

March 15, 2016

## IL FIBRATO TANGENTE

• **Il fibrato tangente di un aperto di  $\mathbb{R}^n$ .** Sia  $U \subset \mathbb{R}^n$  un aperto; consideriamo  $T(U) = U \times \mathbb{R}^n$ , dove mettiamo a fuoco su  $\mathbb{R}^n$  la sua struttura di spazio vettoriale. Allora una coppia  $(x, v) \in T(U)$  è formata da un punto  $x \in U$  e da un vettore  $v \in \mathbb{R}^n$ . Ricordando quanto visto sulla struttura canonica di spazio affine su  $\mathbb{R}^n$ , per ogni  $x \in U$ , la traslazione,  $v \rightarrow v + x$ ,  $0 \rightarrow x$  è bigettiva e permette di interpretare lo spazio vettoriale  $\mathbb{R}^n$  come lo spazio dei vettori tangenti a  $U$  “applicati” nel punto  $x$ . La proiezione

$$\pi_U : T(U) \rightarrow U, \pi_U(x, v) = x$$

è liscia e surgettiva; per ogni  $x \in U$ , la fibra

$$T_x U = \pi_U^{-1}(x) = \{x\} \times \mathbb{R}^n$$

è per definizione lo spazio vettoriale tangente a  $U$  in  $x$ ; quindi  $T(U) = \cup_x T_x U$  è l’unione delle fibre, ciascuna delle quali è identificata con una copia dello spazio vettoriale  $\mathbb{R}^n$ . La coppia  $(T(U), \pi_U)$  è il fibrato tangente di  $U$ ;  $U$  ne è lo spazio di base,  $T(U)$  lo spazio totale,  $\pi_U$  la proiezione (che spesso sarà sottintesa).

• Sia  $f : U \rightarrow W$  un’ applicazione liscia tra aperti di  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{R}^m$  rispettivamente. È definita allora l’applicazione tangente

$$Df : T(U) \rightarrow T(W), Df(x, v) = (f(x), d_x f(v))$$

questa è una applicazione liscia che “manda fibre in fibre in modo lineare”, cioè:  $f \circ \pi_U = \pi_W \circ Df$ , per ogni  $x \in U$ ,  $d_x f : T_x(U) \rightarrow T_{f(x)}W$  è un’applicazione lineare. Diremo che  $Df$  è un’ applicazione fibrata. Inoltre, se  $h = g \circ f$ , allora

$$Dh = Dg \circ Df, D_{id} = id$$

quindi se  $f$  è un diffeomorfismo, allora anche  $Df$  è un diffeomorfismo che inoltre manda fibre in fibre per mezzo di isomorfismi lineari; diremo che  $Df$  è un diffeomorfismo fibrato. In particolare se  $f : U' \rightarrow U$  è un’ inclusione tra aperti di  $\mathbb{R}^n$ , allora per ogni  $x \in U'$ ,  $d_x f = id$ . Se  $U \subset \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^m$ , allora per ogni  $x \in U$ ,  $T_x U = x \times \mathbb{R}^n \subset x \times \mathbb{R}^m = T_x \mathbb{R}^m$ .

- Consideriamo la situazione contemplata dalle conclusioni del teorema della funzione implicita, versione surgettiva:  $\psi : W \rightarrow U$ ,  $\psi(0) = 0$  parametrizzazione locale di  $U \subset \mathbb{R}^n$  intorno a  $0 \in U$ ;  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,  $f(0) = 0$ ,  $f \circ \psi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_k)$ . Sia  $M = f^{-1}(0)$ ; questa è una  $(n - k)$ -sottovarietà liscia di  $U$ ;  $(f \circ \psi)^{-1}(0) = \psi^{-1}(M) = \{x_1 = \dots = x_k = 0\} \cap W$  quindi è un aperto  $W'$  del sottospazio vettoriale  $\{x_1 = \dots = x_k = 0\} \sim \mathbb{R}^{n-k}$  di  $\mathbb{R}^n$ ; la restrizione di  $\psi$ ,  $\hat{\psi} : W' \rightarrow M$  è una parametrizzazione di  $M$ . Per ogni  $x \in W'$ , sia  $y = \hat{\psi}(x)$ . Allora

$$d_x \hat{\psi}(T_x W') = \ker d_y f \subset T_y U.$$

• **(Interpretazione differenziale di  $T_x U$ )** Per ogni  $x \in U$ , indichiamo con  $\mathcal{E}_x$  l’insieme dei germi di funzioni lisce in  $x$ . Precisamente,  $\mathcal{E}_x$  si ottiene come quoziente dell’insieme delle funzioni lisce definite su qualche intorno aperto  $U'$  di  $x$  in  $U$  a valori in  $\mathbb{R}$ , rispetto alla relazione di equivalenza:  $(U_1, f_1) \sim (U_2, f_2)$  se  $f_1 = f_2$  su qualche aperto  $0 \in U_3 \subset U_1 \cap U_2$ .  $\mathcal{E}_x$  è in modo naturale una  $\mathbb{R}$ -algebra, cioè un  $\mathbb{R}$ -spazio vettoriale, munito inoltre di un prodotto (commutativo) che verifica le usuali proprietà distributive rispetto alle operazioni della struttura vettoriale. Si noti che  $\mathcal{E}_x$  non dipende da  $U$ , nel senso che otteniamo lo stesso spazio partendo da qualsiasi aperto che contenga  $x$  (per esempio tutto  $\mathbb{R}^n$ ). Per semplificare le notazioni, supponiamo che  $x = 0$ . Sia  $v = \sum_j a^j e_j \in T_0 U$ , dove  $\{e_j\}$  è

la base canonica di  $\mathbb{R}^n$ . Definiamo allora

$$\delta_v : \mathcal{E}_0 \rightarrow \mathbb{R}, \delta_v[f] = \sum_j a^j \frac{\partial f}{\partial x_j}(0)$$

è ben definita (cioè non dipende dalla scelta del rappresentante  $f$  del germe in questione - in seguito confonderemo germi e rappresentanti) ed inoltre è una *derivazione* su  $\mathcal{E}_0$ , cioè:  $\delta_v$  è  $\mathbb{R}$ -lineare e verifica la “regola di Leibnitz”:

$$\delta_v(fg) = f(0)\delta_v(g) + \delta_v(f)g(0) .$$

Abbiamo quindi definito un’applicazione

$$\delta : T_0U \rightarrow \text{Der}(\mathcal{E}_0)$$

a valori nelle derivazioni su  $\mathcal{E}_0$ . *Tale applicazione è un isomorfismo di spazi vettoriali.* Infatti, a meno di restringerlo possiamo supporre che  $U$  sia convesso, quindi, abbiamo la usuale espressione:

$$f(x) - f(0) = \sum_j g_j(x)x_j$$

dove le  $g_j$  sono lisce e  $g_j(0) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(0)$ . Se  $\delta$  è una derivazione

$$\delta(f - f(0)) = \delta(f) = \sum_j \delta(x_j)g_j(0)$$

quindi ponendo  $a^j = \delta(x_j)$  determiniamo l’unico vettore  $v \in T_0U$  tale che  $\delta = \delta_v$ . Si vede chiaramente che avere posto  $x = 0$  non fa perdere di generalità. Se  $\phi : W \rightarrow U$ ,  $\phi(0) = 0$  è un diffeomorfismo, allora la composizione  $f \rightarrow f \circ \phi$  induce un isomorfismo  $\phi^* : \mathcal{E}_0 \rightarrow \mathcal{E}_0$  tale che per ogni  $v \in T_xW$ ,

$$\delta_v(f) = \delta_{d_0\phi(v)}(\phi^*(f)) .$$

•(**Globalizzazione**) Vogliamo estendere e globalizzare le definizioni e le proprietà del fibrato tangente e dell’applicazione tangente già viste nel caso degli aperti di spazi euclidei al caso di varietà lisce arbitrarie e di applicazioni lisce tra varietà. Nella situazione contemplata dal teorema della funzione implicita discusso sopra, vogliamo anche che risulti  $T(M) = D\hat{\psi}(T(W'))$ .

(*Costruzione di  $(T(M), \pi_M)$* ) Sia  $\{(U_j, \phi_j)\}_{j \in J}$  l’atlante differenziabile massimale di una data  $n$ -varietà  $M$ . Per ogni  $(i, j) \in J^2$  definiamo

$$\mu_{j,i} : U_i \cap U_j \rightarrow GL(n)$$

$$\mu_{j,i}(x) = d_{\phi_i(x)}\phi_j \circ \phi_i^{-1} .$$

Si noti che questi sono ottenuti usando le applicazioni tangenti dei cambiamenti di carta. La famiglia  $\{\mu_{j,i}\}$  verifica le seguenti proprietà:

- (1) Per ogni  $(i, j) \in J^2$ ,  $\mu_{j,i}$  è liscia;
- (2) Per ogni  $i \in J$ , per ogni  $x \in U_i$ ,  $\mu_{i,i}(x) = I$ ;
- (3) Per ogni  $(i, j) \in J^2$ , per ogni  $x \in U_i \cap U_j$ ,  $\mu_{j,i}(x) = \mu_{i,j}(x)^{-1} \in GL(n)$ ;
- (4) Per ogni  $(i, j, k) \in J^3$ , per ogni  $x \in U_i \cap U_j \cap U_k$ ,  $\mu_{i,k}(x)\mu_{k,j}(x)\mu_{j,i}(x) = I$ .

Riassumiamo queste proprietà dicendo che  $\{\mu_{i,j}\}$  è un *cociclo liscio definito sul ricoprimento aperto  $\{U_j\}$  a valori in  $GL(n)$* .

Consideriamo lo spazio topologico prodotto  $M \times \mathbb{R}^n \times J$  dove  $J$  è munito della topologia discreta. Consideriamo il sottospazio topologico  $\mathcal{T} = \{(x, v, j) \mid x \in U_j\}$ . Dunque  $\mathcal{T}$  è l’unione disgiunta degli aperti  $U_j \times \mathbb{R}^n \times \{j\}$ , ognuno di questi è canonicamente omeomorfo a  $U_j \times \mathbb{R}^n$ . Mettiamo su  $\mathcal{T}$  la relazione tale che  $(x, v, j) \sim (x', v', k)$  se e solo se  $x = x', v' = \mu_{k,j}(x)v$ . Le proprietà di cociclo assicurano che si tratta di una relazione di equivalenza. Consideriamo allora lo spazio topologico quoziente

$$T(M) = \mathcal{T} / \sim$$

con proiezione continua  $q : \mathcal{T} \rightarrow T(M)$ .  $T(M)$  è  $T_2$  e 2-numerabile. E’ ben definita la proiezione

$$\pi_M : T(M) \rightarrow M, \quad \pi_M([x, v, j]) = x$$

che è continua; infatti per ogni aperto  $A$  di  $M$ ,  $(\pi_M \circ q)^{-1}(A)$  è l’intersezione di  $\mathcal{T}$  con  $A \times \mathbb{R}^n \times J$ , quindi è un aperto.

(Banalizzazioni locali) Per ogni  $j \in J$ , poniamo

$$\Psi_j : U_j \times \mathbb{R}^n \rightarrow T(M), (x, v) \rightarrow q(x, v, j)$$

e si verifica che:

- (1)  $\Psi_j$  è continua (perchè  $q$  lo è);
- (2) Se  $\pi_M \circ q(x, v, j) = x$ , allora  $\pi_M \circ \Psi_j(x, v) = x$ , quindi  $\Psi_j$  è a valori in  $\pi_M^{-1}(U_j)$  e  $\pi_M \circ \Psi_j = p_j$ , dove  $p_j : U_j \times \mathbb{R}^n \rightarrow U_j$  è la proiezione sul primo fattore.
- (3)  $\Psi_j : U_j \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi_M^{-1}(U_j)$  è un omeomorfismo. Infatti se  $b = q(x, w, k) \in \pi_M^{-1}(U_j)$  allora  $b = \Psi_j(x, \mu_{j,k}(x)w)$ , quindi  $\Psi_j$  è surgettiva. Se  $(x, v, j) \sim (x', v', j)$ , allora  $x = x'$  e  $v = v'$  perchè  $\mu_{j,j}(x) = I$ . Ne segue che  $\Psi_j$  è iniettiva. Infine, basta dimostrare che se  $W$  è aperto in  $U_j \times \mathbb{R}^n$ , allora  $q^{-1}(\Psi_j(W))$  è aperto in  $\mathcal{T}$ . Poiché  $\{U_k \times \mathbb{R}^n \times \{k\}\}$  è un ricoprimento aperto di  $\mathcal{T}$ , basta dimostrare che ogni  $q^{-1}(\Psi_j(W)) \cap (U_k \times \mathbb{R}^n \times \{k\})$  è aperto. Tale intersezione è contenuta in  $(U_j \cap U_k) \times \mathbb{R}^n \times \{k\}$  che è a sua volta un aperto di  $\mathcal{T}$ . Su questo aperto  $q = \Psi_j \circ r$ , dove  $r(x, v, k) = (x, \mu_{j,k}(x)v)$  che è continua, quindi la tesi segue.

(Atlante fibrato di  $T(M)$ ) E' chiaro che  $T(X)$  è una  $2n$ -varietà topologica; in effetti è liscia e la proiezione  $\pi_M$  è liscia. Un atlante differenziabile è  $\{\pi_M^{-1}(U_j), \Phi_j\}_{j \in J}$  dove  $\Phi_j = (\phi_j, \text{id}) \circ \Psi_j^{-1}$ , dove

$$(\phi_j, \text{id}) : U_j \times \mathbb{R}^n \rightarrow W_j \times \mathbb{R}^n, (x, v) \rightarrow (\phi_j(x), v) .$$

I cambiamenti di carta sono della forma

$$\Phi_j \circ \Phi_i^{-1}(y, v) = (\phi_j \circ \phi_i^{-1}(y), \mu_{j,i}(x)v)$$

dove  $(y, v) = \Phi_i(x, v)$ . Sono applicazioni fibrate che mandano fibre in fibre per mezzo di isomorfismi lineari. Riassumiamo dicendo che  $\{\pi_M^{-1}(U_j), \Phi_j\}_{j \in J}$  è l'*atlante fibrato* di  $T(M)$ .

(Applicazione tangente) Sia  $f : M \rightarrow M'$  liscia. Definiamo  $Df : T(M) \rightarrow T(M')$  in modo tale che per ogni rappresentazione locale  $\tilde{f}$  di  $f$ , essa coincida localmente con  $D\tilde{f}$ . Precisamente, siano  $(\pi_M^{-1}(U_j), \Phi_j)$ ,  $(\pi_{M'}^{-1}(U'_k), \Phi'_k)$  carte fibrate di  $T(M)$  e  $T(M')$ , che dominano carte  $(U_j, \phi_j)$  e  $(U'_k, \phi'_k)$  di  $M$  e  $M'$  rispettivamente e che forniscono una rappresentazione locale  $\tilde{f} = \phi'_k \circ f \circ \phi_j^{-1}$  di  $f$ . Allora definiamo  $Df : \pi_M^{-1}(U_j) \rightarrow \pi_{M'}^{-1}(U'_k)$  mediante:  $Df = (\Phi'_k)^{-1} \circ D\tilde{f} \circ \Phi_j$ . Usando la relazione di equivalenza con cui abbiamo costruito il fibrato tangente, si verifica direttamente che al variare delle rappresentazioni locali di  $f$ , queste definizioni parziali di  $Df$  sono compatibili e sono restrizioni di  $Df : T(M) \rightarrow T(M')$  globalmente ben definita.  $Df$  manda fibre in fibre in modo lineare, cioè è una applicazione fibrata. Se  $f$  è un diffeomorfismo, allora  $Df$  manda fibre in fibre via isomorfismi lineari (è un diffeomorfismo fibrato).

- Se  $(M, \partial M)$  è una varietà con bordo e  $f : \partial M \rightarrow M$  è l'inclusione allora  $Df : T(\partial M) \rightarrow T(M)$  è iniettiva sulle fibre. Analogamente se  $f : N \rightarrow M$  è l'inclusione della sottovarietà  $N$  in  $M$ .