Prodotti scalare, 1

Sia V un K-spazio vettoriale, $\dim V = n$. Un **prodotto scalare** su V è per definizione una applicazione **bilineare**

$\Phi : V \times V \to K$

e **simmetrica**, cioè, per ogni $(v, w) \in V \times V$, $\Phi(v, w) = \Phi(w, v)$.

Se $V = K^n$ allora ogni applicazione bilineare Φ è della forma

$$\Phi(X, Y) = X^t AY$$

la matrice $A = (a_{ij}) \in M(n, K)$ è univocamente determinata dalla condizione:

$a_{ij} = \Phi(e_i, e_j) = e_i^t A e_j$, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ è la base canonica di K^n. Φ è un prodotto scalare se e solo se $A = A^t$. Poniamo $\Phi = \Phi_A$.

Esempi: $V = \mathbb{R}^n$, il prodotto scalare Φ_I permette di esprimere in modo algebrico alcune nozioni di base della **geometria euclidea**.

$||X|| = \sqrt{X^t I X} = \sqrt{x_1^2 + \ldots x_n^2}$, detta anche la **norma** di X, esprime la distanza euclidea $d(X, 0)$ ('Teorema di Pitagora'). In generale $||X - Y|| = d(X, Y)$. Se X e Y sono non nulli, allora $X^t I Y = 0$ esprime il fatto che le rette generate da X e Y rispettivamente sono perpendicolari.

$V = \mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 1$, Φ_M definito dalla matrice diagonale con $m_{1,1} = \ldots m_{n,n} = 1$, $m_{n+1,n+1} = -1$. Φ_M individua tre tipi di vettore X (spazio, tempo, luce) a seconda del segno di $\Phi_M(X, X)$. Queste nozioni sono alla base di una modellizzazione della *relatività ristretta*.

Se (V, Φ) e (W, Ψ) sono K-spazi muniti di un prodotto scalare, una **isometria**

$f : (V, \Phi) \to (W, \Psi)$

è un **isomorfismo lineare** che inoltre preserva i prodotti scalare, cioè per ogni $(v_1, v_2) \in V \times V$, $\Phi(v_1, v_2) = \Psi(f(v_1), f(v_2))$. (V, Φ) e (W, Ψ) sono **isometrici** se sono correlati da una isometria.

‘Essere isometrici’ è una relazione di equivalenza. Affrontiamo il problema dello studio degli spazi muniti di prodotto scalare considerati a meno di isometria. La dimensione è un primo invariante, perché richiediamo in particolare che una isometria sia un isomorfismo lineare.

‘Alla ricerca di altri invarianti!’

Una variante del problema precedente è la seguente. Fissato uno spazio V, consideriamo tutti i prodotti scalare su V considerati a meno di isometria. Adesso una isometria è un endomorfismo invertibile $f \in GL(V)$ che inoltre preserva i prodotti scalare.

Se $f : V \to W$ è un isomorfismo lineare e Ψ è un prodotto scalare su W, possiamo determinare in modo **tautologico** un prodotto scalare Φ su V così che f diventi una isometria. Basta porre

$$\Phi(v_1, v_2) := \Psi(f(v_1), f(v_2)).$$

Questa osservazione ci dice che i due problemi sono sostanzialmente equivalenti tra loro. Considereremo piuttosto la versione con V fissato e Φ che varia.

Se $V = K^n$, siano Φ_B e Φ_A due prodotti scalare. Sono isometrici se e solo se esiste $P \in GL(n, K)$ tale che per ogni $(X, Y) \in K^n \times K^n$

$$(PX)^t B(PY) = X^t(P^t BP)Y = X^t AY$$

questo succede se e solo se $A = P^t BP$ (per verificarlo fare variare X e Y tra i vettori della base canonica e ricordare che per ogni matrice M, $e_i^t M e_j = m_{i,j}$) e diciamo che A è **congruente** con B.

'Essere congruenti' è una relazione di equivalenza sull'insieme $S(n,K)$ delle matrici simmetriche $n \times n$. Abbiamo visto che Φ_B e Φ_A sono isometrici se e solo se le matrici simmetriche A e B sono congruenti.

Osservazione. La relazione "*essere simili*" su $M(n,K)$ corrispondeva all'azione di $GL(n,K)$, $(A,P) \to P^{-1}AP$.

La relazione "*essere congruenti*" su $S(n,K)$ corrisponde ad un'altra azione di $GL(n,K)$, $(A,P) \to P^tAP$. La trasposta rimpiazza l'inversa.

Sia (V, Φ) come sopra, $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base di V, $[.]_{\mathcal{B}} : V \to K^n$ il corrispondente isomorfismo di passaggio alle coordinate. Sia $M = M_{\mathcal{B}}(\Phi)$ la matrice simmetrica tale che $m_{ij} = \Phi(v_i, v_j)$. Allora per ogni $(v, w) \in V \times V$,

$\Phi(v, w) = [v]^t_{\mathcal{B}} M [w]_{\mathcal{B}}$.

In altre parole Φ_M è il prodotto scalare su K^n tale che l'isomorfismo di passaggio alle coordinate $[.]_{\mathcal{B}}$ è in modo tautologico una isometria. $M = M_{\mathcal{B}}(\Phi)$ è la **matrice che rappresenta Φ rispetto alla base $\mathcal{B}$**.

Date due basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ di V, le matrici $M_{\mathcal{B}}(\Phi)$ e $M_{\mathcal{B}'}(\Phi)$ sono tra loro congruenti mediante la matrice di cambiamento di base $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_V)$.

Siano Φ e Ψ due prodotti scalare sullo spazio V. I seguenti fatti sono tra loro equivalenti.

(1) Φ e Ψ sono isometrici.

(2) Per ogni base $\mathcal{B}$ di V, le matrici $M_{\mathcal{B}}(\Phi)$ e $M_{\mathcal{B}}(\Psi)$ sono congruenti.

(3) Esite una base $\mathcal{B}$ di V tale che le matrici $M_{\mathcal{B}}(\Phi)$ e $M_{\mathcal{B}}(\Psi)$ sono congruenti.

(4) Esistono basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{D}$ di V tali che $M_{\mathcal{B}}(\Phi) = M_{\mathcal{D}}(\Psi)$.