Soluzione del compito di Analisi Numerica, a.a.2013-2014, Appello 3, 3/6/2014

Esercizio 1.

a) Data la regolarità delle funzioni $f(x)$ e $y(x)$ la funzione $g(x)$ risulta di classe $C^3(\mathbb{R})$ e si ha

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)}{f'(y(x))} + \frac{f(x)f''(y(x))y'(x)}{(f'(y(x)))^2},$$

che valutata in α dà $g'(\alpha) = 0$. Questo implica la convergenza locale con ordine almeno 2, data la regolarità di $g(x)$. Vale inoltre

$$g''(x) = -\frac{f''(x)}{f'(y(x))} + 2\frac{f'(x)f''(y(x))y'(x)}{(f'(y(x)))^2} + f(x)\left[\frac{f''(y(x))y'(x)}{(f'(y(x)))^2}\right]'$$

che valutata in α fornisce

$$g''(\alpha) = -f''(\alpha)/f'(\alpha) + 2f''(\alpha)y'(\alpha)/f'(\alpha) = 0$$

poiché $y'(\alpha) = 1/2$. Quindi per i risultati visti a lezione, essendo $g(x) \in C^3(\mathbb{R})$ il metodo ha convergenza locale di ordine almeno 3 e di ordine 3 se $g'''(\alpha) \neq 0$.

b) (Facoltativo) Risulta

$$g(x) - \alpha = \frac{1}{f'(y)}((x-\alpha)f'(y) - f(x))$$

Seguendo la dimostrazione del teorema della convergenza quadratica del metodo di Newton data a lezione si ha

$$\begin{aligned} -f(x) &= (\alpha - x)f'(x) + \frac{1}{2}(\alpha - x)^2 f''(x) + \frac{1}{6}(\alpha - x)^3 f'''(\xi) \\ f'(y) &= f'(x) + (y - x)f''(x) + \frac{1}{2}(x - y)^2 f'''(\eta) \end{aligned}$$

per opportuni ξ, η, da cui

$$\begin{aligned} g(x) - \alpha =& \frac{1}{f'(y)}[(x-\alpha)(f'(x) + (y-x)f''(x) + \frac{1}{2}(x-y)^2 f'''(\eta)) \\ &+(\alpha - x)f'(x) + \frac{1}{2}(\alpha - x)^2 f''(x) + \frac{1}{6}(\alpha - x)^3 f'''(\xi)] \\ =& \frac{1}{f'(y)}[((x-\alpha)(y-x) + \frac{1}{2}(\alpha - x)^2)f''(x) + \frac{1}{2}(x-\alpha)(x-y)^2 f'''(\xi) + \frac{1}{6}(\alpha - x)^3 f'''(\eta)] \end{aligned}$$

Poiché $y(x) = y(\alpha)+(x-\alpha)y'(\alpha)+\frac{1}{2}(x-\alpha)^2 y''(\nu) = \alpha+\frac{1}{2}(x-\alpha)+\frac{1}{2}(x-\alpha)^2 y''(\nu)$, si ha $y-x = \frac{1}{2}(\alpha-x)+\frac{1}{2}(x-\alpha)^2 y''(\nu)$ che sostituito nell'espressione di $g(x)-\alpha$ dà

$$g(x) - \alpha = \gamma(x)(x-\alpha)^3 + O(x-\alpha)^4$$

per un $\gamma(x)$ opportuno.

c) Le funzioni $f(x)$ e $y(x)$ sono derivabili infinite volte con continuità in un intorno di $\alpha = \sqrt{a}$. Vale inoltre $y(x) = (3x^2+a)/(4x)$ per cui $y(\alpha) = \alpha$, $y'(\alpha) = 1/2$. Inoltre $g(x) = (x^3 + 3ax)/(3x^2 + a)$. Con questa formula sono richieste 8 operazioni aritmetiche. Il metodo di Newton dato da $g(x) = (x^2 + a)/(2x)$ richiede 4 operazioni aritmetiche e ha ordine 2. Per cui, in base ai criteri visti a lezione, il metodo di Newton è più efficiente se $\log 3/\log 2 < 8/4$. Poiché $\log 3/\log 2 < \log 4/\log 2 = 2 = 8/4$ il metodo di Newton è più efficiente.

d) Vale $g(x) - \sqrt{a} = (x^3 + 3\alpha^2 - 3x^2\alpha - \alpha^3)/(3x^2 + \alpha^2) = (x-\alpha)^3/(3x^2 + a)$. Se $1/2 \le a < 1$ allora per $a < x \le 1$ risulta $g(x) - \alpha = (x-\alpha)^3/(3x^2 + a) > 0$ inoltre $g(x) - \alpha < (x-\alpha)^3/(4a) < (x-\alpha)^3/2 < (x-\alpha)^3$. Ciò implica che la successione $x_{k+1} = g(x_k)$, $x_0 = 1$ è decrescente, $x_0 - \alpha < 1/2$ e $x_k - \alpha < 1/2^{3^k}$. Inoltre per $k = 4$ è $(x_k - \alpha)/\alpha < 1/2^{80}$ per cui x_4 fornisce una approssimazione con 80 cifre significative.

Esercizio 2.

a) Moltiplicando la prima riga e la prima colonna di A rispettivamente per α e α^{-1} si ottiene una matrice B simile ad A che ha elementi uguali a quelli di A tranne che $b_{2,1} = 1$, $b_{1,2} = \alpha^2$ e vale $\det A = \det B$. Se $0 < \alpha^2 \le 2$ la matrice B è dominante diagonale e irriducibile. Per il terzo teorema di Gerschgorin è invertibile. Se $\alpha = 0$ la matrice A ha determinante uguale alla matrice ottenuta da A togliendo prima riga e colonna che è ancora invertibile per lo stesso teorema.

b) La relazione $\det A = 2n - \alpha^2(n-1)$ si dimostra per induzione. La relazione vale per $n = 2$ e per $n = 3$. Denotando $d_n = \det A$, sviluppando il determinante con la regola di Laplace sull'ultima riga si ottiene $d_{n+1} = 2d_n - d_{n-1}$. Per l'ipotesi induttiva si ha $d_{n+1} = 2(2n - \alpha^2(n-1)) - (2(n-1) - \alpha^2(n-2)) = 2(n+1) - n\alpha^2$.

c) Se $|\alpha| \le \sqrt{2}$ allora tutte le sottomatrici principali di testa di A sono invertibili e sotto queste condizioni esiste ed è unica la fattorizzazone LU qualunque sia n. Fissato $\epsilon > 0$, sia n_0 tale che $\sqrt{n/(n-1)} < 1 + \epsilon$ per ogni $n > n_0$. Allora per $\alpha = \sqrt{2}\sqrt{n_0/(n_0-1)}$ dal punto b) si ha che la sottomatrice di dimensione n_0 è singolare. Questo ci dice che non valgono le condizioni sufficienti di esistenza e unicità della fattorizzazione LU per ogni $n > n_0$. Poiché la matrice A_n è invertibile per ogni $n > n_0$ le condizioni sufficienti sono anche necessarie e quindi non esiste la fattorizzazione LU.

d) Posto $A = LU$, la matrice L è bidiagonale inferiore con $\ell_{i,i} = 1$, mentre U è bidiagonale superiore con $u_{i,i+1} = a_{i,i+1}$. Per cui dalla relazione $A = LU$ si ottiene $u_{1,1} = 2$, $\ell_{2,1} = \alpha/2$, $u_{2,2} = 2 - \alpha\ell_{2,1}$, $\ell_{i+1,i} = 1/u_{i,i}$, $u_{i+1,i+1} = 2 - \ell_{i+1,i}$ per $i = 2, \ldots, n-1$ Bastano quindi $2n$ operazioni aritmetiche a meno di costanti additive.

Esercizio 3. La matrice di Householder è data da $P = I - \beta uu^T$ con $\beta = 2/u^T u$. Per cui $y = Px = x - \beta(u^T x)$ si ha quindi la function:

```
function y=householder(x,u)
  beta = 2/(u'*u);
  t = u'*x;
  y = x - (t*beta)*u;
end
```

Il vettore u della matrice di Householder P che trasforma x in αe_1 è $u = x \pm \alpha e_1$, $\alpha = \sqrt{x^T x}$, dove il segno $\pm$ è scelto uguale al segno di x_1. Si ha quindi la function:

```
function [u,beta]=householder1(x)
  alfa=sqrt(x'*x);
  u=x;
  if x(1)>0
     u(1) = x(1) + alfa;
  else
     u(1) = x(1) - alfa;
  end
  beta=2/(u'*u);
end
```