# Forma normale di Jordan-Riassunto

Abbiamo individuato un sistema completo di invarianti che classificano gli endomorfismi **triangolabili** $f \in \mathrm{End}(V)$ considerati a meno di coniugazione con elementi di $GL(V)$:

$g \sim f$ se e solo se esiste $h \in GL(V)$ tale che $g = h \circ f \circ h^{-1}$

Il primo invariante è il polinomio caratteristico completamente fattorizzato in $K[t]$ (a meno di un segno) $p_f(t) = \prod_{j=1}^{s}(t - \lambda_j)^{m_j}$

Questo è equivalente a considerare lo spettro $\mathrm{Spec}(f) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_s\}$ e la molteplicità algebrica $m_j$ di ogni autovalore $\lambda_j$, così che $\dim V = \sum_{j=1}^{s} m_j$

Abbiamo la decomposizione primaria di $V$ associata alla fattorizzazione di $p_f(t)$:

$V = \oplus_{j=1}^{s} W_j$, $W_j = \mathrm{ker}(f - \lambda_j \mathrm{id})^{m_j}$

$\dim W_j = m_j$, $W_j$ è $f$-invariante

posto $g_j = f|W_j$, $p_{g_j}(t) = (t - \lambda_j)^{m_j}$

Altri invarianti:

il polinomio minimo fattorizzato

$q_f(t) = \prod_{j=1}^{s}(t - \lambda_j)^{r_j}$, $1 \le r_j \le m_j$

Questo è equivalente a considerare per ogni autovalore $\lambda_j$, il minimo esponente $r_j \ge 1$ tale che $\ker(g_j - \lambda_j \mathrm{id})^{r_j} = W_j$.

Per ogni $\lambda_j$, si considera la stringa strettamente crescente di dimensioni

$$D_j := d_{j,1} < d_{j,2} < \cdots < d_{j,r_j} = m_j$$

$$d_{j,i} = \dim \ker(g_j - \lambda_j \mathrm{id})^i$$

In particolare, $d_{j,1}$ è la dimensione dell'autospazio $V_{\lambda_j}(g_j) = V_{\lambda_j}(f)$.

Allora, il sistema completo di invarianti per un endomorfismo triangolabile $f$ è dato da:

$$\bar{J}(f) := \{\lambda_1, \dots \lambda_s, \;\; m_1, \dots m_s, \; D_1, \dots D_s\}$$

Dato $\bar{J}(f)$, è completamente determinata una **forma normale di Jordan** $J(f)$ per le rappresentazioni matriciali di $f$.

(i) Esiste una base di $V$ adattata alla decomposizione primaria $\oplus_j W_j$ tale che nella corrispondente matrice rappresentativa diagonale a blocchi, il blocco corrispondente all'addendo $W_j$ è a sua volta decomposto in blocchi di Jordan con autovalore $\lambda_j$ di taglia variabile.

(ii) Per ogni $W_j$, la taglia massima dei blocchi è $r_j \times r_j$; il numero totale dei blocchi è uguale a $d_{j,1}$. Per ogni $1 \leq l \leq r_j$, il numero di blocchi di taglia $l \times l$ può essere espresso in modo esplicito come una combinazione lineare con coefficienti in $\{0, \pm 1\}$ dei termini della stringa $D_j$.

La forma normale $J(f)$ è univocamente determinata a meno di permutazione degli addendi $W_j$ e, per ogni $j$, a meno di permutazione dei rispettivi blocchi di Jordan.

Se $K$ è algebricamente chiuso, allora tutti gli endomorfismi sono triangolabili. In questo caso abbiamo classificato completamente gli endomorfismi di $V$ considerati a meno di coniugazione con elementi di $GL(V)$.