Analisi I - IngBM - 2014-15
COMPITO A 17 Gennaio 2015

COGNOME .... NOME ....

MATRICOLA .... VALUTAZIONE ..... + ... = ...

1. Istruzioni

Gli esercizi devono essere svolti negli appositi spazi del presente fascicolo; **solo questo sarà ritirato e valutato.** *I fogli a quadretti messi a disposizione possono essere usati liberamente ma in nessun caso saranno ritirati. Il compito è composto di due parti. La prima parte deve essere svolta preliminarmente. Essa verrà corretta per prima e valutata con un punteggio di $0 \le x \le 10$ punti. Condizione necessaria affinché venga preso in considerazione l'eventuale svolgimento della seconda parte è che $x \ge 6$. In tal caso la seconda parte viene valutata con un punteggio di $0 \le y \le 24$ punti. Il compito sarà sufficiente per l'ammissione alla prova orale se $x + y \ge 18$. In tal caso il voto di ammissione all'orale sarà $v = \min(28, x + y)$.*

2. Prima parte

Esercizio 0. (0 punti) Leggere e capire le istruzioni.

Esercizio 1. (2,5 punti) Dire quale tra le frasi (1) (2) (3) (4) (5) è la negazione della frase

La funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *assume valori nell'intervallo aperto* $(-5, 7)$.

(1) Esiste un $x \in \mathbf{R}$ tale che $f(x) \le -5$ oppure $f(x) \ge 7$
(2) Per ogni $x \in \mathbf{R}$ $f(x) \le -5$ oppure $f(x) \ge 7$
(3) Per ogni $x \notin (-5, 7)$ f assume valori tra -5 e 7
(4) Esiste $x \in (-5, 7)$ tale che $f(x) \le -5$ o $f(x) \ge 7$
(5) f è periodica di un periodo T compreso tra 5 e 7

SOLUZIONE

$\boxed{\text{x}}$ 1 ☐2 ☐3

☐4 ☐5 ☐Nessuna di queste

Esercizio 2. (4 punti) Sia $f(x)$ una funzione polinomiale non costante e $h(x) := \max(0, e^x)$. Dire, giustificando la risposta, se esiste il limite

$$L = \lim_{x\to+\infty}\left(h(x) + \frac{f^2(x)}{f^2(x)+5}\right)$$

e in caso affermativo calcolarlo.

SOLUZIONE.

□Il limite L non esiste $\boxed{\text{x}}$ Il limite L esiste e vale $+\infty$.

perché

(a) la funzione $h(x) = \max(0, e^x) = e^x$ perché la funzione esponenziale è positiva.

(b) Poiché $f(x)$ è polinomiale e non costante allora $\lim\limits_{x\to+\infty} f^2(x) = +\infty$. In particolare le funzioni $f^2(x)$ e $f^2(x) + 5$ sono definitivamente non nulle per $x \to +\infty$. Quindi: $L = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(h(x) + \frac{f^2(x)}{f^2(x)+5}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x + \frac{f^2(x)}{f^2(x)(1+\frac{5}{f^2(x)})}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x + \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{(1+\frac{5}{f^2(x)})}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x + 1 = +\infty$.

La leggittimità dei passaggi è garantita proprio dal fatto che le funzioni $f^2(x)$ e $f^2(x)+5$ sono definitivamente non nulle.

Esercizio 3. (3,5 punti) Determinare il seguente integrale indefinito

$$I = \int (1 + 2x + x^3)e^{2x}dx \ .$$

SOLUZIONE.

$I = \frac{e^{2x}}{2}\left(-\frac{3}{4} + \frac{7}{2}x - \frac{3}{2}x^2 + x^3\right) +$ cost. L'integrale si ottiene con ripetute integrazioni per parti. Infatti, più in generale, se p è una funzione tale che la derivata quarta $p^{iv} = 0$ si ha, con ripetute integrazioni per parti,

$$\int p(x)e^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a}\left(p - \frac{1}{a}p' + \frac{1}{a^2}p' - \frac{1}{a^3}p'''\right) + \text{cost}.$$

Da cui sostituendo si ottiene il risultato.

3. Seconda parte

Esercizio 1. (10 punti)
Per ogni $x \in \mathbf{R}$, indichiamo con $[x]$ la parte intera di x.

a) Determinare il più grande sottoinsieme X di $\mathbf{R}$ tale che la formula
$$f(x) = [\sin(x)]$$
definisca una funzione $f : X \to \mathbf{R}$.

b) Determinare il più grande sottoinsieme $C \subseteq X$ tale che la restrizione di f su C sia continua.

c) Determinare l'insieme dei punti di $D \subseteq X$ dove la funzione è derivabile.

d) Determinare l'insieme M dei punti di massimo locale della funzione f.

e) Determinare l'insieme m dei punti di minimo locale della funzione f.

SOLUZIONE.

a) $X = \mathbf{R}$. La funzione è una funzione definita su tutto $\mathbf{R}$ in quanto composizione di due funzioni: $x \to \sin(x)$ e $y \to [y]$ che sono definite su tutto $\mathbf{R}$. Si osserva che:
   i) L'immagine della funzione $\sin(x)$ è l'intervallo chiuso e limitato $[-1, 1]$.
   ii) La restrizione della funzione $y \to [y]$ sull'intervallo $[-1, 1]$ ha per immagine l'insieme finito $\{-1, 0, 1\}$; precisamente: $[y] = -1$ se $y \in [-1, 0)$, $[y] = 0$ se $y \in [0, 1)$, $[1] = 1$.
   iii) Poiché $\forall x \ \sin(x+2\pi) = \sin(x)$ si ha $\forall x \ [\sin(x+2\pi)] = [\sin(x)]$, la funzione pertanto è periodica e $T := 2\pi$ è un periodo. [1]

   Basta quindi studiarne il comportamento nell'intervallo $[0, 2\pi)$: i valori assunti dalla funzione in tale intervallo sono
   (1) 0 nell' intervallo $[0, \frac{\pi}{2})$
   (2) 1 in $\frac{\pi}{2}$
   (3) 0 nell'intervallo $(\frac{\pi}{2}, \pi]$
   (4) -1 nell'intervallo $(\pi, 2\pi)$

b) $C = \mathbf{R} \setminus \left\{ \{k\pi\}_{k \in \mathbf{Z}} \cup \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi\}_{k \in \mathbf{Z}} \right\}$

c) $D = C$. Infatti in tutti i punti di C la funzione è localmente costante e quindi derivabile con derivata nulla. Nei punti di discontinuità la funzione non può essere derivabile (perché una funzione derivabile in un punto è continua in quel punto).

d) $M = \mathbf{R}$. Infatti in tutti i punti ove la funzione è continua la funzione è localmente costante e quindi questi sono punti di massimo locale; se $x \in \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi\}_{k \in \mathbf{Z}}$, allora $[\sin(x)] = 1$ quindi x è un punto di massimo assoluto (quindi locale); se $x \in \{k\pi\}_{k \in \mathbf{Z}}$, allora $[\sin(x)] = 0$ mentre se $y > x$ ed è abbastanza vicino a x allora $[\sin(y)] = -1$, se $y < x$ ed è abbastanza vicino a x allora $[\sin(y)] = 0$.

[1] Attenzione: questo non dimostra che 2π sia il minimo periodo.

e) $m = C$. Infatti in tutti i punti ove la funzione è continua la funzione è localmente costante e quindi questi sono punti di minimo locale; invece se x è un punto di discontinuità, segue dalle considerazioni fatte in d) che per ogni intorno $I(x, \epsilon)$ di x esiste $y \in I(x, \epsilon)$ tale che $f(x) > f(y)$ e quindi non è un punto di minimo locale.

Esercizio 2. (4 punti) Sia $X \subseteq \mathbf{R}$ definito da

$$X = \{1 - \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}, n > 0\} \cup (1, 2] \cup ((2, +\infty) \cap \mathbb{Q}) \ .$$

Determinare:

(1) La parte interna $\mathrm{Int}(X)$ di X.
(2) La chiusura $\mathrm{Ch}(X)$ di X.
(3) L' insieme $\mathrm{Is}(X)$ dei punti isolati di X.

SOLUZIONE.

(1) $\mathrm{Int}(X) = (1, 2)$

(2) $\mathrm{Ch}(X) = \{1 - \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}, n > 0\} \cup [1, +\infty)$

(3) $\mathrm{Is}(X) = \{1 - \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}, n > 0\}$

Esercizio 3. (3 punti)

(1) Verificare che $2i \in \mathbf{C}$ è una radice del polinomio

$$p(z) = z^4 + z^3 + 5z^2 + 4z + 4 \ .$$

(2) Determinare tutte le radici complesse di $p(z)$.

SOLUZIONE.

Le radici complesse del polinomio sono $\pm 2i, \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. Infatti essendo il polinomio a coefficienti reali risulta che anche $\overline{2i} = -2i$ è una radice. Pertanto il polinomio è divisibile per il polinomio $z^2 + 4$ e risulta $p = (z^2 + 4)(z^2 + z + 1)$. Da cui il risultato.

Esercizio 4. (7 punti)
Calcolare la soluzione dell'equazione differenziale

$$y'' - 6y' + 5y = e^{5x}$$

tale che $y(0) = y'(0) = 1$.

SOLUZIONE.
Iniziamo con il cercare le soluzioni dell'equazione omogenea associata. Essendo le radici del polinomio caratteristico 1 e 5, tali soluzioni saranno del tipo $C_1 e^x + C_2 e^{5x}$, $C_1, C_2 \in \mathbf{R}$. Inoltre il termine noto è una soluzione dell'equazione omogenea corrispondente ad una radice semplice del polinomio caratteristico; pertanto l'equazione proposta ammette soluzioni particolari del tipo $\lambda x e^{5x}$ con λ opportuno. Sostituendo e facendo il conto si verifica che in effetti la funzione $\frac{1}{4} x e^{5x}$ è una soluzione particolare dell'equazione proposta. Quindi le soluzioni sono $C_1 e^x + C_2 e^{5x} + \frac{1}{4} x e^{5x}$: imponendo le condizioni richieste abbiamo

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1 + 5C_2 = \dfrac{3}{4} \end{cases}$$

da cui otteniamo come valori per le costanti $C_1 = \dfrac{17}{16}$ e $C_2 = -\dfrac{1}{16}$.