OSSERVAZIONI SULL'UNICITÀ DELLA FORMA CANONICA DI JORDAN

R. BENEDETTI

L'esitenza e l'unicità della forma canonica di Jordan per gli endomorfismi triangolabili è stata discussa nella nota "La forma canonica di Jordan" a cui ci riferimemo come [J]. Qui vogliamo fare qualche osservazione complementare sulla sua unicità. Sappiamo da [J] che non è restrittivo trattare soltanto gli endomorfismi nilpotenti, e così faremo qui. Il teorema di esistenza e unicità della forma normale di Jordan si può enunciare come segue:

Teorema 0.1. *Sia W uno spazio vettoriale (su un arbitrario campo di scalari)* $\dim W = m$, *e sia* $g \in \mathrm{End}(W)$ *con polinomio caratteristico* $p_g(t) = t^m$. *Allora:*

- *(***Esistenza***) Esiste una decomposizione*
$$W = \oplus_{j=1}^{n} Z_j$$
e per ogni $j = 1, \dots n$, *una base* $\mathcal{B}_j$ *di* Z_j *tali che ogni* Z_j *è* g*-invariante e*
$$M_{\mathcal{B}_j}(g_{|Z_j}) = J(t_j, 0)$$
dove $t_j = \dim Z_j$, *e* $J(k, 0)$ *denota il blocco di Jordan* $k \times k$ *di autovalore* 0. *La base* $\mathcal{B}$ *di* W, *adattata a questa decomposizione in somma diretta, ottenuta unendo le basi* $\mathcal{B}_j$ *è detta* una base di Jordan per g; $M_{\mathcal{B}}(g)$ *è una matrice* $m \times m$ *diagonale a blocchi, con gli* n *blocchi* $J(t_j, 0)$ *lungo la diagonale, che viene detta* una forma normale di Jordan per g.
- *(***Unicità***) La forma normale di Jordan di* g *è unica a meno di permutazioni dei blocchi. Possiamo quindi convenire che* "la" forma normale di Jordan *di* g, $J(g)$ *sia l'unica forma di Jordan con le taglie dei blocchi lungo la diagonale non decrescenti.*
- *Due endomorfismi nilpotenti* g *e* h *di* W *sono tra loro coniugati (scriveremo* $g \sim h$*) se e solo se hanno la stessa forma normale di Jordan.*

Dunque la forma normale di Jordan è un invariante completo, cioè tale che $g \sim g'$ se e solo se $J(g) = J(g')$. Questo può anche essere codificato per mezzo della funzione così definita:
$$b_g : \{1, 2, \dots, m\} \to \mathbb{N}$$
dove $b_g(k)$ è il numero di blocchi $k \times k$ che compaiono in $J(g)$; si noti che può essere $b_g(k) = 0$ per qualche k. Questo invariante completo ha però il difetto di essere definito *a posteriori*, mentre è più interessante disporre di un altro invariante completo, direttamente calcolabile a partire da g, per mezzo del quale sia possibile determinare la forma normale e quindi la funzione b_g. Un tale invariante è prodotto dalla dimostrazione del teorema (vedi [J]) e può anch'esso essere organizzato sotto forma di una funzione
$$d_g : \{1, 2, \dots, m\} \to \mathbb{N}, \quad d_g(k) := \dim \mathrm{Ker}(g^k) \ .$$
In questa nota vogliamo discutere i seguenti problemi tra loro collegati

Problemi 0.1. (1) Essendo entrambi invarianti completi, *in linea di principio* le funzioni b_g e d_g devono essere reciprocamente ricavabili l'una dall'altra. Esplicitare questa affermazione.

(2) Caratterizzare completamente tutte le funzioni
$$b : \{1, 2, \dots, m\} \to \mathbb{N}, \quad d : \{1, 2, \dots, m\} \to \mathbb{N}$$
per cui esista g nilpotente su W, $\dim W = m$, tale che $d = d_g, b = b_g$. Tali funzioni saranno dette *realizzabili.*

.

La risposta alla seconda domanda per la funzione b è facile

Lemma 0.2. $b : \{1, 2, \dots, m\} \to \mathbb{N}$ *è realizzabile se e solo se verifica l'identità*
$$\sum_{k=1}^{m} b(k)k = m \ .$$

Conosciamo anche (vedi [J]) diverse condizioni *necessarie* affinché $d : \{1, 2, \dots, m\} \to \mathbb{N}$ sia realizzabile. Ricordiamone alcune nella seguente Proposizione.

Proposizione 0.3. *Se* $d : \{1, 2, \dots, m\} \to \mathbb{N}$ *è realizzabile allora soddisfa le seguenti proprietà:*

(1) $d(1) > 0$. *Infatti se* $d = d_g$, *allora* $d_g(1) = \dim \mathrm{Ker}(g) = \dim V_g(0)$, *cioè è la dimensione dell'autospazio di* g *relativo al suo unico autovalore* 0.
(2) *Esiste* $1 \le r \le m$ *tale che:*
   - *per ogni* $k < r$, $d(k) < d(k+1)$;
   - *per ogni* $k \ge r$, $d(k) = m$.

   Infatti se $d = d_g$, *allora* $r = r(g)$ *è il grado del polinomio minimo* $q_g(t) = t^r$.

Riguardo al primo problema, alcune relazioni tra b_g e d_g sono enunciate nel seguente Lemma (si veda ancora [J] per una dimostrazione).

Lemma 0.4. (1) *Posto* $\beta(g) = \sum_{k=1}^{m} b_g(k)$ *il* numero totale dei blocchi *di* $J(g)$, *allora si ha*
$$\beta(g) = d_g(1) \ .$$
(2) *Posto come sopra* $r = r(g)$, *allora* $b_g(r) > 0$ *e* $b_g(k) = 0$ *per ogni* $k > r$.

Vediamo già che le condizioni necessarie per la realizzabilità di d enunciate nella Proposizione 0.3 *non sono in generale sufficienti.* Ad esempio, c'è un'unica d realizzabile tale che $d(1) = 1$, cioè $d(k) = k$ per ogni k. L'unica funzione b corrispondente è $b(m) = 1$, $b(k) = 0$ per ogni $k < m$. Evidentemente questo corrisponde al caso in cui la forma normale di Jordan presenta un unico blocco $m \times m$, ed è la forma di Jordan degli endomorfismi per cui $p_g(t) = q_g(t) = t^m$, $r = m$. Ad esempio per $m = 4$, la funzione $d(1) = 1$, $d(2) = 3$, $d(3) = 4$, $d(4) = 4$, verifica le condizioni necessarie ma *non* è realizzabile.

Poichè il problema della realizzabilità è già stato risolto facilmente per le funzioni b (Lemma 0.2), conviene affrontare gli altri problemi seguendo il seguente schema:

(1) Indichiamo con $\mathbb{N}^m$ l'insieme di tutte le funzioni $b : \{1, 2, \dots, m\} \to \mathbb{N}$. Poniamo
$$\mathrm{Rel}_b(m) = \{b \in \mathbb{N}^m; \sum_{k=1}^{m} b(k)k = m\}$$
cioè il sottoinsieme di $\mathbb{N}^m$ formato dalle funzioni b realizzabili. Per ogni $b \in \mathrm{Rel}_b(m)$ esplicitare $d = \delta(b)$ (che in linea di principio deve essere unica) tale che entrambe le

funzioni siano realizzabili per mezzo di un endomorfismo nilpotente g: $b = b_g$, $d = d_g$. In questo modo avremmo definito esplitamente un'applicazione

$$\delta : \mathrm{Rel}_b(m) \to \mathbb{N}^m$$

tale che la sua immagine

$$\mathrm{Rel}_d(m) := \mathrm{Im}(\delta)$$

è proprio l'insieme delle funzioni d realizzabili.

(2) Descrivere nel modo più esplicito possibile $\mathrm{Rel}_d(m)$ come sottoinsieme di $\mathbb{N}^m$, e l'applicazione inversa $\delta^{-1} : \mathrm{Rel}_d(m) \to \mathrm{Rel}_b(m)$.

Cerchiamo di concretizzare questo programma. Sia b ammissibile. Sia r il massimo indice in $\{1, \dots, m\}$ tale che $b(r) > 0$. Sia $\beta = \sum_k b(k)$. Sappiamo già che nella $d = \delta(b)$ che cerchiamo deve valere $d(1) = \beta$, $d(k) = m$ per ogni $k \geq r$, $d(k) < d(k+1)$ per ogni $k < r$. Usiamo la notazione $D(A_1, \dots, A_s)$ per indicare una matrice diagonale a blocchi avente lungo la diagonale i blocchi quadrati (non necessariamente di Jordan) $A_1, \dots, A_s$. Allora la forma normale di Jordan $J(b)$ associata alla funzione b è della forma

$$J = J(b) = D(J_1, J_2, \dots, J_\beta)$$

quindi

$$J^k = D(J_1^k, \dots J_\beta^k) \ .$$

Ne segue che

$$d(k) = \dim \mathrm{Ker}(J^k) = m - \mathrm{rank}(J^k) = m - \sum_{j=1}^{\beta} \mathrm{rank}(J_j^k) \ .$$

D'altra parte, per ogni blocco di Jordan $J(h, 0)$ si ha che

$$\mathrm{rank}(J(h,0)^k) = \max\{h - k, 0\} \ .$$

L'insieme di queste osservazioni determina completamente e esplitamente la nostra funzione $d = \delta(b)$. Vediamola in azione in qualche esempio:

Esempi 0.5. (1) Consideriamo $m = 5$, $b = (0, 1, 1, 0, 0)$. Allora d è della forma $(2, d(2), 5, 5, 5)$ e resta da determinare $d(2)$. $J(b) = D(J(3,0), J(2,0))$, $d(2) = 5 - (3 - 2 + 2 - 2) = 4$, $d = (2, 4, 5, 5, 5)$. Si noti che l'unica altra scelta per $d(2)$ che verifica le condizioni necessarie (cioè $d(2) = 3$) produce $d' = (2, 3, 5, 5, 5)$ che *non* è realizzabile.

(2) Consideriamo $m = 6$, $b = (2, 0, 0, 1, 0, 0)$. Allora d è della forma $d = (3, d(2), d(3), 6, 6, 6)$. Poiché $3 < d(2) < d(3) < 6$ è immediato che in questo caso la d cercata sia $d = (3, 4, 5, 6, 6, 6)$. Comunque riotteniamo il risultato utilizzando il metodo generale: $J(b) = D(J(4,0), J(1,0), J(1,0))$; $d(2) = 6 - (4 - 2 + 0 + 0) = 4$; $d(3) = 6 - (4 - 3 + 0 + 0) = 5$.

Sappiamo quindi calcolare esplicitamente

$$\delta : \mathrm{Rel}_b(m) \to \mathrm{Rel}_d(m) \ .$$

Vediamo adesso come si comporta l'inversa

$$\delta^{-1} : \mathrm{Rel}_d(m) \to \mathrm{Rel}_b(m) \ .$$

Per ogni $1 \leq r \leq m$, poniamo

$$\mathcal{E}_d(r, m) = \{d \in \mathbb{N}^m;\ d(1) < d(2) < \cdots < d(r) = m = d(r+1) = \cdots = d(m)\}$$

$$\mathrm{Rel}_d(r, m) = \mathrm{Rel}_d(m) \cap \mathcal{E}_d(r, m)$$

$$\mathcal{E}_b(r, m) = \{b \in \mathbb{N}^m;\ b(r) > 0,\ b(r+1) = \cdots = b(m) = 0\}$$

$$\mathrm{Rel}_b(r, m) = \mathrm{Rel}_b(m) \cap \mathcal{E}_b(r, m) \ .$$

Sappiamo che gli insiemi $\mathrm{Rel}_d(r,m)$ e $\mathrm{Rel}_b(r,m)$ formano rispettivamente una partizione di $\mathrm{Rel}_d(m)$ e di $\mathrm{Rel}_d(m)$, inoltre

$$\delta(\mathrm{Rel}_b(r,m)) = \mathrm{Rel}_d(r,m)$$

quindi ci siamo ricondotti a studiare le restrizioni

$$\delta_r^{-1} : \mathrm{Rel}_d(r,m) \to \mathrm{Rel}_b(r,m)$$

al variare di r. In effetti la dimostrazione del teorema di esistenza e unicità in [J], ci dice esattamente chi è $b = \delta_r^{-1}(d)$:

(1) $b(k) = 0$ per $k > r$;
(2) $b(r) = d(r) - d(r-1) = m - d(r-1)$;
(3) $b(r-1) = d(r-1) - d(r-2) - b(r) = 2d(r-1) - (d(r) + d(r-2))$;
(4) Per ogni $1 < k < r$, $b(k) = d(k) - d(k-1) - b(k+1)$
(5) $b(1) = d(1) - \sum_{k=2}^{r} b(k)$

Si osserva che questa funzione si estende automaticamente ad una funzione

$$\rho_r : \mathcal{E}_d(r,m) \to \mathbb{Z}^m,\ \ \rho_r(d) = (\rho_r(d)_1, \ldots, \rho_r(d)_m)$$

basta usare le stesse formule in generale. Qui usiamo come insieme d'arrivo $\mathbb{Z}^m$ invece di $\mathbb{N}^m$ perchè nelle formule appaiono anche dei coefficienti *negativi.* Allora $\mathrm{Rel}_d(r,m)$ è determinato come il sottoinsieme di $\mathcal{E}_d(r,m)$ formato dalle funzioni d tali che $\rho_r(d)$ appartiene al sottoinsieme $\mathrm{Rel}_b(r,m)$. Quindi basta imporre che $\rho_r(d)$ sia una soluzione del sistema di disuguaglianze

$$b(k) = \rho_k(d) \geq 0,\ \ 1 \leq k \leq r-1$$

(condizioni di positività che sono evidentemente necessarie) e che verifichi in più l'identità

$$\sum_{k=1}^{r} \rho_r(d)_k k = m$$

che come sappiamo esprime la realizzabilità di b. Abbiamo così risolto tutti i problemi che ci eravamo posti.

Una domanda più sofisticata che potremmo porci adesso è quella, per ogni coppia (r,m), di estrarre dal sistema di disequazioni+equazione intere individuato qui sopra un sotto-sistema *minimale* che definisca $\mathrm{Rel}_d(r,m)$. Questo va però oltre gli scopi di queste pagine e lo lasciamo alla curiosità del lettore.