February 27, 2014

TGBD(1) - CONTESTO, STRUMENTI E COSTRUZIONI

Ci occuperemo di n-varietà (soprattutto compatte) di dimensione “bassa”, cioè $n = 0, 1, 2, 3, 4$ anche se, come vedremo un po' in seguito, per precise ragioni sia tecniche sia fenomenologiche la partizione più pertinente delle dimensioni sarebbe: $\{0, 1, 2, 3\}$, $\{4\}$ e “alte” cioè $\{n \geq 5\}$.

In questa nota piuttosto informale, cercheremo di precisare il contesto in cui lavoreremo, e di descrivere (in modo operativamente sufficiente) alcuni strumenti e costruzioni che saranno pervasivi nella trattazione.

1. TOP e DIFF

Assumiamo che il lettore abbia una certa familiarità con le nozioni di base che riguardano le varietà topologiche o differenziali (cioè di classe C^∞, a volte anche dette “lisce”). Ci limitiamo a ricordare che:

- Una n-varietà topologica è uno spazio topologico localmente “omeomorfo” a $\mathbb{R}^n$; in più facciamo anche l'ipotesi topologica *globale* che sia metrizzabile e a base numerabile (equivalentemente che sia di Haussdorff, a base numerabile e paracompatto).
- Una n-varietà liscia è una n-varietà topologica munita di un atlante (massimale) (U_i, ϕ_i), con cambiamenti di carte (di coordinate locali) di classe C^∞ (qui stiamo appunto assumendo note le nozioni di carta di coordinate locali, atlante di carte ...).
- La categoria TOP delle varietà topologiche è una sottocategoria di quella degli spazi topologici; le “frecce” cioè i morfismi sono le applicazioni continue tra varietà, gli isomorfismi sono gli omeomorfismi. TOP è filtrata da TOP(n), dove n indica la dimensione.
- La categoria DIFF delle varietà lisce (filtrata da DIFF$((n))$ ha come morfismi le applicazioni di classe C^∞ (lisce) tra varietà lisce, gli isomorfismi sono i diffeomorfismi (ricordiamo che $f : M \to N$ è liscia se lo è localmente una volta “letta” nelle coordinate locali di M e N. Un diffeomorfismo è un omeomorfismo liscio con inverso liscio.)

1.1. **Varietà con bordo e sottovarietà.** In entrambe le categorie, M è per definizione una *n-varietà con bordo* $\partial M \subset M$ se

- M verifica le solite proprietà topologiche globali dette sopra.
- ∂M è una $(n-1)$-varietà e
$$\mathrm{Int}(M) := M \setminus \partial M$$
(detta la “parte interna” di M) è una n-varietà.
- La coppia $(M, \partial M)$ è localmente isomorfa in coordinate locali a $(\mathbb{R}^n_+, \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})$ dove $\mathbb{R}^n_+ = \{x_n \geq 0\}$.

Dati $n \geq m$, la m-varietà (con bordo eventualmente vuoto) $(Y, \partial Y)$ è una *sottovarietà* della n-varietà (idem) $(M, \partial M)$ se $Y \subset M$ e si verificano le seguenti condizioni:

(1) $\mathrm{Int}(Y) \subset \mathrm{Int}(M)$ e la coppia $(\mathrm{Int}(M), \mathrm{Int}(Y))$ è localmente isomorfa in coordinate locali alla coppia $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m \times \{0\})$.

(2) Per ogni componente connessa C di ∂Y si realizza una delle due seguenti situazioni:
(i) C è interamenete contenuta in ∂M ed è una sottovarietà nel senso di (1); la quaterna $(M, \partial M, Y, C)$ è localmente isomorfa a $(\mathbb{R}^n_+, \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}, \mathbb{R}^m_+, \mathbb{R}^{m-1} \times \{0\})$.
(ii) C è interamenete contenuta in $\mathrm{Int}(M)$ e la terna $(\mathrm{Int}(M), Y, C)$ è localmente isomorfa a $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m_+ \times \{0\}, \mathbb{R}^{m-1} \times \{0\})$.

Se $\partial Y = Y \cap \partial M$ diremo che è una sottovarietà *propria* di $(M, \partial M)$.

Un morfismo $f : Y \to M$ è detto un *embedding* se $f(Y) = (Z, \partial Z)$ è una sottovarietà di $(M, \partial M)$ e $f : (Y, \partial Y) \to (Z, \partial Z)$ è un isomorfismo.

Indicheremo con $\mathcal{M}_n^*$ l' insieme delle classi di isomorfismo delle n-varietà compatte *chiuse* (cioè senza bordo), dove $* =$ TOP o DIFF. Esiste un' applicazioe naturale che "dimentica" la struttura liscia:

$$d_n : \mathcal{M}_n^{DIFF} \to \mathcal{M}_n^{TOP} \ .$$

E' naturale chiedersi se questa applicazione è iniettiva e/o surgettiva e per ogni V nell'immagine di d_n, studiarne la controimmagine, in particolare la sua cardinalità. Risulta che le risposte dipendono dalla dimensione n. Per esempio si può mostrare (non è facile) che: è bigettiva per $n = 0, 1, 2, 3$; $d_n^{-1}(V)$ è sempre finita se $n \geq 5$. La situazione è radicalmente diversa per $n = 4$ (ne vedremo alcuni aspetti).

Fissata la categoria, un problema naturale è quello di descrivere $\mathcal{M}_n^*$; l'ideale sarebbe quello di trovare un sistema completo di invarianti effettivamente calcolabile, ma in questa forma forte ciò è noto per $n = 0, 1, 2$ (vedremo nel dettaglio il caso DIFF $n = 2$); non è escluso ma largamente improbabile per $n = 3$; è impossibile per $n \geq 4$. Un obiettivo meno ambizioso è quello di determinare partizioni e/o sottoclassi significative di $\mathcal{M}_n^*$ sulle quali distribuire il problema principale. Per esempio per $n = 3$ questo è realizzato dalla *geometrizzazione* (Thurston,..., Perelman). Per $n = 4$ la sottoclasse delle varietà semplicemente connesse è già molto ricca; è interessante la sottoclasse di $\mathcal{M}_4^{DIFF}$ formata dalle varietè che ammettono una struttura di superficie analitica (algebrica, proiettiva ...) complessa ...

E' anche conveniente studiare relazioni di equivalenza più deboli dell'isomorfismo. Ne elenchiamo qui di seguono due, di forza crescente.

1.2. **Cobordismo.** Una n-varietà compatte chiusa (cioè senza bordo) V è un bordo se esiste una $(n+1)$-varietà M con bordo ∂M che è isomorfo a V. Due n-varietà compatte chiuse V e V' sono *cobordanti* (scriveremo $V \sim_c V'$) se la loro *unione disgiunta* $V \sqcup V'$ è un bordo. La relazione di cobordismo estende la relazione di isomorfismo: infatti se $V \sim V'$ sono isomorfe, allora $M = V \times I$ realizza un cobordimo tra V e V'. In particolare questo mostra che $V \sqcup V$ è un bordo. L'operazione $\sqcup$ rende $\mathcal{M}_n^*$ un semigruppo abeliano. Le considerazioni precedenti mostrano che l'operazione passa al quoziente $\mathcal{B}_n^*$ (rispetto alla relazione di cobordismo) che diventa così un gruppo abeliano. L'elemento neutro è dato dalla classe dei bordi; ogni elemento non nullo è di ordine 2. Un problema naturale è quello di determinare $\mathcal{B}_n^*$ a meno di isomorfismo di gruppi abeliani, suoi insiemi minimali di generatori ...

1.3. **h-cobordismo.** Due n-varietà V e V' sono h-cobordanti ($V \sim_{hc} V'$) se sono cobordanti ed esiste un cobordismo: $V \sim W$, $V' \sim W'$, $W \sqcup W' = \partial M$, tale che le due inclusioni $i : W \to M$ e $i' : W' \to M$ sono equivalenze di omotopia. Questo significa che per i (analogamente per i') esiste un'inversa omotopica $g : M \to W$, cioè esistono un morfismo $F : W \times I \to W$ tale che $F(x,0) = g \circ i$, $F(x,1) = x$ e un morfismo $G : M \times I \to W'$ tale che $G(y,0) = i \circ g(y)$, $G(y,1) = y$. Un problema naturale è quello di determinare condizioni necessarie/sufficienti su V e V' affinché: $V \sim_{hc} V' \Rightarrow V \sim V'$.

1.4. **Orientazioni e classi fondamentali.** Sia M una n-varietà topologica compatta, chiusa e connessa. Sappiamo da ETA che si hanno due possibilità

(1) $H_n(M;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.
(2) $H_n(M;\mathbb{Z}) = 0$.

Nel primo caso diciamo che M è *orientabile*; la scelta di un generatore $[M]$ di $H_n(M;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ fissa un'orientazione di M, e $[M]$ è detta la *classe fondamentale* della varietà *orientata* M. Questa terminologia è giustificata dai seguenti fatti. Per ogni $x \in M$, sia $x \in B \subset M$ dove B è un 2-disco aperto contenuto in una carta di M; $H_n(B, B \setminus \{x\};\mathbb{Z}) = H_{n-1}(S^{n-1};\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ e la scelta di un generatore fissa un'orientazione locale di M in un intorno di x. Abbiamo l'omomorfismo composto

$$H_n(M;\mathbb{Z}) \to H_n(M, M \setminus \{x\};\mathbb{Z}) \to H_n(B, B \setminus \{x\};\mathbb{Z})$$

dove il primo è indotto dall'inclusione mentre il secondo è un isomorfismo ottenuto per excissione. Allora, se M è orientata, l'immagine di $[M]$ in $H_n(B, B \setminus \{x\};\mathbb{Z})$ è un generatore, cioè possiamo interpretare $[M]$ come un sistema globale coerente di orientazioni locali. Se M è liscia, allora M è orientabile se e solo se ammette un atlante orientato (massimale) (cioè il determinante dei differenziali dei cambiamenti di carta è ovunque > 0). L'orientazione su ogni carta di coordinate corrisponde alla scelta di una classe di equivalenza di basi di $\mathbb{R}^n$ (dove due basi sono equivalenti se e solo se la matrice di cambiamento di base ha determinante > 0). Ci sono esattamente due atlanti orientati massimali, ciascuno determina un'orientazione. L'equivalenza delle due nozioni di orientazione non è difficile da dimostrare. D'altra parte, questa seconda formulazione permette nel caso liscio una trattazione autonoma dell'orientabilità che non necessita il macchinario dell'omologia singolare.

Si ha sempre che $H_n(M; \mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2$ e l'unico generatore $[M]$ è detta la *classe fondamentale mod*(2) della varietà M.

Se M non è connessa allora è orientabile se e solo se lo sono le sue componenti connesse; una orientazione di M consiste in una scelta dell'orientazione su ciascuna componente. La classe fondamentale $[M]$ della varietà orientata M sarà la somma delle classi fondamentali delle sue componenti. Analogamente lavorando a coefficienti $\mathbb{Z}/2$.

La discussione precedente si estende al caso delle n-varietà compatte connesse con bordo, considerando l'omologia relativa $H_n(M, \partial M; \mathbb{Z})$. Una orientazione su M induce una orientazione sul bordo ∂M; questa si descrive facilmente nel modello locale $(\mathbb{R}^n_+, \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})$ in termini di classe di equivalenza di basi: una base $\mathcal{B}$ su $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ corrisponde all'orientazione indotta sul bordo se e solo se la base $\{\nu, \mathcal{B}\}$ corrisponde all'orientazione su $\mathbb{R}^n_+$, dove ν denota la normale lungo il bordo che punta fuori da semispazio; a parole questa è la regola "prima la normale uscente". Dunque abbiamo una nozione di "bordo orientato". In particolare per ogni varietà compatta chiusa orientata V, $V \sqcup -V$ è un bordo orientato, dove $-V$ denota la stessa varietà supporto ma munita dell'orientazione opposta (su ogni componente connessa). Possiamo allora mimare e specializzare la costruzione dei gruppi di cobordismo vista sopra nel contesto della varietà orientate. Questo porta a definire i gruppi di *cobordismo orientato* Ω^*_n.

Un isomorfismo tra varietà orientate $f : M \to N$ preserva l'orientazione (si dice anche che è orientato) se, per definizione, $f_*([M]) = [N]$; la relazione di cobordismo orientato indebolisce la relazione di equivalenza a meno di isomorfismi che preservano l'orientazione

2. Strumenti e costruzioni in DIFF

Lavoreremo principalmente nella categoria DIFF.

La topologia differenziale presenta molti vantaggi: è piuttosto flessibile e malleabile dunque piuttosto "topologica" ma, allo stesso tempo, ammette in molte circostanze di essere "linearizzata" localmente in modo fedele: questo impedisce il manifestarsi di fenomeni troppo "patologici" o contro-intuitivi che invece capitano in TOP (si pensi per esempio ad un morfismo TOP del tipo curva di Peano); oppure consente dimostrazioni ragionevolmente semplici di fatti intuitivamente plausibili, contrariamente a TOP (si pensi per esempio alla invarianza della dimensione rispetto agli omeomorfismi di varietà, ai teoremi di separazione quali quello per le curve di Jordan sul piano o anche alla trattazione dell'orientabilità richiamata prima).

Per $n \leq 3$, il fatto che la mappa d_n definita sopra è bigettiva, ci rassicura che "non perdiamo niente" restringendoci a DIFF. D'altra parte non entreremo mai nel merito della dimostrazione di questo fatto non banale. Le ragioni (soprattutto tecniche) per cui ha senso qualificare complessivamente come "alte" le dimensioni $n \geq 5$ intervengono in DIFF. Gli aspetti singolari della mappa d_4 che menzioneremo riguarderanno soprattutto il fallimento in dimensione 4 di tecniche DIFF che invece valgono per le dimensioni alte, oppure aspetti specifici che assumono certi invarianti TOP una volta specializzati in DIFF.

Nel seguito di questa sezione ricorderemo, in modo informale e soltanto con pochi suggerimenti per alcune dimostrazioni, nozioni, strumenti e costruzioni che costituiscono una specie di cassetta degli attrezzi di DIFF. Speriamo che ciò sarà comunque sufficiente per poterne fare un uso pratico sicuro. Per esempio il libro [M.W. Hirsch, *Differential Topology*, Springer GMT 33] contiene tutto questo materiale; molto utili anche i libri [J. Milnor, *Morse Theory*], [J. Milnor, *Topology from a differential viewpoint*], [J. Milnor, *Lectures on h-cobordism*].

Salvo avviso contrario, conveniamo che tutte le varietà e tutte le applicazioni saranno lisce.

2.1. **Linearizzazione e modelli locali.** La prima manifestazione fondamentale di linearizzazione localmente fedele in DIFF è data dal teorema delle funzioni implicite e dai suoi corollari. Supponiamo $m \geq n$, $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^m$ come al solito via l'inclusione $j(x_1,\dots,x_n) = ((x_1,\dots,x_n,0,\dots,0) \in \mathbb{R}^m$. Consideriamo applicazioni lisce $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, e supponiamo per semplicità che $f(0) = 0$ e $g(0) = 0$. Diciamo che f è una *summersione* se per ogni $x \in \mathbb{R}^m$, il differenziale Df_x è surgettivo. Diciamo che g è una *immersione* se per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, il differenziale Df_x è iniettivo. Ci sono due modelli lineari ovvi di summersione e immersione: rispettivamente la proiezione $p(x_1,\dots,x_m) = (x_1,\dots,x_n)$ e l'inclusione j. Questi sono in effetti i modelli locali a meno di cambiamento di coordinate locali lisce. Precisamente, esistono cambiamenti locali di coordinate lisce h e k intorno a 0 di $\mathbb{R}^m$, tali che $h(0) = 0$, $k(0) = 0$, e localmente $f \circ h = p$, $k \circ g = j$.
Un altro esempio un po' più delicato è il seguente. Sia $f : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ liscia tale che $Df_0 = 0$ mentre l'Hessiano Hf_0 è non singolare. La matrice Hf_0 definisce una forma bilineare simmetrica sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ e quindi ha un certo indice di negatività λ. Si dice allora che 0 *è un punto critico non degenere di f di indice* λ. Esiste un cambiamento *lineare* di coordinate tale che la forma quadratica associata ad Hf_0 assume la forma normale:

$$q(x_1,\dots,x_n) = -(x_1^2 + \cdots + x_\lambda^2) + x_{\lambda+1}^2 + \cdots + x_n^2 \ .$$

In effetti q è anche la forma normale locale di f a meno di cambiamenti di coordinate locali lisce. Precisamente (**Lemma di Morse**), esiste un cambiamento locale di coordinate lisce h di $\mathbb{R}^n$, $h(0) = 0$, tale che $f \circ h = q$.

2.2. **Funzioni a foruncolo e globalizzazioni.** Una ragione tecnica prima della flessibilità di DIFF è l'esistenza di funzioni "a foruncolo". Consideriamo due palle chiuse $B(2)$ e $B(1)$ concentriche in $\mathbb{R}^n$, di centro 0 e raggio 2 e 1 rispettivamente. Una funzione a foruncolo è una funzione liscia $\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tale che, il valore dipende solo dal modulo $r = \|x\|$, vale 0 per $r \geq 2$, vale 1 per $0 \leq r \leq 1$, è decrescente per $1 \leq r \leq 2$. Le proprietà topologiche che abbiamo assunto implicano che, per ogni n-varietà (che per semplicità assumiamo senza bordo) M, esistono atlanti *localmente finiti* (non massimali) $\{(U_i, \phi_i)\}$ di M (finiti se M è compatta) tali che ogni $\phi_i(U_i) = \mathbb{R}^n$ e anche la famiglia degli $\phi_i^{-1}(B(1))$ ricopre M. Per ogni i, una funzione a foruncolo locale λ può essere globalizzata ad una funzione liscia $\lambda_i = \lambda \circ \phi_i$ definita su tutta M con supporto compatto contenuto in U_i. Sistemi di funzioni di questo tipo (se necessario normalizzate a formare una *partizione dell'unità liscia*: la loro somma è costante uguale a 1) sono lo strumento principale per globalizzare costruzioni che valgono localmente. Vediamone un'applicazione importante.

Proposizione 2.1. *Per ogni n-varietà compatta chiusa M esiste un embedding di M in $\mathbb{R}^s$, a condizione che s sia abbastanza grande.*

Dim. Consideriamo un sistema finito $\{(U_i, \phi_i, \lambda_i)\}$, $i = 1,\dots,k$, con le proprietà dette prima. Consideriamo $f = (f_1,\dots,f_k) : M \to (\mathbb{R}^n)^k = \mathbb{R}^s$, dove $f_i = \lambda_i \phi_i$. Si verifica abbastanza facilmente che f è un embedding.

□

Un'altra applicazione della tecnica di globalizzazione è il fatto che data $(M, \partial M)$ compatta, il bordo ammette un *collare* in M, cioè esiste un embedding $c : \partial M \times I \to M$ tale che $c(x,0) = x$ per ogni $x \in \partial M$, $c((0,1]) \subset \mathrm{Int}(M)$. Questo permette anche di realizzare una copia diffeomorfa di M come sottovarietà di $\mathrm{Int}(M)$ ed estendere la Proposizione **??** alle varietà compatte con bordo.

2.3. **Fibrato tangente.** Assumiamo che sia un oggetto già familiare al lettore. Richiamiamo comunque alcuni fatti. Il modello locale del fibrato tangente è la struttura di spazio affine sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$; questa è infatti data dall'applicazione $T(\mathbb{R}^n) := \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ che comunque fissato il *punto* P di $\mathbb{R}^n$ individua l'applicazione bigettiva $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ che ad ogni punto Q associa il *vettore*

$v = \overrightarrow{PQ} = P - Q$. In questo modo la proiezione sul primo fattore

$$\pi : T(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$$

può essere interpretata come una fibrazione per cui ogni fibra $p^{-1}(P)$ ha una ben determinata struttura di spazio vettoriale canonicamenete isomorfo allo spazio standard $\mathbb{R}^n$. Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è un'applicazione liscia, allora questa si solleva ad una *applicazione tangente*

$$Tf : T(\mathbb{R}^n) \to T(\mathbb{R}^m),\ Tf(x, v) = (f(x), D_x f(v)$$

che manda fibre in fibre in modo lineare.
Tutto questo si globalizza sulle varietà lisce. Data una n-varietà M, all'atlante massimale di M, $\{U_i, \phi_i)\}$, si associa l'*atlante fibrato massimale* $\{U_i \times \mathbb{R}^n, \phi_i \times \mathrm{Id})\}$, tale che ogni cambiamento di coordinate locali su M, della forma

$$x \to \phi_i \circ \phi_j^{-1}(x)$$

viene completato ad un cambiamento di coordinate locali fibrate della forma

$$(x, v) \to (\phi_i \circ \phi_j^{-1}(x), D_x(\phi_i \circ \phi_j^{-1})(v))\ .$$

In questo modo si ottiene il fibrato tangente

$$\pi : T(M) \to M$$

e per ogni $x \in M$, la fibra $T_x M = \pi^{-1}(x)$ è lo spazio vettoriale tangente a M in x ed è isomorfo a $\mathbb{R}^n$.
Ogni applicazione tra varietà, $f : M \to N$ di solleva ad una applicazione tangente

$$Tf : T(M) \to T(N)$$

tale che

$$\pi_N \circ Tf = f \circ \pi_M$$

in modo coerente con il modello locale; per ogni $x \in M$, la restrizione di Tf a $T_x M$ è l'applicazione lineare $D_x f : T_x M \to T_{f(x)} N$.
Se $Y \subset M$ è una sottovarietà, allora $T(Y)$ è un sottofibrato della restrizione di $T(M)$ a Y, cioè per ogni $y \in Y$, $T_y Y$ è un sottospazio vettoriale di $T_y M$.

2.4. **Topologia sugli spazi di applicazioni tra varietà lisce.** Indichiamo con $\mathcal{E}(X, Y)$ l'insieme delle applicazioni lisce definite sulla n-varietà X a valori nella m-varietà Y. Vogliamo definire una topologia su $\mathcal{E}(X, Y)$ specificando per ogni $f \in \mathcal{E}(X, Y)$ una sottobase di intorni. Ogni intorno di questa sottobase ha la seguente forma: fissiamo una carta (U, ϕ) di X, una carta (V, ψ) di Y, un compatto $K \subset U$ tale che $f(K) \subset V$, $r \in \mathbb{N}$ e $\epsilon > 0$. Allora l'intorno $\mathcal{U}((U, \phi), (V, \psi), K, r, \epsilon)$ di f consiste delle applicazioni $g : X \to Y$ tali che $g(K) \subset V$ e per ogni multi-indice J di lunghezza minore o uguale a r si ha che per ogni $x \in \phi(K)$,

$$\| \frac{\partial^J}{\partial x^J} (\psi \circ f \circ \phi^{-1}(x) - \psi \circ g \circ \phi^{-1}(x)) \| < \epsilon\ .$$

Usando le proprietà topologiche locali e globali delle varietà, non è difficili mostrare che questa topologia è metrizzabile.
Nel caso particolare in cui X è un aperto di $\mathbb{R}^n$ e $Y = \mathbb{R}^m$, ritroviamo la *topologia della convergenza uniforme sui compatti* di X delle applicazioni e di tutte le loro derivate parziali di ordine minore o uguale di un certo livello finito che può essere scelto arbitrariamente grande.

Data un'applicazione tra varietà $f : M \to N$, diciamo che f è una *immersione* se per ogni $x \in M$, $D_x f$ è iniettivo; è una *summersione* se ogni $D_x f$ è surgettivo; vale:

Proposizione 2.2. *Se M è compatta, allora le immersioni, le summersioni, gli embedding, i diffeomorfismi rispettivamente formano sottoinsiemi aperti (eventualmente vuoti) di $\mathcal{E}(M, N)$.*

2.5. **Trasversalità.** La trasversalità è senz'altro lo strumento fondamentale e più potente di DIFF. E' anch'essa una manifestazione dell'esistenza di linearizzazioni localmente fedeli. Siano $\mathbb{R}^n$ considerato come spazio affine, V e W due sottospazi affini non vuoti di $\mathbb{R}^n$. Allora si hanno due possibilià:

(1) $V \cap W = \emptyset$

(2) $V \cap W \neq \emptyset$ e $\dim \mathrm{Span}(V \cup W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W) \leq n$.

Allora diciamo che V e W sono *trasversi* se siamo nel caso (1), oppure nel caso (2) richiedendo che $\dim \mathrm{Span}(V \cup W) = n$. Questo si realizza se e solo se $\dim(V \cap W) = \dim V + \dim W - \dim \mathrm{Span}(V \cup W)$, equivalentemente se e solo se, intermini delle giaciture, $\mathbb{R}^n \sim T(\mathbb{R}^n) = T(V) + T(W)$. Si nota anche considerato, per esempio, $V \cap W$ come sottospazio affine di V, si ha che

$$\mathrm{codim}_V(V \cap W) := \dim V - \dim(V \cap W) = n - \dim W = \mathrm{codim}_{\mathbb{R}^n}(W) \ .$$

Se $\mathbb{R}^n$ è orientato (per esempio per mezzo della classe di equivalenza della base standard) e anche V e W lo sono, allora $V \cap W$ è orientata mediante la seguente procedura (per semplicità confondiamo qui gli spazi affini e le loro giaciture): fissiamo una base $\mathcal{D}$ su $V \cap W$; a meno di equivalenza cè un solo modo di estendere $\mathcal{D}$ a basi $\mathcal{V} = \{\mathcal{D}, \mathcal{V}'\}$ e $\mathcal{W} = \{\mathcal{D}, \mathcal{W}'\}$ di V e W in modo che $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ rappresentano le orientazioni di V e W rispettivamente. Ci sono due possibilità: la base $\{\mathcal{D}, \mathcal{V}', \mathcal{W}'\}$ rappresenta l'orientazione di $\mathbb{R}^n$, oppure no. Allora $\mathcal{D}$ determina l'orientazione voluta di $V \cap W$ se e solo se siamo nel primo caso. L'orientazione risultante sull'intersezione dipende dall'ordine in cui si considerano V e W secondo la formula:

$$V \cap W = (-1)^{\mathrm{codim}(V)\mathrm{codim}(W)}(W \cap V) \ .$$

Veniamo ora alla globalizzazione di queste nozioni in DIFF. Siano: $(M, \partial M)$ una varietà con bordo (che può essere vuoto), N una varietà senza bordo e A una sottovarietà propria di N. Si dice che un'applicazione $f : M \to N$ è *trasversa ad* A (scriveremo $f \pitchfork A$) se:

- Per ogni $x \in M$ tale che $y = f(x) \in A$, si ha che
$$T_y N = D_x f(T_x M) + T_y A \ .$$
- Per ogni $x \in \partial M$ tale che $y = f(x) \in A$, si ha che
$$T_y N = D_x f(T_x(\partial M) + T_y A \ .$$

Vediamo alcuni casi particolari (per semplicità riferiamoci al caso in cui tutte le varietà hanno bordo vuoto).

• Se $f(M) \cap A = \emptyset$ allora f è trasversa ad A.

• Se V e W sono sottovarietà di N allora diciamo che sono trasverse ($V \pitchfork W$) se l'inclusione j_V di V in N è trasversa a W (e questo succede se e solo se anche $j_W \pitchfork V$.

• Se $A = \{x_0\}$ allora $f \pitchfork A$ se e solo se x_0 è un *valore regolare* di f, cioè per ogni $y \in f^{-1}(x_0)$, $D_y f$ è surgettivo. Altrimenti diciamo che x_0 è un *valore critico* ed ogni $y \in f^{-1}(x_0)$ tale che $D_y f$ non è surgettivo è detto un *punto critico* di f.

Ricordiamo che se Y è una sottovarietà di X la sua *codimensione* è $\mathrm{codim}(Y) = \dim X - \dim Y$. Vale:

Proposizione 2.3. *(1) Se $f : M \to N$ è trasversa a $A \subset N$, allora $Y = f^{-1}(A)$ è una sottovarietà propria di $(M, \partial M)$ (dove ∂M può essere vuoto); inoltre* $\mathrm{codim}(Y) = \mathrm{codim}(A)$. *Se M, N, A sono orientate, allora anche Y eredita un'orientazione naturale.*
(2) Se M è compatta allora l'insieme delle applicazioni $f : M \to N$ trasverse ad A è un aperto denso in $\mathcal{E}(M, n)$.

Dim. (*Cenni*) Per semplicità riferiamoci al caso in cui il bordo di M è vuoto. (1) Essere una sottovarietà è una proprietà locale, quindi si può localizzare il discorso lavorando in oppurtune coordinate locali. Nel caso particolare in cui $A = \{x_0\}$, il risultato è conseguenza di quanto detto all'inizio a proposito del teorema della funzione implicita e suoi corollari. In generale, prendiamo $(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, \mathbb{R}^p \times \{0\})$ come modello locale di (N, A), e sia $\pi : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^p$ la proiezione sul primo fattore. Allora è facile dimostrare che per ogni $f : M \to \mathbb{R}^{p+q}$, $f \pitchfork \mathbb{R}^p \times \{0\}$ se e solo se $(\pi \circ f) \pitchfork \{0\}$ e ci siamo così ricondotti al caso particolare. La discussione riguardante le orientazioni estende in modo naturale e globalizza quanto già detto nel caso affine.

(2) Il fatto che l'insieme sia aperto è facile. Più laboriosa è la densità. Assumiamo nota la nozione di *sottoinsieme di misura nulla secondo Lebesgue* in $\mathbb{R}^n$; ricordando che questa proprietà è invariante per diffeomorfismi e che ogni unione numerabile di insiemi di misura nulla lo è, ne segue che la nozione si estende ai sottoinsiemi di ogni varietà. Vale allora il seguente risultato di natura analitica

Teorema 2.4. (Morse-Sard) *Per ogni applicazione liscia $f : M \to N$, ricordiamo che $x \in M$ è un punto critico di f se $D_x f$ non è surgettivo. Sia $C(f) \subset M$ l'insieme dei punti critici di f e $VC(f) = f(C(f)) \subset N$ l'insieme dei valori critici di f. Allora $VC(f)$ è di misura nulla in N.*

Si osserva che se $\dim M < \dim N$ allora tutti i punti di M sono critici e dunque si tratta di dimostrare che l'immagine di M in N è di misura nulla. Questo è il caso facile del teorema di M-S.

La dimostrazione del punto (2) si spezza in una parte semilocale e in una successiva globalizzazione (che impiega le tecniche rammentate prima, utilizzando il fatto che una intersezione finita di aperti densi è un aperto denso). Limitiamoci ad un cenno per il risultato semilocale. (N, A) si localizza come prima: $(\mathbb{R}^{p+q}, \mathbb{R}^p)$, ma adesso $\pi : \mathbb{R}^{p+q} \to \mathbb{R}^q$ denota la proiezione sul secondo fattore. Allora per ogni $x \in M$ tale che $f(x) \in \mathbb{R}^p$, $\mathbb{R}^{p+q} = \mathbb{R}^p + D_x f(T_x M)$ se e solo se x non è un punto critico di $\pi \circ f$. Applicando M-S a $\pi \circ f$, possiamo trovare una successione $y_n \to 0$ in $\mathbb{R}^{p+q}$ tale che per ogni n, $\pi(y_n)$ è un valore regolare di $\pi \circ f$. Allora le funzioni $g_n = f - y_n$ convergono a f in $\mathcal{E}(M, \mathbb{R}^{p+q})$ e sono trasverse a $\mathbb{R}^p$.

$\square$

Ci sono diverse varianti e generalizzazioni di questi risultati di trasversalità.

Applicazioni trasverse. La nozione di trasversalità tra sottovarietà può essere interpretare in termini di trasversalità tra le due applicazioni di inclusione. Questo si generalizza nel modo seguente. Siano $f : V \to N$, $g : W \to N$ due applicazioni. Consideriamo l'applicazione prodotto:

$$f \times g : V \times W \to N \times N \ .$$

Indichiamo con Δ_N la diagonale di $N \times N$. Diciamo che f e g sono trasverse ($f \pitchfork g$) se $f \times g \pitchfork \Delta_N$. Posto $Y = (f \times g)^{-1}(\Delta_N)$, $\mathrm{codim}_N(Y) := \dim N - \dim Y$ e ricordando che $\dim V + \dim W - \dim Y = N$, si osserva che

$$\mathrm{codim}_N(Y) = (\dim N - \dim V) + (\dim N - \dim W) := \mathrm{codim}_N(V) + \mathrm{codim}_N(W) \ .$$

In un contesto orientato, abbiamo

$$Y = (f \times g)^{-1}(\Delta_N) = (-1)^{\mathrm{codim}_N(V)\mathrm{codim}_N(W)}(g \times f)^{-1}(\Delta_N) = (-1)^{\mathrm{codim}_N(V)\mathrm{codim}_N(W)} Y \ .$$

Il seguente "Lemma chiave", pur essendo una conseguenza facile di quanto abbiamo visto, è cruciale in molte applicazioni della trasversalità. Consideriamo due applicazioni $f_0 : M_0 \to N$ e $f_1 : M_1 \to N$, dove M_1 e M_2 sono compatte e chiuse. Diciamo che esse sono *cobordanti* se esiste

$$F : W \to N$$

tale che:

- W è compatta, $\partial W = V_1 \sqcup V_2$.
- Esistono diffeomorfismi $g_j : M_j \to V_j$ tali che $F \circ g_j = f_j$, $j = 0, 1$.

Questa nozione di cobordismo estende quella già vista che corrisponde al caso particolare in cui N è un punto. Un caso particolare è l' *omotopia*, dove si richiede che $M_0 = M_1 = M$, $g_j = \mathrm{Id}$. In seguito, per semplicità faremo l'abuso (leggero) di confondere M_j e V_j, prendendo sempre $g_j = \mathrm{Id}$. Abbiamo allora:

Lemma 2.5. (Lemma chiave) *(1) Supponiamo che $f_0 : M_0 \to N$ e $f_1 : M_1 \to N$ siano entrambe trasverse ad $A \subset N$, e che siano cobordanti per mezzo di $F : W \to N$. Allora posto $Y_j = f_j^{-1}(A)$, $h_j = f_j | Y_j$, si ha che (Y_0, h_0) e (Y_1, h_1) sono cobordanti per mezzo di (V, ϕ) dove V è una sottovarietà propria di $(W, \partial W)$ e ϕ è la restrizione di un'applicazione definita su tutto W.*

(2) Se $f : M \to N$ è una qualsiasi applicazione (non necessariamente trasversa ad A) allora esiste un intorno di f in $\mathcal{E}(M,N)$ formato da applicazioni omotope ad f. In particolare tutte le applicazioni $g \pitchfork A$ di questo intorno sono tra loro omotope e quindi cobordanti.

Dim. (1) Si può approssimare F con una ϕ che sia trasversa ad A e che coincida con $f_0 \cup f_1$ su ∂W. Allora $V = \phi^{-1}(A)$. (2) La cosa risulterà ancora più semplice usando la tecnologia degli intorni tubolari che vedremo tra poco.

□

La nozione di cobordismo tra mappe e il Lemma precedente può essere raffinato nel contesto delle varietà orientate.

Vediamo un paio di esempi di applicazione della trasversalità e del "Lemma chiave".

(1) Vale il seguente fatto:

Sia $(M, \partial M)$ una varietà compatta con bordo non vuoto. Allora non esiste una retrazione di $r : M \to \partial M$.

Infatti, supponiamo per assurdo che esista. La restrizione $r|\partial M = \mathrm{Id}$ è trasversa a qualsiasi punto $x_0 \in \partial M$. Per il Lemma chiave, esiste una 1-sottovarietà propria di $(M, \partial M)$ che connette x_0 con un altro punto x_1 di di ∂M, $r(x_0) = r(x_1)$ che è assurdo.

□

(2) **(Grado)** Sia $f_0 : M_0 \to N$ un'applicazione tra varietà compatte e chiuse della stessa dimensione. Sia $y \in N$ un valore regolare per f_0. Allora $Y = f_0^{-1}(y)$ è un insieme finito di punti in M_0 (orientati nel contesto delle varietà orientate). Dunque possiamo associare ad ogni $x \in Y$ un coefficiente i_x uguale ad $1 \in \mathbb{Z}/2$ oppure a $\pm 1 \in \mathbb{Z}$ nel caso orientato. Diciamo allora che la somma $\displaystyle\sum_{x \in Y} i_x$ è il grado mod(2), $\deg_2(f_0, y) \in \mathbb{Z}/2$, oppure il grado $\deg(f_0, y) \in \mathbb{Z}$ di f_0 rispetto al valore regolare y. Se $f_1 : M_1 \to N$ è cobordante ad f_0 e y è un valore regolare anche per f_1, segue immediatamente dal Lemma chiave che

$$\deg_*(f_0, y) = \deg_*(f_1, y) \ .$$

Se N è connessa allora il grado di f

$$\deg_*(f_0) := \deg_*(f_0, y)$$

è ben definito, cioè non dipende dalla scelta del valore regolare. Infatti sia γ un arco semplice in N che connette due valori regolari y e y' di f_0. L'omotopia tautologica tra f_0 e f_0,

$$F : M_0 \times I \to N, \ F(x,t) = f_0(x)$$

può essere leggermente perturbata in una $\tilde{F}$ che sia trasversa a γ e coincida con F vicino al bordo. Allora $\tilde{F}^{-1}(\gamma)$ realizza un cobordismo tra Y e Y' e il risultato segue.

□

(3) **(Numero di intersezione)** Sia $f : M \to N$, $A \subset N$, $f \pitchfork A$ (tutte varietà compatte e chiuse). Supponiamo $\dim N = \dim M + \dim A$. Allora $Y = f^{-1}(A)$ è un insieme finito di punti (orientati nel contesto delle varietà orientate). Dunque possiamo associare ad ogni $y \in Y$ un coefficiente i_y uguale ad $1 \in \mathbb{Z}/2$ oppure a $\pm 1 \in \mathbb{Z}$ nel caso orientato. Poniamo allora

$$f \cdot A = \sum_{y \in Y} i_y$$

detto il *numero di intersezione* tra f ed A in N. Segue dal Lemma chiave che questo numero è un invariante di $f \pitchfork A$ a meno di cobordismo. Usando il punto (2) del Lemma chiave, ogni f (arbitraria) può essere approssimata da applicazioni trasverse ad A nella stessa classe di omotopia. Quindi la definizione di $f \cdot A$ può essere estesa ad applicazioni arbitrarie. Nel caso particolare in cui M è una sottovarietà di N,

$$M \cdot A = j_M \cdot A$$

e nel contesto orientato si ha

$$M \cdot A = (-1)^{\mathrm{codim}(M)\mathrm{codim}(A)} A \cdot M \ .$$

In particolare è ben definito il *numero di autointersezione*

$$M \cdot M \ .$$

Usando la trasversalità tra applicazioni possiamo definire (riprendendo le notazioni usate prima, e nelle opportune ipotesi sulle dimensioni):

$$f \cdot g = (f \times g) \cdot \Delta_N \ .$$

(4) **(Numero di Eulero)** Sia M compatta e chiusa e consideriamo la sua inclusione in $T(M)$ come *sezione nulla* s_0. Possiamo allora considerare il numero di autointersezione $e(M) = M \cdot M$ di M in $T(M)$, detto *numero di Eulero* di M (che, al solito, a seconda dei casi sarà in $\mathbb{Z}/2$ o $\mathbb{Z}$). Possiamo raffinare un po' l'immagine e la definizione, osservando che $e(M)$ può essere realizzato per mezzo dell'intersezione di M con una *sezione trasversa* di $T(M)$. Infatti se perturbiamo poco s_0 in $\mathcal{E}(M, T(M))$ con un'applicazione $h : M \to T(M)$, $s_0 \pitchfork h$, poiché i diffeomorfismi formano un aperto si ha che $\pi \circ h$ è un diffeomorfismo (dove $\pi : T(M) \to M$ è la proiezione del fibrato tangente). Allora $s_1 = h \circ (\pi \circ h)^{-1}$ è una sezione vicina e trasversa a s_0. La sezione s_1 è in effetti un *campo di vettori tangenti* su M con un numero finito di zeri non degeneri (in corrispondenza con con i punti di intersezione con s_0) di indice $i_x = \pm 1$. Si può dimostare che questo numero di Eulero $e(M)$ coincide con la caratteristica di Eulero (eventualmente ridotta mod (2)). Vedremo in seguito un argomento.

Con la stessa procedura il numero di Eulero può essere definito per ogni fibrato vettoriale su M di rango uguale alla dimensione di M.

(5) **(Teorema facile di Whitney)**

Ogni n-varietà compatta M ammette un embedding in $\mathbb{R}^{2n+1}$ e un'immersione in $\mathbb{R}^{2n}$.

Sappiamo già che $M \subset \mathbb{R}^s$, dove s è grande. Dimostriamo che se $s > 2n+1$ e $v \in S^{s-1}$ unitario è "generico", allora la proiezione sul primo fattore associata alla decomposizione in somma diretta

$$\mathbb{R}^s = \mathbb{R}^{s-1} \oplus \mathrm{Span}(v)$$

realizza un embedding di M. Infatti per garantire che sia iniettiva su M, v non deve stare nell'immagine dell'applicazione

$$M \times M \setminus \Delta \to S^{s-1}, \ (x, y) \to \frac{x - y}{\|x - y\|} \ .$$

Per garantire che la proiezione definisca un'immersione di M, basta che per ogni x in M , per ogni vettore unitario z in $T_x(M) \subset \mathbb{R}^s$, sia $v \neq z$. Si osserva che al variare di x l'insieme di tali z forma una varietà compatta T_1M contenuta in $M \times S^{s-1}$ munita della naturale proiezione π sul secondo fattore. Dunque vogliamo che v non appartenga all'immagine della restrizione a T_1M di π. Osserviamo ora che $M \times M \setminus \Delta$ è un aperto di $M \times M$ ed è quindi una varietà di dimensione $2n < s - 1$; $\dim T_1M = 2n - 1 < s - 1$. Dunque segue dal caso facile di M-S che i v "buoni"sono generici.

□

Osservazioni 2.6. Il fatto di avere qualificato come "facile" il precedente risultato, allude al fatto che esiste una versione più forte meno facile. In effetti vale (sempre dovuto a Whitney):

Ogni n-varietà compatta M ammette un embedding in $\mathbb{R}^{2n}$ e un'immersione in $\mathbb{R}^{2n-1}$.

La dimostrazione non si basa soltanto su considerazioni di trasversalità ma su opportune tecniche di eliminazione delle singolarità tra cui il celebre "trucco di Whitney" che avrà un ruolo preminente in tutta la discussione.

(6) **(Applicazioni generiche)** Il teorema (facile) precedente può essere visto come un primo esempio di uso della trasversalità per individuare la natura delle applicazioni generiche, nel senso che mostra come gli embedding di M in R^{2n+1} formano un aperto denso di $\mathcal{E}(M, \mathbb{R}^{2n+1})$. Vediamo un altro esempio. Sia M compatta e chiusa. Una funzione $f : M \to \mathbb{R}$ è detta *funzione di Morse* se ha solo punti critici non degeneri (che sono isolati grazie al "Lemma di Morse", quindi in numero finito). Abbiamo

Le funzioni di Morse generiche (cioè con punti critici che assumo valori distinti) formano un aperto denso in $\mathcal{E}(M, \mathbb{R})$.

Diamo un'indicazione della dimostrazione. Ci limitiamo all'aspetto locale, la globalizzazione è via argomenti standard. Indichiamo con $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ lo spazio dei funzionali lineari. Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ un'applicazione liscia. Vogliamo mostrare che se $L \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ è generico, allora $f + L$ non ha punti critici degeneri. Poniamo

$$X = \{(x, L) \in \mathbb{R}^n \times \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) |\ D_x(f + L) = 0\} \ .$$

In altre parole X è il grafico dell'applicazione

$$\mathbb{R}^n \to \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}),\ x \to -D_x f$$

quindi è una sottovarietà di $\mathbb{R}^n \times \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Ogni punto $(x, L) \in X$ corrisponde ad un punto critico x di $f + L$ e questo è non degenere se

$$\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right) \neq 0 \ .$$

Consideriamo la proiezione π di X su $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. E' facile verificare che $f + L$ ammette un punto critico degenere se e solo se L non è un valore regolare di π. Dunque si conclude applicando M-S.

□

Osservazioni 2.7. Il numero di Eulero di M può essere calcolato per mezzo dei campi di vettori "pseudo-gradienti" di f. Tali campi hanno la proprietà di apparire come usuali campi gradiente nei modelli locali intorno ai punti critici di f dati dal Lemma di Morse, inoltre la funzione f è crescente lungo tutte le linee di campo lontane dai punti critici. Gli zeri di un tale campo coincidono allora con i punti critici di f. Sono non degeneri; se x è un punto critico non degenere di f di indice λ, allora x è uno zero di indice -1^λ. Si osserva che $-f$ ed f hanno gli stessi punti critici; un punto critico ha indice λ per f se e solo se ha indice $n - \lambda$ per $-f$. Ne segue per esempio che se n è dispari, allora $e(M) = 0$. L'analogo risultato per la caratteristica di Eulero è una conseguenza della dualità di Poincaré.

Per trattare altri casi di applicazioni generiche, è necessario sviluppare una teoria un po' più sofisticata della trasversalià detta *trasversalità per i jet.* Non intendiamo entrare nel merito. Ne useremo però diverse applicazioni (che dichiareremo appunto essere applicazione della trasversalità). Un esempio tipico (e facile) di questo tipo di cose:

Data una 2*-varietà (senza bordo)* S*, le immersioni di* S^1 *in* S *"ad incroci normali semplici" formano un aperto denso di* $\mathcal{E}(S^1, S)$.

2.6. **Grassmanniane.** Per ogni $s \geq n$, indichiamo con $G_{s,n}$ l'insieme dei sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^s$ di dimensione n. $G_{s,n}$ ha una struttura naturale di varietà liscia compatta chiusa di dimensione $n(s-n)$. Il caso particolare $n = 1$ è noto e consiste degli spazi proiettivi reali $\mathbf{P}^{s-1}$. Il sottoinsieme $V_{s,n}$ di $(\mathbb{R}^s)^n$ formato da vettori linearmente indipendenti è un aperto. Esiste un'applicazione surgettiva naturale $q : V_{s,n} \to G_{s,n}$ e $G_{s,n}$ è munito della topologia quoziente. Se $V^0_{s,n}$ denota il sottospazio compatto di $V_{s,n}$ formato dalle n-uple di vettori unitari di $\mathbb{R}^s$ due a due ortogonali, allora $G_{s,n} = q(V^0_{s,n})$ e quindi è a sua volta compatto. Un atlante che rende $G_{s,n}$ una varietà si descrive nel modo seguente. Per ogni $X_0 \in G_{s,n}$ si considera la decomposizione in somma diretta ortogolale dello spazio euclideo $\mathbb{R}^s = X_0 \perp X_0^\perp$. Poniamo allora $U = \{Y \in G_{s,n} |\ Y \cap X_0^\perp = \{0\}\}$. U è un intorno aperto di X_0

in $G_{s,n}$ e ogni $Y \in U$ è il grafico di una applicazione lineare $L_Y : X_0 \to X_0^\perp$ e questo definisce un omeomorfismo (per dimostrarlo si usa l'ortogonalizzazione di Gram-Schmidt)

$$\phi_{X_0} : U \in \mathrm{Hom}(X_0, X_0^\perp) \simeq \mathbb{R}^{n(s-n)} \ .$$

La varietà Grassmanniana $G_{s,n}$ si realizza come sottovarietà della varietà delle matrici $s \times s$, $M(s,\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$:

$$G_{s,n} \simeq \{A \in M(s,\mathbb{R}) |\ A = A^t,\ A^2 = A,\ \mathrm{traccia}(A) = n\} \ .$$

Si può anche identificare $G_{s,n}$ con lo spazio omogeneo $O(s)/O(n) \times O(s-n)$.
La sottovarietà di $G_{s,n} \times \mathbb{R}^s$

$$\Gamma_{s,n} = \{(p,x) \in G_{s,n} \times \mathbb{R}^s |\ x \in p\}$$

è lo spazio totale del *fibrato vettoriale tautologico* di rango n su $G_{s,n}$:

$$\gamma : \Gamma_{s,n} \to G_{s,n}, \gamma(p,x) = p \ .$$

Un atlante fibrato per questo fibrato si ottiene estendendo l'atlante di $G_{s,n}$ costruito prima nel modo seguente:

$$h_{X_0} : U \times X_0 \to \tau^{-1}(U),\ (Y,x) \to (Y,y)$$

dove $y \in Y$ è l'unico elemento la cui proiezione ortogonale su X_0 è uguale a x. I cambiamenti di carta fibrati sono tali che le identificazioni lineari tra le fibre sono dati da elementi del gruppo ortogonale $O(n,\mathbb{R})$.
Se M è una sottovarietà n-dimensionale di $\mathbb{R}^s$, allora la famiglia degli spazi tangenti T_xM determina un'applicazione

$$\tau : M \to G_{s,n}$$

e il fibrato tangente $T(M)$ è isomorfo al "pull-back" del fibrato tautologico:

$$T(M) = \tau^*(\Gamma_{s,n}) = \{(x,v) \in M \times \Gamma_{s,n} |\ \tau(x) = \gamma(v)\},\ \pi(x,v) = x \ .$$

Restringendo ad ogni $T_xM \subset \mathbb{R}^s$ il prodotto scalare euclideo standard di $\mathbb{R}^s$ si ottiene una metrica Riemanniana su M. Questa è compatibile con le identificazione delle fibre del fibrato tautologico che, come abbiamo detto, vengono identificate per mezzo di elementi del gruppo ortogonale. Questo mostra in particolare l'esistenza di metriche Riemanniane su ogni M (almeno se compatta). Un campo pseudogradiente per una funzione di Morse è in effetti un campo gradiente per qualche metrica Riemanniana.
Data un'applicazione qualsiasi $\alpha : M \to G_{m,k}$, via il pull-back si costruisce un fibrato vettoriale di rango k su M:

$$p_\alpha : \alpha^*(\Gamma_{m,k}) \to M \ .$$

Se $m' \geq m$ esiste un'applicazione naturale di inclusione

$$j_{m,m'} : \Gamma_{m,k} \to \Gamma_{m',k}$$

tale che α e $j_{m,m'} \circ \alpha$ determinano lo stesso fibrato su M. Si può dimostrare che i fibrati $\alpha^*(\Gamma_{m,k})$ e $\beta^*(\Gamma_{m',k})$ sono isomorfi se e solo se esiste $m" \geq \max\{m,m'\}$ tale che le applicazioni $j_{m,m"} \circ \alpha$ e $j_{m',m"} \circ \beta$ sono omotope.

2.7. **Intorni tubolari.** Data M compatta e chiusa in qualche $\mathbb{R}^s$ consideriamo su M un campo di $(s-n)$-piani trasversi, cioè una applicazione

$$\nu : M \to G_{s,s-n}$$

tale che per ogni $x \in M$, $\mathbb{R}^s = T_xM \oplus \nu(x)$. Per esempio possiamo prendere $\nu(x) = (T_xM)^\perp$. Abbiamo allora l'applicazione

$$h : \nu^*(\Gamma_{s,s-n}) \to \mathbb{R}^s,\ h(m,v) = m + v \ .$$

Quindi se $s_0 : M \to \nu^*(\Gamma_{s,s-n})$ è la sezione nulla, $h \circ s_0 = \mathrm{Id}_M$; $h \pitchfork M$. Dunque esiste un $\epsilon > 0$ tale che h realizza un diffeomorfismo dell'intorno

$$U_\epsilon(M) = \{(x,v) \in \nu^*(\Gamma_{s,s-n}) |\ \|v\| \leq \epsilon\}$$

su un intorno $U(M, \mathbb{R}^s)$ di M in $\mathbb{R}^s$ munito della retrazione

$$r : U(M, \mathbb{R}^s) \to M, \ r(y) = p_\nu(h^{-1}(y)) \ .$$

Un tale oggetto $(U(M, \mathbb{R}^s), r)$ costruito in questo modo è detto un *intorno tubolare (chiuso)* di M in $\mathbb{R}^s$, la sua parte interna è detta un intorno tubolare aperto. Il seguente Lemma di approssimazione mostra che a meno di omotopia non è restrittivo considerare solo applicazioni lisce tra varietà (compatte) dimeticando quelle soltanto continue.

Lemma 2.8. *Sia $f : M \to N$ un' applicazione continua tra varietà lisce compatte chiuse. Allora f è omotopa (e arbitrariamente vicina nel senso della convergenza uniforme sui compatti) ad un'applicazione liscia g.*

Dim. Possiamo supporre che M e N siano sottovarietà di $\mathbb{R}^s$ con s sufficientemente grande. Fissiamo rispettivi intorni tubolari aperti $(U(M), r_M)$ e $U(N), r_N)$. Sia $K \subset U(M)$ un intorno compatto di M. L'applicazione continua $r_M \circ f$ estende f su tutto $U(M)$. Approssimiamo $r_M \circ f$ uniformemente su K mediante un'applicazione polinomiale p (Stone-Weirstrass), così vicina che $p(K) \subset U(N)$. Allora $r_N \circ p|M$ è liscia, approssima ed è omotopa ad f.

□

Con piccole modifiche non sostanziali, la costruzione degli intorni tubolari si può estendere a $(U(M, N), r)$ dove M è una sottovarietà (compatta chiusa) di N, e ci sono versioni relative al bordo per sottovarietà proprie $(M, \partial M) \subset (N, \partial N)$.

2.8. **Isotopia.** Sia M una n-varietà. Una *diffeotopia* di M è un'applicazione $M \times I \to M$ tale che per ogni $t \in I$, $F_t : M \times \{t\} \to M$ è un diffeomorfismo, e $F_0 = \text{Id}$. Due applicazioni $f_0, f_1 : Y \to M$ sono dette *isotope* se esiste una diffeotopia F di M tale che per ogni $x \in Y$, $F(f_0(x), 1) = f_1(x)$ (quindi il cammino di applicazioni lisce $f_t(x) = F(f_0(x), t)$ connette f_0 con f_1).
Valgono i seguenti importanti teoremi di *unicità a meno di isotopia*.

Proposizione 2.9. *(1)* **(Unicità dei dischi)**

- *Sia M una n-varietà compatta chiusa e connessa non orientabile. Siano $f_j : B^n \to M$, $j = 0, 1$, due embedding della n-palla chiusa unitaria in M. Allora essi sono isotopi.*
- *Sia M una n-varietà compatta chiusa, connessa orientata. Siano $f_j : B^n \to M$, $j = 0, 1$, due embedding in M della n-palla chiusa unitaria orientata che preservano le orientazioni. Allora essi sono isotopi.*

(2) **(Unicità degli intorni tubolari e dei collari)** *Gli intorni tubolari $(U(M, N), r)$ sono isotopi mediante isotopie $(U_t(M, N), r_t)$ che si restringono all'identità di M in ogni istante. Il fatto analogo vale per i collari di ∂M in M.*

□

2.9. **Incollamenti.** Si possono costruire nuove varietà lisce (ben definite a meno di diffeomorfismi, eventualmente orientati) incollando varietà già note. Vediamo alcuni esempi.

- **(Incollamento lungo componenti di bordo)** Siano M N due varietà compatte con bordo, siano V e W due unioni di componenti connesse dei rispettivi bordi. Sia $f : V \to W$ un diffeomorfismo. Possiamo considerare allora lo spazio topologico quoziente

  $$M \sqcup N/f$$

  ottenuto identificando i punti di V e W mediante f. Esiste un'inclusione naturale di $(M \setminus V) \sqcup (N \setminus W)$ in $M \sqcup N/f$.

  Allora è possibile munire $M \sqcup N/f$ di una struttura di varietà compatta con bordo (eventualmente vuoto) uguale a

  $$(\partial M \sqcup \partial N) \setminus (V \cup W)$$

  tale che $M \setminus V$ e $N \setminus W$ siano sottovarietà. Un atlante si ottiene unendo l' atlante di $M \setminus V$ e $N \setminus W$ con una "carta" intorno a $V \simeq W$ ottenuta incollando per mezzo di f due collari aperti di V in M e W in N rispettivamente. Questa struttura è *unica a meno di diffeomorfismi* grazie all'unicità dei collari e degli intorni tubolari. Si dimostra anche che (sempre a meno di diffeomorfismi) *la varietà $M \sqcup N/f$ dipende solo dalla classe di isotopia dell'applicazione di incollamento f.*

- **(Incollamento di manici)** Indichiamo con D^n il disco unitario chiuso di $\mathbb{R}^n$.
$$H_k := D^k \times D^{n-k}$$
è il k-manico standard di dimensione n. In molti casi diremo soltanto "k-manico", sottointendendo la dimensione; k è detto l'*indice* del manico. Chiaramente esso è omeomorfo a D^n. Il bordo del manico è dato dall'unione
$$\partial D^k \times D^{n-k} \cup D^k \times \partial D^{n-k} = T_a \cup T_b$$
il primo è detto *a-tubo* del manico, il secondo *b-tubo*. La sfera
$$S_a^{k-1} = \partial D^k \times \{0\}$$
è detta la *a-sfera*, analogamente definiamo la *b-sfera* S_b^{n-k-1}. $D^k \times \{0\}$ è il *cuore* del manico. $\{0\} \times D^{n-k}$ è il *co-cuore*. Sia M una n-varietà con bordo non vuoto ∂M. Sia $f : T_a \to \partial M$ un embedding. Si noti che questo equivale a fissare un embedding di S_a^{k-1} e munire il suo intorno tubolare in ∂M di una *banalizzazione* che lo identifica con $S_a^{k-1} \times D^{n-k}$. Consideriamo allora lo spazio topologico quoziente $M \sqcup H_k/f$, che contiene naturalmente $M \setminus f(T_a)$ e $H_k \setminus T_a$. E' possibile munire questo spazio di una struttura di n-varietà con bordo uguale a
$$(\partial M \setminus \text{Int } f(T_a)) \sqcup (\partial H_k \setminus \text{Int } T_a)/(f|\partial T_a)$$
compatibile con la struttura di $M \setminus f(T_a)$ e $H_k \setminus T_a$. Questo include una cosiddetta procedura di "allisciamento degli angoli". Questa struttura di varietà su $M \sqcup H_k/f$ è unica a meno di diffeomorfismi e dipende sono dalla classe di isotopia dell'applicazione di attaccamento f. Si dice allora che la varietà $(M \sqcup H_k/f, \partial(M \sqcup H_k/f))$ *è ottenuta da* $(M, \partial M)$ *per mezzo di un incollamento di un k-manico.*

  Osserviamo che solo gli incollamenti di 1-manici possono modificare il numero di componenti connesse di $(M, \partial M)$ o trasformare M orientabile in una varietà non orientabile. Attaccamenti di manici di indice superiore preservano sia la connessione sia l'orientabilità. Se M è orientata, affinchè $M \sqcup H_k/f$ sia orientata in modo compatibile, occorre che le applicazioni di attaccamento invertano l'orientazione.
- **(Somma connessa)** Consideriamo due n-varietà compatte connesse e chiuse V e W. Consideriamo $M = V \times [-1, 1]$ e $N = W \times [-1, 1]$. Incolliamo un 1-manico H_1 a $M \sqcup N$ in modo tale che $f(\{-1\} \times D^{n-1}) \subset V \times \{-1\}$ e $f(\{1\} \times D^{n-1}) \subset W \times \{1\}$. Il bordo di $(M \sqcup N) \sqcup H_1/f$ è della forma $(V \times \{1\} \sqcup W \times \{-1\} \sqcup (V \# W)$ è l'ultima componente connessa è detta "una" *somma connessa* di V e W. Segue dalla definizione che ogni somma connessa $V \# W$ è cobordante a $V \sqcup W$ (nel contesto non orientato). Segue dall'unicità dei dischi che se almeno una tra V e W non è orientabile allora $V \# W$ è univocamente determinata a meno di diffeomorfismi. Nel contesto orientato è ugualmente univocamente determinata se l'attaccamento del manico rispetta le orientazioni (ed è cobordante in modo orientato con l'unione disgiunta). La sfera S^n è l'elemento neutro per la somma connessa.
- **(Sfere torte)** Una costruzione che è "parente" della somma connessa è la seguente: rimuoviamo da V e da W la parte interna di due dischi (embedded) creando rispettivamente V' e W', entrambe con una componente di bordo sferica; incolliamo poi mediante un diffeomorfismo $f : \partial V' \to \partial W'$. E' facile vedere che il risultato ottenuto è una somma connessa se e solo se il diffeomorfismo di incollamento tra i bordi sferici di estende ad un diffeomorfismo tra i due dischi. Si osservi che in TOP (e anche in PL) gli omeomorfismi (poliedrali) si estendono sempre a tutto il disco grazie una semplice costruzione di "cono". Questo non è il caso in DIFF. Per esempio se applichiamo la costruzione a due copie di S^n sicuramente otteniamo una varietà *omeomorfa* a S^n, ma non è detto che una tale "sfera torta" sia diffeomorfa a S^n. Si vede che un oggetto importante in questa discussione è il gruppo Γ_{n+1}, definito come il quoziente di $\text{Diff}^+(S^n)$ (il gruppo dei diffeomorfismi di S^n che preservano l'orientazione) modulo il sottogruppo G delle restrizioni a S^n di elementi di $\text{Diff}^+(D^{n+1})$. E' un esercizio

mostrare per esempio che $\Gamma_2 = 0$. E' non banale che anche Γ_3 e Γ_4 sono nulli. Si può mostrare che per $n \geq 5$ sono gruppi finiti e il primo non nullo è Γ_7. E' in fatti un celebre risultato di J. Milnor esistono 7-sfere torte "esotiche".

La nullità di Γ_{n+1} per $n \leq 3$ ci dice che in dimensione "bassa" le due costruzioni corrispondono a due modi equivalenti di descrivere la somma connessa, faremo uso di questo fatto.