**Soluzione dell'esercizio 1.**

La funzione si annulla per definizione in 0 dove è anche continua essendo $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, in 1 essendo $\log 1 = 0$ e in $-1$. La sua derivata prima per $x \neq 0$ è $f'(x) = \log x + 1$ per $x > 0$ e $f'(x) = -2x - 1$ se $x \leq 0$. Quindi per $x \neq 0$ è di classe $C^\infty$ per cui in un intorno di 1 e di $-1$ si possono applicare i teoremi di convergenza visti a lezione. Inoltre poiché 1 e $-1$ sono zeri semplici essendo $f'(1) = 1$ e $f'(-1) = 1$, la convergenza è almeno quadratica ed essendo poi $f''(1) \neq 0$ e $f''(-1) \neq 0$ la convergenza è esattamente quadratica. Inoltre poichè per $x > 1$ la funzione è crescente positiva e convessa, per un teorema visto a lezione la successione generata dal metodo di Newton converge decrescendo a 1. Analoga situazione per $x < -1$ dove la funzione è crescente negativa e concava. Mentre scegliendo $x_0$ in un opportuno intorno sinistro di 1 vale $x_1 > 1$, similmente scegliendo $x_0$ in un opportuno intorno destro di $-1$ vale $x_1 > -1$.

Per valutare la convergenza in 0 si costruisce la funzione $g(x) = x - f(x)/f'(x)$. Vale

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+\log x} & \text{se } x > 0 \\ \frac{x^2}{2x+1} & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

La funzione non è derivabile in 0 per cui non si possono applicare i teoremi visti a lezione. Però si osserva che se $0 < x \leq e^{-1}$ allora $|g(x)| < \frac{1}{2}|x|$ mentre se $-e^{-1} \leq x < 0$ allora $|g(x)| < |x|e^{-1} < \frac{1}{2}|x|$. Quindi per $x_0 \in [-e^{-1}, e^{-1}] =: \mathcal{I}$ vale $x_i \in \mathcal{I}$ e $|x_i| \leq e^{-1}\frac{1}{2}^i$ per cui il metodo è convergente.

Inoltre si vede dalla espressione di $g(x)$ che se $x > 0$ allora $g(x) < 0$ e se $x < 0$ allora $g(x) > 0$. Cioè la convergenza è alternata.

Per valutare l'ordine di convergenza si valuta $\lim |x_{k+1}/x_k| = \lim |g(x_k)/x_k|$, dove l'espressione di $g(x)$ è diversa a seconda che $x_k$ sia positivo o negativo. Per l'alternanza della successione basta distinguere la sottosuccessione ottenuta con valori pari di $k$ dalla sottosuccessione ottenuta con valori dispari di $k$. In un caso si ha

$$\lim \frac{1}{1 + \log x_k} = 0$$

nell'altro

$$\lim \frac{x_k}{2x_k + 1} = 0$$

Poiché entrambi i limiti sono nulli la convergenza è superlineare. Per valutare l'ordine di convergenza $p$ dobbiamo considerare il $\lim g(x_k)/x_k^p$. Nel primo caso il limite vale $\infty$ qualunque sia il valore di $p > 1$. Nel secondo caso il limite è non nullo per $p = 2$. Cioè una sottosuccessione converge con ordine 2 l'altra converge superlinearmente ma non ha ordine di convergenza. Quindi la successione generata dal metodo converge superlinearmente ma l'ordine di convergenza non è definito.

**Soluzione dell'esercizio 2.** La matrice $J$ è data da

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1/a & & & & \\ 1/a & 0 & 1/a & & & \\ & 1/2 & 0 & 1/2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1/2 & \ddots & 1/2 \\ & & & & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

Il terzo teorema di Gerschgorin ci dice che per $a \geq 2$ vale $\rho(J) < 1$. Ma si può fare di meglio. Si trasforma $J$ per similitudine moltiplicando la prima riga per $\epsilon^{-1}$ e la prima colonna per $\epsilon$. Si sceglie $\epsilon > 0$ in modo che i raggi del primo e del secondo cerchio di Gershgorin siano uguali tra loro e uguali a $R$. Si ottiene la condizione $\epsilon^2 + \epsilon - 1 = 0$, che dà $\epsilon = (\sqrt{5} - 1)/2$ e $R = \epsilon/a$. Da cui per il terzo teorema di Gerschgorin, essendo $J$ irriducibile, vale $\rho(J) < 1$ se $R \leq 1$ condizione è soddisfatta per $a \geq 1/\epsilon = 2/(\sqrt{5} - 1) = 1.618....$

Per il partizionamento in cui $M = \mathrm{diag}(\left[\begin{smallmatrix} a & -1 \\ - & a \end{smallmatrix}\right], 2I_{n-2})$, risulta $\left[\begin{smallmatrix} a & -1 \\ -1 & a \end{smallmatrix}\right]^{-1} = \frac{1}{a^2-1}\left[\begin{smallmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{smallmatrix}\right]$. La matrice di iterazione risulta allora

$$P = \begin{array}{cc|ccccc} 0 & 0 & \frac{1}{a^2-1} & & & & \\ 0 & 0 & \frac{a}{a^2-1} & & & & \\ \hline 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1/2 & 0 & 1/2 & \\ & & & & 1/2 & 0 & \end{array}$$

La matrice ha un autovalore 0 e gli altri sono gli autovalori della matrice ottenuta cancellando prima riga e prima colonna. Tale matrice è irriducibile. L'applicazione del terzo teorema di Gerscgorin a questa matrice garantisce che $\rho(P) < 1$ se $a \geq (1 + \sqrt{5})/2 = 1.618....$

Nel caso in cui $M = \mathrm{diag}(\left[\begin{smallmatrix} a & -1 \\ - & a \end{smallmatrix}\right], \mathrm{trid}_{n-2}(-1, 2, -1))$ la matrice di iterazione diventa

$$P = \begin{array}{cc|cccc} 0 & 0 & \frac{1}{a^2-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a}{a^2-1} & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2}v_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}v_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \frac{1}{2}v_{n-2} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}$$

dove $v = (v_i)$ è la prima colonna dell'inversa di $\mathrm{trid}_{n-2}(-1, 2, -1)$ cioè $v = \frac{1}{n-1}(n-2, n-1, \dots, 1)^T$. La matrice $P$ ha $n-2$ autovalori nulli e 2 autovalori coincidono con quelli della matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{a}{a^2-1} \\ \frac{1}{2}v_1 & 0 \end{bmatrix}$$

che sono $\pm\sqrt{\frac{1}{2}v_1\frac{a}{a^2-1}}$. Quindi si ha convergenza se $\frac{1}{2}v_1\frac{a}{a^2-1} < 1$, cioè se $a^2 - \frac{1}{2}v_1 a - 1 > 0$

**Soluzione dell'esercizio 3.**

```
function F=esercizio3(X,k)
n=size(X)(1);
F=eye(n)+X;
if k>1
  for i=1:k-1
    X=X*X;
    F=F*(eye(n)+X);
  end
end
```