Compito di Analisi Numerica, a.a.2014-2015, Appello 2
10/2/2015

Esercizio 1.

Si consideri il sistema lineare $Ax = b$, si decomponga la matrice A come $A = D - E - F$ dove D è matrice diagonale, E è strettamente triangolare inferiore, F è strettamente triangolare superiore. Si consideri il metodo iterativo definito dal partizionamento $A = M - N$ dove $M = D - F$, $N = E$.

a) Dimostrare che se A (oppure A^T) è fortemente dominante diagonale allora il metodo è convergente. Dimostrare che se A (oppure A^T) è irriducibilmente dominante diagonale allora il metodo è convergente.

b) Dimostrare che se A è tridiagonale vale $\rho(M^{-1}N) = \rho(J)^2$ dove J è la matrice di iterazione del metodo di Jacobi e $\rho(\cdot)$ indica il raggio spettrale.

c) Sia $1 \le k < n$. Dimostrare che se $A = (a_{i,j})$ è tale che $a_{i,j} \neq 0$ per $i = j$, per $i = j - 1$ e per $j = i - k$, mentre $a_{i,j} = 0$ per i restanti valori, allora $\rho(M^{-1}N) = \rho(J)^{k+1}$.

d) (Facoltativo) Dare esempi in cui $\rho(M^{-1}N) > \rho(G)$ e $\rho(M^{-1}N) < \rho(G)$ dove G è la matrice di iterazione del metodo di Gauss-Seidel.

Esercizio 2.

È data la funzione

$$g(x) = (a - 2\,\mathrm{sign}(x))|x|^p$$

dove $p > 0$, $0 < a < 2$ e sign(x)=1 se $x \ge 0$, sign$(x) = -1$ altrimenti, che ha $\alpha = 0$ come punto fisso. Si considerino le successioni generate da $x_{k+1} = g(x_k)$ a partire da $x_0 \in \mathbb{R}$.

a) Dimostrare che per $p > 1$ le successioni $\{x_k\}$ convergono localmente a zero qualunque sia il valore di a con ordine almeno p. Si valuti l'ordine di convergenza delle sottosuccessioni $\{x_{2k}\}$ e $\{x_{2k+1}\}$.

b) Se $p = 1$ determinare valori di a per cui c'è convergenza locale. Dire se per questi valori c'è convergenza globale. Valutare l'ordine e il fattore di convergenza delle sottosuccessioni $\{x_{2k}\}$ e $\{x_{2k+1}\}$. Valutare la media geometrica asintotica della riduzione degli errori data da $\lim_{k\to\infty}(\prod_{i=1}^{k} r_i)^{1/k}$ dove $r_k = |x_k - \alpha|/|x_{k-1} - \alpha|$ è la riduzione dell'errore al passo k.

c) Dimostrare che se $p < 1$ non esiste un intorno $\mathcal{I}$ di 0 tale che per ogni $x_0 \in \mathcal{I}$ la successione $\{x_k\}$ è contenuta in $\mathcal{I}$ e converge a 0.

Esercizio 3.

Scrivere una *function* nella sintassi di *Octave* che, presi in input una matrice A e un vettore b, verifica che gli elementi diagonali di A siano diversi da zero e, in questo caso, applica il metodo iterativo dell'esercizio 1 per approssimare la soluzione del sistema $Ax = b$ restituendo in output una approssimazione z della soluzione. Le iterazioni vengono terminate se il loro numero ha raggiunto la soglia di 999 iterazioni, oppure la condizione $\|Az - b\|_\infty < 10^{-6}$ è verificata.

Risoluzione

Esercizio 1.

Soluzione 1: Sia $A = D-E-F$ partizionata come nel testo, e si consideri analogo partizionamento con $\widehat{A} = A^T$ cioè $\widehat{A} = D - \widehat{E} - \widehat{F}$. Risulta allora $\widehat{E} = F^T$, $\widehat{F} = E^T$. Per cui la matrice di iterazione $P = (D-F)^{-1}E$ si può scrivere come $(D - \widehat{E}^T)^{-1}\widehat{F}^T$, il suo raggio spettrale coincide col raggio spettrale della trasposta cioè $\widehat{F}(D-\widehat{E})^{-1}$ che è simile a $(D-\widehat{E})^{-1}\widehat{F}$ (perché date due matrici A, B di cui B non singolare vale $B(AB)B^{-1} = AB$). Ma quest'ultima matrice coincide con la matrice di iterazione del metodo di Gauss-Seidel applicato al sistema con matrice $\widehat{A} = A^T$. Quindi i punti a) e b) seguono dalle proprietà viste nella teoria del metodo di Gauss-Seidel.

c) Si ha che μ è autovalore di $P = M^{-1}N$ se e solo se $\det(E - \mu D - \mu F) = 0$, mentre λ è autovalore di J se e solo se $\det(E + F - \lambda D) = 0$. Coniugando con $D_\alpha = \mathrm{diag}(1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1})$, poichè $D_\alpha E D_\alpha^{-1} = \alpha^k E$, e $D_\alpha F D_\alpha^{-1} = \alpha^{-1}F$, si ha $\det(E + \alpha^{-k-1}F - \alpha^{-1}\lambda D) = 0$. Per cui, se $\lambda \neq 0$ è autovalore di J, scegliendo α tale che $\alpha^k = 1/\lambda$ segue $\mu = \lambda^k$ è autovalore di P. Viceversa, se μ è autovalore non nullo di P allora le radici k-esime di μ sono autovalori di J.

d) Con $n = 3$ si considerino le matrici A e A^T dove $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Per quanto riguarda la matrice A, il metodo di Gauss-Seidel ha matrice di iterazione $G = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 0 \end{bmatrix}$ e quindi ha raggio spettrale $\rho_{GS} = 1/2$, mentre la matrice di iterazione $P = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ del nuovo metodo ha raggio spettrale $\rho = 1/4$.Vale quindi $\rho < \rho_{GS}$. Per la matrice $\widehat{A} = A^T$ il raggio spettrale $\hat{\rho}$ del nuovo metodo e il raggio spettrale $\hat{\rho}_{GS}$ del metodo di Gauss-Seidel valgono $\hat{\rho} = \rho_{GS}$, $\hat{\rho}_{GS} = \rho$, per cui $\hat{\rho}_{GS} < \hat{\rho}$.

Soluzione 2: Si procede come nel caso del metodo di Gauss-Seidel visto a lezione.

a) La matrice di iterazione è $P = (D-F)^{-1}E$, per cui λ è autovalore di P se e solo se $\det((D-F)^{-1}E - \lambda) = 0$ cioè $\det(E - \lambda D + \lambda F) = 0$. Supponiamo per assurdo esista λ autovalore e $|\lambda| \geq 1$. Allora, posto $B = E - \lambda D + \lambda F$, dalla dominanza diagonale forte di A segue $|a_{i,i}| > \sum_{j=1}^{i-1} |a_{i,j}| + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{i,j}|$ da cui, moltiplicando per $|\lambda|$ si ha

$$\begin{aligned}|\lambda||a_{i,i}| &> |\lambda| \sum_{j=1}^{i-1} |a_{i,j}| + |\lambda| \sum_{j=i+1}^{n} |a_{i,j}| \\ &\geq \sum_{j=1}^{i-1} |a_{i,j}| + \lambda \sum_{j=i+1}^{n} |a_{i,j}| = \sum_{j=1}^{i-1} |b_{i,j}| + \sum_{j=i+1}^{n} |b_{i,j}|\end{aligned}$$

da cui segue la dominanza diagonale forte di $B = E - \lambda D + \lambda F$ che quindi non può essere singolare per il primo teorema di Gerschgorin. Analogamente si procede nel caso di dominanza diagonale e irriducibilità, applicando il terzo teorema di Gerschgorin, così come nel caso della matrice trasposta.

b) Se μ è autovalore di P allora $\det(E - \mu D + \mu F) = 0$. Se λ è autovalore di P allora $\det(E + F - \lambda D) = 0$. Posto $D_\alpha = \mathrm{diag}(1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1})$ con $\alpha \neq 0$, allora $\det(E+F-\lambda D) = 0$ se e solo se $\det D_\alpha(E+F-\lambda D)D_\alpha^{-1} = 0$ se e solo se $\det(\alpha E + \alpha^{-1}F - \lambda D) = 0$ se e solo se $\det(E + \alpha^{-2}F - \lambda\alpha^{-1}D) = 0$. scegliendo $\alpha = 1/\lambda$, con $\lambda \neq 0$, si ha $\det(E + \lambda^2 F - \lambda^2 D) = 0$. Cioè λ^2 è autovalore di P. Quindi, se $\lambda \neq 0$ è autovalore di J allora $\mu = \lambda^2$ è autovalore di P. Viceversa, se $\mu \neq 0$ è autovalore di P scegliendo α uguale a una delle due radici di μ ne segue che α è autovalore di J. Quindi $\rho(P) = \rho(J)^2$.

Soluzione 3: Sia J la matrice di permutazione associata alla permutazione $\sigma_i = n - i + 1$. Per cui se $U = (u_{i,j})$ è triangolare superiore allora $V = JUJ^T$, che ha elementi $v_{i,j} = u_{n-i+1,n-j+1}$, è triangolare inferiore. Se U è triangolare inferiore allora JUJ^T è triangolare superiore. Per cui $JPJ^T = (JDJ^T - JFJ^T)^{-1}JEJ^T$. Ma ora, poiché JEJ^T è triangolare superiore e JFJ^T è triangolare inferiore, la matrice JPJ^T è la matrice di iterazione del metodo di Gauss-Seidel applicato a JAJ^T. Inoltre la dominanza diagonale di A è equivalente alla dominanza diagonale di JAJ^T così come la irriducibilità di A è equivalente alla irriducibilità di JAJ^T. Questo dimostra il punto a).

b) Come per il punto a) la matrice JPJ^T è la matrice di iterazione del metodo di Gauss-Seidel applicato a JAJ^T per cui il risultato segue dai teoremi visti al lezione.

Commento: in questo modo se $\{x_k\}$ è la successione dei vettori generati dal nuovo metodo allora $\{y_k\}$, con $y_k = Jx_k$, coincide con la successione dei vettori generati dal metodo di Gauss-Seidel applicato al sistema $JAJy = Jb$, $x = Jy$.

Esercizio 2.
La funzione $g(x)$ può essere scritta come

$$g(x) = \begin{cases} (a+2)|x|^p & \text{se } x < 0 \\ (a-2)|x|^p & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

è continua ed ha come unico punto fisso $\alpha = 0$. La successione x_k è alternata poiché se $x < 0$ allora $g(x) = (a+2)|x|^p > 0$ mentre se $x > 0$ allora $g(x) = (a-2)|x|^p < 0$.

a) Trattiamo il caso $p > 1$. La funzione $g(x)$ è derivabile in α infatti $\lim_{h\to 0}(g(h) - g(0))/h = 0$ essendo $(g(h) - g(0))/h = g(h)/h = \sigma|h|^{p-1}$ dove $\sigma = a - 2$ o $\sigma = -a - 2$ a seconda che $h > 0$ o $h < 0$. Inoltre la derivata è continua in zero essendo $g'(x) = p\sigma|x|^{p-1}$ dove σ prende i valori di $a - 2$ o $-a - 2$ a seconda del segno di x. Essendo $g \in C^1$ e $g'(0) = 0$, per continuità esiste un intorno di 0 in cui $|g'(x)| \leq \lambda < 1$. Allora sono verificate le ipotesi del teorema del punto fisso e quindi c'è convergenza locale per ogni valore di a. Inoltre vale $\lim_{x\to 0} g(x)/x = 0$. Ciò implica la superlinearità della convergenza.

Valutiamo allora l'ordine. Si considera $\lim_k |g(x_k)/x_k^q|$. Vale

$$\left|\frac{g(x)}{x^q}\right| = \begin{cases} (a+2)|x|^{p-q} & \text{se } x < 0 \\ (2-a)|x|^{p-q} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Per cui se $q < p$ allora $\lim_k |g(x_k)/x_k^q| = 0$, se $q = p$ il limite non esiste, se $q > p$ il limite è infinito. Quindi l'ordine non è definito. Però, poiche vale $|g(x_k)| \le \gamma |x_k|^p$ per $\gamma = \max(a+2, 2-a)$, per definizione l'ordine è "almeno p".

Studiamo l'ordine di convergenza di $\{x_{2k}\}$. Si considera per semplicità il caso $x_0 > 0$. Vale $x_{2(k+1)} = G(x_{2k})$ con

$$G(x) = g(g(x)) = (a+2)(|a-2||x|^p)^p = (a+2)(2-a)^p|x|^{p^2}$$

da cui segue che $|G(x)/x^q| = (a+2)(2-a)^p|x|^{p^2-q}$. Per cui se $q = p^2$ vale $\lim_k |x_{2(k+1)}|/|x_{2k}|^q = (a+2)(2-a)^p$. Per cui l'ordine è p^2. Analogamente si procede negli altri casi.

b) Trattiamo ora il caso $p = 1$. La funzione $g(x)$ non è derivabile in α quindi non si possono applicare i teoremi di convergenza visti nella teoria. Dal fatto che la succesione è alternata segue che $|x_{2k}| = (2-a)^k(2+a)^k|x_0|$ mentre $|x_{2k+1}| = (2-a)^k(2+a)^k\sigma|x_0|$ con $\sigma = 2-a$, oppure $\sigma = 2+a$ a seconda della scelta $x_0 > 0$ o $x_0 < 0$. Quindi si ha convergenza se $4 - a^2 < 1$ cioè se $a > \sqrt{3}$. Inoltre la convergenza non dipende da x_0 ed è quindi globale. Per la velocità di convergenza si osserva che $(x_{k+1} - \alpha)/(x_k - \alpha) = x_{k+1}/x_k$ per cui se k è pari si ha $x_{k+1}/x_k = \sigma$, se k è dispari si ha $x_{k+1}/x_k = (2-a)(2+a)/\sigma$. Per cui la sottosuccessione x_{2k}/x_{2k-1} ha limite diverso dalla sottosuccessione x_{2k+1}/x_{2k} essendo $a \ne 0$, quindi il limite $\lim |x_{k+1} - \alpha|/|x_k - \alpha|$ non esiste. Le sottosuccessioni con indici pari e con indici dispari convergono linearmente con fattore di convergenza $4 - a^2$.

c) Trattiamo il caso $p < 1$. Facciamo vedere che c'è una soglia $\hat\rho$ per cui tutti gli intorni $\mathcal{I} = [-\rho, \rho]$ di raggio $\rho < \hat\rho$ contengono un x_0 per cui $x_1 = g(x_0) \notin \mathcal{I}$. Quindi non esiste alcun intorno di raggio minore di $\hat\rho$ per cui c'è convergenza locale. Per questo si osserva che la condizione $|g(x)| > (2-a)|x|^p$ equivale a $|2-a||x|^p > |x|$, cioè $|x| < |2-a|^{\frac{1}{1-p}}$. Quindi ponendo $\hat\rho = |2-a|^{\frac{1}{1-p}}$ vale $|x_1| > |x_0|$ con $x_0 = \rho$. Per cui ogni intorno $[-\rho, \rho]$ con $\rho < \hat\rho$ contiene un x_0 per cui x_1 non sta nell'intorno.

Esercizio 3.

```
function z = ese3(a,b)
  n=length(b);
  for i=1:n
    if a(i,i)==0
      z="Il metodo non e' applicabile";
      disp(z)
      return
    endif
  endfor
  N = tril(a,-1);
  M = triu(a);
  z=b;
```

```
  for i=1:999
    z = M\(b+N*z);
    err=max(abs(a*z-b));
    if err<1.e-6
      break
    endif
  endfor
endfunction
```