Prodotti scalare, 3

Gruppo ortogonale. Dato (V, Φ), definiamo $O(\Phi) =$

$$\{f \in GL(V);\ \forall (v, w), \Phi(v, w) = \Phi(f(v), f(w))\}$$

È un sottogruppo di $GL(V)$ detto il *gruppo ortogonale di* Φ.

Se $V = K^n$, $\Phi = \Phi_M$, allora

$$O(\Phi) = \{P \in GL(n, K);\ P^t M P = M\}.$$

In particolare, se $M = I$, allora si ottiene il gruppo ortogonale classico

$$O(n, K) = \{P^{-1} = P^t\}$$

Teorema di rappresentazione.

(V, Φ) come al solito. Per ogni $v \in V$, per ogni $w \in V$, poniamo $\phi_v(w) = \Phi(v, w) \in K$

Usando la bilinearità di Φ rispetto al secondo argomento, si verifica che ϕ_v è lineare, cioè ϕ_v appartiene allo spazio duale V^*. Possiamo quindi definire l'applicazione

$F_\Phi : V \to V^*$, $F_\Phi(v) := \phi_v$

Usando la bilinearità di Φ rispetto al primo argomento, si verifica che F_Φ è lineare.

Un funzionale $\phi \in \mathrm{Im}(F_\Phi) \subset V^*$ si dice *rappresentabile da un vettore* per mezzo di Φ. Per ogni ϕ rappresentabile, $F_\Phi^{-1}(\phi)$ è l'insieme dei vettori che lo rappresentano.

Proposizione R. *(1)* $\ker F_\Phi = \mathrm{Rad}(\Phi)$.

(2) $\mathrm{Im}(F_\Phi) = \mathrm{Ann}(\mathrm{Rad}(\Phi))$.

Corollario. Φ *è non degenere se e solo se* F_Φ *è un isomorfismo.*

Quindi se Φ è non degenere, ogni funzionale ϕ è rappresentato da un unico vettore v, $\phi = \phi_v$. Associato ad ogni Φ non degenere abbiamo l'isomorfismo naturale F_Φ tra V è il suo duale V^*.

Dim. $v \in \ker F_\Phi$ se e solo se per ogni $w \in V$, $\phi_v(w) = \Phi(v, w) = 0$. Per definizione, questo succede se e solo se v appartiene al radicale. Se $\phi = \phi_v$ è nell'immagine, allora per ogni z nel radicale, $\phi(z) = \Phi(v, z) = 0$, cioè ϕ appartiene all'annulatore del radicale. D'altra parte, l'immagine di F_Φ e l'annullatore del radicale hanno la stessa dimensione, quindi coincidono.

Da ora in poi, salvo avviso contrario, supponiamo che Φ sia non degenere, cioè che F_Φ sia un isomorfismo.

Se W è un sottospazio di V, si consideri il suo annulatore $\mathrm{Ann}(W) \subset V^*$. Allora

$\mathrm{Ann}(W) = F_\Phi(W^\perp)$.

Si osserva che, come deve essere, le varie formule delle dimensioni sono coerenti.

Sia $f \in \mathrm{End}(V)$. Allora è stato definito l' endomorfismo **trasposto**

$f^t \in \mathrm{End}(V^*)$, $f^t(\phi) = \phi \circ f$.

Usando l'isomorfismo di rappresentazione, poniamo $f^* := F_\Phi^{-1} \circ f^t \circ F_\Phi \in \mathrm{End}(V)$

f^* è detto l' **endomorfismo aggiunto** di f (rispetto a Φ). f^* è l'endomorfismo di V che "*rappresenta*" f^t per mezzo di F_Φ.

Esplicitando la definizione vediamo che

$$\phi_{f^*(v)} = \phi_v \circ f$$

per cui f^* verifica la seguente proprietà, che in effetti lo caratterizza:

Per ogni $(v, w) \in V \times V$, $\Phi(v, f(w)) = \Phi(f^*(v), w)$.

Esplicitiamo tutto in termini matriciali.

$V = K^n$, $\Phi = \Phi_M$, $M = M^t$, $\det M \neq 0$. Per ogni (X, Y), $\Phi(X, Y) = X^t M Y$

$f = f_A$, $f(X) = AX$, $f^* = f_{A^*}$.

Esplicitiamo A^* in funzione di M e A. Per ogni (X, Y), $X^t M(AY) = (A^* X)^t M Y$

$$X^t (MA) Y = X^t ((A^*)^t M) Y$$

$$A^t M^t = M^t A^*$$

$$A^* = (MAM^{-1})^t$$

$(A^*)^* = A$ (anche astrattamente $(f^*)^* = f$).

In particolare, se $M = I$, allora $A^* = A^t$.

Indichiamo con $Bil(V^* \times V)$ lo spazio delle forme bilineari $\psi : V^* \times V \to K$. Esiste un **isorfismo canonico**

$$\chi : \mathrm{End}(V) \to Bil(V^* \times V),\ \chi(f)(\phi, v) = \phi(f(v)).$$

È facile vedere che χ è lineare; siccome i due spazi hanno la stessa dimensione basta verificare che è iniettivo. Se f non è nullo, allora esiste v tale che $f(v) \neq 0$. Ma allora esiste ϕ tale che $\phi(f(v)) \neq 0$, cioè f non sta nel nucleo di χ, $\ker \chi = \{0\}$ come volevamo.

Usando l'isomorfismo di rappresentazione F_Φ, definiamo l'isomorfismo

$$\mathbf{b}_\Phi : Bil(V^* \times V) \to Bil(V \times V),$$

$$\mathbf{b}_\Phi(\psi)(v, w) = \psi(F_\Phi(v), w)$$

Quindi, abbiamo l'isomorfismo composto

$$\chi_\Phi : \mathrm{End}(V) \to Bil(V \times V),\ \chi_\Phi = \mathbf{b}_\Phi \circ \chi$$

$$\chi_\Phi(f)(v, w) = \Phi(v, f(w))$$

Diciamo che f è **autoaggiunto** (rispetto a Φ) se $f = f^*$.

Fatto: *f è autoaggiunto se e solo se $\chi_\Phi(f)$ è simmetrica, cioè è un prodotto scalare.*

"Rappresentando" l'isomorfismo canonico χ per mezzo di Φ abbiamo un isomorfismo naturale tra gli endomorfismi di V e le forme bilineari su $V \times V$ che identifica gli endomorfismi autoaggiunti con i prodotti scalare.

Esplicitiamo e verifichiamo in termini matriciali.

K^n, $(K^n)^* = M(1, n, K)$, $\Phi(X, Y) = X^t M Y$, $M = M^t$ invertibile, $f(X) = AX$.

Per ogni $(R, X) \in M(1, n, K) \times K^n$,

$\chi(f)(R, X) = RAX$

Per ogni $(Y, X) \in K^n \times K^n$,

$\chi_\Phi(f)(Y, X) = Y^t MAX$

$A^t M = MA$ se e solo se

$A^t = MAM^{-1}$ se e solo se

$A = (MAM^{-1})^t = A^*$

$GL(n,K)$ agisce su $\text{End}(K^n) = M(n,K)$ per coniugazione: $(P,A) \to P^{-1}AP$.

Agisce su $Bil(V \times V) = M(n,K)$ per congruenza: $(P,N) \to P^tNP$.

χ_Φ rispetta le due azioni di $GL(K^n)$.

$A \to P^{-1}AP$, $M \to P^tMP$,

$MA \to (P^tMP)(P^{-1}AP) = P^t(MA)P$

Teorema spettrale reale

Specializziamo la discussione generale precedente al caso in cui V è un $\mathbb{R}$-spazio e Φ è definito positivo.

Esistono allora basi **ortonormali** $\mathcal{B}$ cioè tali che $M_{\mathcal{B}}(\Phi) = I$. In un tale sistema di coordinate $\Phi \sim I$, $f \sim A$, $f^* \sim A^* = A^t$. $f = f^*$ se e solo se $A = A^t$.

Se $\mathcal{B}$ è ortonormale, allora $\mathcal{B}'$ è ortonormale se e solo se la matrice di cambiamento di base $P = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(id_V) \in O(n, \mathbb{R})$, cioè è una **matrice ortogonale**, $P^{-1} = P^t$.

Per ogni base ortonormale $\mathcal{B}$, $f \in O(\Phi)$ se e solo se $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) \in O(n, \mathbb{R})$. $f \to M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ definisce un isomorfismo tra il gruppo ortogonale astratto e quello matriciale classico.

Diciamo che un endomorfismo f di V è **ortogonalmente diagonalizzabile** se esiste una base ortonormale $\mathcal{B}$ fatta di autovettori di f, cioè $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ è diagonale.

In termini matriciali, A è ortogonalmente diagonalizzabile se esite $P \in O(n, \mathbb{R})$ tale che $P^{-1}AP = P^tAP = D$ è diagonale. Questo segue dal fatto che la base canonica è ortonormale per Φ_I, e P è la matrice di cambiamento di base dalla base canonica ad una base ortonormale che diagonalizza $f = f_A$.

Condizione **necessaria** *affinchè f sia ort. diag. è che $f = f^*$*

Condizione **necessaria** *affinché la matrice A sia ort. diag. è che $A = A^t$.*

Passando in un sistema di coordinate rispetto ad una base ortonormale, i due enunciati sono tra loro equivalenti. Se $A = PDP^{-1} = P^tDP$, $A^t = P^tDP = A$.

Possiamo enunciare il teorema spettrale

Teorema TSR. *Siano:* (V, Φ) *definito positivo,* f *un endomorfismo autoaggiunto di* V*,* (V, Ψ) *un altro prodotto scalare. I seguenti fatti sono tra loro equivalenti e veri.*

(1) f *è ortogonalmente diagonalizzabile.*

(3) Esiste una base $\mathcal{B}$ *di* V *che è simultaneamente ortonormale per* Φ *e ortogonale per* Ψ*.*

Diamo la versione matriciale del teorema.

Teorema TSRM. $V = \mathbb{R}^n$, $\Phi = \Phi_I$, f_A, $A = A^t$. $\Psi = \Psi_M$, $M = M^t$. *I seguenti fatti sono tra loro equivalenti e veri.*

(1) Esiste $P \in O(n, \mathbb{R})$, $P^{-1}AP$ *è diagonale.*

(2) Esiste $P \in O(n, \mathbb{R})$, P^tMP *è diagonale.*

La versione matriciale è un caso particolare del teorema astratto. Basta osservare come già fatto prima che la base canonica è ortonormale per Φ_I, la matrice P dell'enunciato è la matrice di cambiamento di base dalla canonica ad una base ortonormale per Φ_I che diagonalizza l'endomorfismo f_A oppure è ortogonale anche per Φ_M. I due enunciati matriciali sono tra loro equivalenti perchè, essendo P ortogonale, $P^{-1} = P^t$.

L'equivalenza tra i due enunciati del teorema astratto è equivalente all'equivalenza tra i due enunciati matriciali. Al solito, per vederlo passiamo in coordinate rispetto ad una base ortonormale.

Diamo comunque una dimostrazione senza usare le coordinate. Facciamo vedere, per esempio, che (1) $\Rightarrow$ (2). $\Psi = \chi_\Phi(f)$ per un unico f autoaggiunto. Se $\mathcal{B} = \{v_i\}$ è una base ortonormale per Φ che diagonalizza f, allora $\Psi(v_i, v_j) = \Phi(v_i, f(v_j)) = \lambda_j \Phi(v_i, v_j) = 0$. Quindi $\mathcal{B}$ è ortogonale per Ψ. Invertendo il verso dell'argomento si mostra anche l'altra implicazione.

Dobbiamo ora dimostrare che uno (e quindi tutti) degli enunciati è vero. Dimostriamo (1) di TSR.

Proposizione *Il polinomio caratteristico di f autoggiunto (di $A = A^t$ reale) è completamente fattorizzabile in $\mathbb{R}[t]$.*

Concludiamo la dimostrazione assumendo la proposizione, che sarà dimostrata alla fine.

Lavoriamo per induzione su $n = \dim V$. Per $n = 1$ non c'è niente da dimostrare. Sia $\dim V = n$. Grazie alla proposizione, esite almeno un autovettote $v \neq 0$ di f, $f(v) = \lambda v$. Poichè $\Phi > 0$, v è non isotropo. Consideriamo $V = W \oplus W^\perp$, dove $W = \mathrm{Span}(v)$. A maggior ragione, $\Phi|W^\perp > 0$. $W^\perp$ è f-invariante. Infatti, sia $w \in W^\perp$, usando $f = f^*$

$$\Phi(f(w), v) = \Phi(w, f(v)) = \lambda\Phi(w, v) = 0$$

Quindi $f(w) \in W^\perp$. A maggior ragione, $f|W^\perp$ è autoaggiunto per $\Phi|W^\perp$. Per ipotesi induttiva, esiste una base ortonormale $\mathcal{B}'$ di $W^\perp$ che diagonalizza $f|W^\perp$. A meno di dividere per la sua norma, possiamo supporre che $\Phi(v, v) = 1$. Infine $\mathcal{B} = \{v, \mathcal{B}'\}$ è una base ortonormale di V che diagonalizza f.

Resta da dimostrare la proposizione. Usiamo la *complessificazione*. Per semplicità, discutiamo la versione matriciale. $A = A^t$ reale simmetrica. $A_{\mathbb{C}} = A$. Complessifichiamo Φ_I, ponendo per ogni $(Z, W) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$,

$$\Phi_{\mathbb{C}}(Z, W) = Z^t I \bar{W} = Z^t \bar{W}.$$

$\Phi_{\mathbb{C}}$ non è propriamente un prodotto scalare, è piuttosto un esempio di *prodotto Hermitiano*. La differenza rispetto ad un prodotto scalare è che

$$\Phi_{\mathbb{C}}(Z, W) = \overline{\Phi_{\mathbb{C}}(W, Z)}$$

$$\Phi_{\mathbb{C}}(Z, \lambda W) = \bar{\lambda}\Phi(Z, W)$$

in particolare, $\Phi_{\mathbb{C}}(Z, Z) \in \mathbb{R}$, e nel caso specifico si vede che $Z^t \bar{Z} > 0$ se $Z \neq 0$.

Sia $A_C Z = AZ = \lambda Z \;\; Z \neq 0$, un autovalore e un autovettore complessi. Allora

$$Z^t(\overline{AZ}) = \bar{\lambda} Z^t \bar{Z}$$

$$Z^t(\overline{AZ}) = Z^t(A\bar{Z}) = (AZ)^t \bar{Z} = \lambda Z^t \bar{Z}.$$

Poich´e $Z^t \bar{Z} \neq 0$, si conclude che $\lambda = \bar{\lambda} \in \mathbb{R}$.

TSR è completamente dimostrato.

Sempre assumendo la proposizione, diamo un'altra dimostrazione, puramente matriciale.

Sia $A = A^t$ reale. Poiché il polinomio caratteristico di A è completamente fattorizzabile, A è triangolabile. Questo vuol dire che cè una base $\mathcal{B}$ con bandiera di sottospazi A-invariante. Applichiamo a $\mathcal{B}$ l' algoritmo di ortogonalizzazione di $\mathcal{B}$ rispetto a Φ_I, nella forma semplificata perché il prodotto scalare è definito > 0, quindi è anisotropo. Otteniamo così una base ortonormale $\mathcal{B}'$ con la stessa bandiera A-invariante. Se P è la matrice di cambiamento di base dalla base canonica (che è ortonormale) alla base $\mathcal{B}'$, allora P è ortogonale e

$$P^{-1}AP = P^tAP = T$$

è triangolare superiore. Poiché $A = A^t$, anche $T = T^t$ e quindi è diagonale.