**Analisi I BM - 2014-15 - Esercizi, foglio 8.**

**Esercizio 1.** Sia $I$ un intervallo di $\mathbb{R}$. Dimostrare con tutti i dettagli che se $I$ è compatto per successioni allora è necessariamente chiuso e limitato, cioè $I = [\alpha, \beta]$.

**Esercizio 2.** (1) Siano $I = [\alpha, \beta]$ e $I' = [\alpha', \beta']$ due intervalli chiusi e limitati. Dimostrare che la loro unione $A = I \cup I'$ e la loro intersezione $B = I \cup I'$ sono sottoinsiemi compatti per successioni di $\mathbb{R}$.

(2) Supponiamo ora che $A$ sia l'unione di una successione di intervalli chiusi e limitati, cioè $A = \cup_{n \in \mathbb{N}}[\alpha_n, \beta_n]$. E' vero che $A$ è compatto per successioni? Stessa domanda per l'intersezione $B = \cap_{n \in \mathbb{N}}[\alpha_n, \beta_n]$.

**Esercizio 3.** Dimostrare che $D \subseteq \mathbb{R}$ è compatto per successioni se e solo se è un insieme chiuso e limitato.

**Esercizio 4.** Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definita da $f(x) = \max(\sin(x), 1/2)$. Dimostrare con tutti i dettagli che $f$ è continua.

**Esercizio 5.** (1) Discutere se la formula $f(x) = \log(\sin(x) - 2)$ definisce una funzione elementare continua.

(2) Determinare il più grande sottoinsieme $D$ di $\mathbb{R}$ tale che la formula $f(x) = \log(\sqrt{|x| - 1} - 1)$ definisce una funzione elementare definita su $D$. Determinare l'insieme $\mathrm{Int}(D)$ dei punti interni di $D$.

**Esercizio 6.** Dimostrare che la funzione $f(x) = x^2 \sin(\dfrac{1}{x})$ definita su $D = \{x \neq 0\}$ è continua. Dimostrare che $f$ si estende ad una funzione continua $F$ definita su tutto $\mathbb{R}$.

**Esercizio 7.** Consideriamo la funzione polimomiale $f(x) = x^6 - x - 1$ definita su $\mathbb{R}$. Dimostrare che $f$ ha almeno uno zero positivo e uno zero negativo.

**Esercizio 8.** Consideriamo la funzione polimomiale $f(x) = x^3 - x + 1$ definita su $\mathbb{R}$. Dimostrare che $f(x)$ ha un unico zero $x_0$ e dimostrare che $-2 < x^0 < -1$.

**Esercizio 9.** Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Supponiamo che $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = -\infty$. Dimostrare che $f$ è superiormente limitata ed esiste un punto di massimo assoluto $x_m \in \mathbb{R}$ per $f$, cioè per ogni $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq f(x_m)$.