iterazione dei metodi di Jacobi e di Gauss Seidel applicati al sistema $Ax = b$ dove $A = uv^T$ con $u, v \in \mathbb{R}^n$ vettori con componenti non nulle e si calcolino i loro autovalori (si osservi che $uv^T = D_u E D_v$, con E matrice di elementi uguali a 1, D_u e D_v matrici diagonali con elementi diagonali rispettivamente u_i, v_i).

Soluzione

Riferimenti bibliografici

- [1] D. Bini, M. Capovani, O. Menchi. Metodi Numerici per l'Algebra Lineare. Zanichelli, Bologna 1988.