Compito di Analisi Numerica, a.a. 2009-2010, primo appello
14 Gennaio 2010

Eercizio 1. Dato un intero pari $n = 2m > 0$ e numeri reali a_i, f_i, $i = 1, \ldots, n$, b_i, $i = 1, \ldots, n-1$, si consideri il sistema lineare $H\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}$, dove $H = (h_{i,j})$ è la matrice $n \times n$ tale che gli elementi non nulli sono tutti e soli gli $h_{i,i} = a_i$, per $i = 1, \ldots, n$, gli $h_{2i-1,2i} = b_{2i-1}$, per $i = 1, \ldots, m$ e gli $h_{2i+1,2i} = b_{2i}$, per $i = 1, m-1$.

a) Si descriva un algoritmo per risolvere il sistema $H\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}$ che impieghi non più di $3n$ operazioni aritmetiche, e se ne faccia l'analisi all'indietro dell'errore.

b) Si scriva un *function* con la sintassi Octave o una *subroutine* con la sintassi Fortran 90, che risolve il sistema $H\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}$ dati $\boldsymbol{a} = (a_i)$, $\boldsymbol{b} = (b_i)$, $\boldsymbol{f} = (f_i)$.

Esercizio 2. Si vuole approssimare il reciproco di un numero reale $a > 0$, eseguendo solamente moltiplicazioni, addizioni e sottrazioni. Si consideri allora la classe di iterazioni del punto fisso $x_{k+1} = g(x_k)$, dove

$$g(x) = x + (1 - ax)(\beta x + \gamma a x^2), \quad \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

a) Si determinino i parametri $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, indipendenti da a, in modo da ottenere il metodo iterativo con l'ordine di convergenza più alto possibile.

b) Si mettano in relazione i residui $1 - ax_k$ e $1 - ax_{k+1}$. Si confronti l'efficienza del metodo ottenuto con quella del metodo dato da $\hat{g}(x) = 2x - ax^2$. In particolare, se $1/2 \le a < 1$ e $x_0 = 1$, si valuti il numero di passi k e il numero totale di operazioni aritmetiche affinchè $|x_k - a^{-1}|/a^{-1} < 2^{-52}$.

c) (Facoltativo) Si individui una espressione generale di $g(x)$ che dia un metodo a convergenza di ordine q arbitrario e se ne valuti l'efficienza.

Esercizio 3. Sia $A_n = (a_{i,j})$ la matrice tridiagonale $n \times n$ con elementi $a_{i,i} = 2$, $i = 1, \ldots, n$, $a_{i+1,i} = a_{i,i+1} = -1$, $i = 1, \ldots, n-1$.

a) Verificare che A è invertibile e che la prima ed ultima colonna dell'inversa di A sono rispettivamente $\frac{1}{n+1}(n, n-1, \ldots, 2, 1)^T$ e $\frac{1}{n+1}(1, 2, \ldots, n-1, n)^T$.

b) Si supponga che $n = 2m$, si partizioni A_n in 4 blocchi $m \times m$ e si scriva la matrice di iterazione del metodo di Jacobi a blocchi applicato al sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Si analizzi la velocità di convergenza dei metodi di Jacobi e Gauss-Seidel a blocchi applicati al sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

c) Cosa si può dire se $n = 3m$ e A_n è partizionata in 9 blocchi $m \times m$?
(Facoltativo) Cosa si può dire nel caso generale in cui $n = km$ e A_n è partizionata in k^2 blocchi $m \times m$?