November 10, 2014

FUNZIONI REALI DI UNA VARIABILE REALE

Estendendo quanto visto per le successioni [SUCCESSIONI] consideriamo in generale funzioni

$$f : D \to \mathbb{R}$$

definite su un arbitrario sottoinsieme D di $\mathbb{R}$. Se $D = \{n \in \mathbb{N}|\ n \geq n_0\}$ ritroviamo il caso delle successioni. Trattando le proprietà dell'insieme D faremo riferimento alle nozioni introdotte nella dispensa [TOP].

1. Limiti di funzioni

Supponiamo che $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ sia un punto di accumulazione per l'insieme D. Sotto questa ipotesi (e solo sotto questa ipotesi), dato $L \in \overline{\mathbb{R}}$, vogliamo dare un senso alla scrittura

$$L = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

che leggeremo

L è (valore) limite della funzione f per x che tende a x_0.

Definizione sintetica di limite di una funzione.

Se $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ è un punto di accumulazione dell'insieme D e $L \in \overline{\mathbb{R}}$, allora

$$L = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

se per ogni intorno U di L esiste un intorno W di x_0 tale per ogni $x \in W \cap (D \setminus \{x_0\})$ (cioè per ogni punto di $D \cap W$ diverso da x_0), $f(x) \in U$.

Come nel caso dei limiti delle successioni possiamo fare l'esercizio di esplicitare completamente questa definizione in modo analitico, a seconda che $x_0 \in \mathbb{R}$ o $x_0 = \pm\infty$ e rispettivamente $L \in \mathbb{R}$ o $L = \pm\infty$, considerando tutte le possibili $9 = 3 \times 3$ possibilità. Limitiamoci qui a trattare solo alcuni casi (lasciando gli altri per esercizio).

- Supponiamo che $x_0 \in \mathbb{R}$ e $L \in \mathbb{R}$. Gli intorni W e U sono rispettivamente della forma $I(x_0, \delta)$ e $I(L, \epsilon)$, dove δ e ϵ variano tra i numeri reali positivi. Allora la definizione si esplicita come segue:

Per ogni $\epsilon > 0$, esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in I(x_0, \delta) \cap (D \setminus \{x_0\})$ (cioè ogni $x \in D$ diverso da x_0 e tale che $|x - x_0| < \delta$), $f(x) \in I(L, \epsilon)$ (cioè $|f(x) - L| < \epsilon$).

- Supponiamo che $x_0 \in \mathbb{R}$ e $L = +\infty$. Gli intorni W sono come nel caso precedente, mentre U è una semiretta della forma $U = (m, +\infty)$. Allora la definizione si esplicita come segue:

Per ogni $m \in \mathbb{R}$, esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in I(x_0, \delta) \cap (D \setminus \{x_0\})$ (cioè ogni $x \in D$ diverso da x_0 e tale che $|x - x_0| < \delta$), $f(x) \in (m, +\infty)$ (cioè $f(x) > m$).

- Supponiamo che $x_0 = -\infty$ e $L = +\infty$. L'intorno W è una semiretta della forma $W = (-\infty, k)$, mentre U è una semiretta della forma $U = (m, +\infty)$. Allora la definizione si esplicita come segue:

Per ogni $m \in \mathbb{R}$, esiste $k \in \mathbb{R}$ tale che per ogni $x \in (-\infty, k) \cap (D \setminus \{x_0\})$ (cioè ogni $x \in D$ diverso da x_0 e tale che $x < k$), $f(x) \in (m, +\infty)$ (cioè $f(x) > m$).

Caratterizzazione dei limiti di funzione in termini di limiti di successioni. Vale il seguente fatto:

Si ha che $L = \lim_{x \to x_0} f(x)$ se e solo se per ogni successione $a : \mathbb{N} \to D \setminus \{x_0\}$ tale che $a_n \to x_0$, si ha che $\lim_{n \to +\infty} f(a_n) = L$.

Infatti, supponiamo che $L = \lim_{x \to x_0} f(x)$ e fissato arbitrariamente un intorno U di L sia W un intorno di x_0 tale $f(W \cap (D \setminus \{x_0\})) \subseteq U$. Se a_n a valori in $D \setminus \{x_0\}$ converge a x_0, allora a_n appartiene definitivamente a $W \cap (D \setminus \{x_0\})$ e quindi $f(a_n)$ appartiene definitivamente a U. Dimostriamo ora la contronominale dell'altra implicazione. Dimostriamo cioè che se L non è limite di $f(x)$ per $x \to x_0$, allora esiste una successione a_n a valori in $D \setminus \{x_0\}$ che converge a x_0 e tale che $f(a_n)$ non converge a L. Dall'ipotesi sappiamo che esiste un intorno U di L tale che per ogni $n > 1$, esiste $x_n \in I(x_0, 1/n) \cap (D \setminus \{x_0\})$ tale che $f(x_n) \notin U$. Poniamo allora $a_0 = 0$, $a_n = x_n$ per ogni $n \geq 1$. E' chiaro dalla costruzione che $a_n \to x_0$ e che $f(a_n)$ non converge a L.

Questa caratterizzazione a volte può essere usata per dimostrare che una funzione non ammette alcun limite costruendo due successioni $a, b : \mathbb{N} \to D \setminus \{x_0\}$ tali che $a_n \to x_0$, $b_n \to x_0$ mentre $f(a_n) \to L_1$ e $f(b_n) \to L_2$, con $L_1 \neq L_2$. Per esempio si consideri la funzione

$$f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, \ f(x) = \sin(1/x) \ .$$

Si osserva che $\sin(1/x) = 1$ se $1/x = \pi/2 + 2n\pi$, cioè se $x = 1/(\pi/2 + 2n\pi)$, $n \in \mathbb{N}$. Analogamente $\sin(1/x) = -1$ se $x = 1/(-\pi/2 + 2n\pi)$, $n \in \mathbb{N}$. Poniamo dunque $a_n = 1/(\pi/2 + 2n\pi)$, $b_n = 1/(-\pi/2 + 2n\pi)$, $n \geq 0$. Chiaramente $a_n \to 0$, $b_n \to 0$, $f(a_n) \to 1$, $f(b_n) \to -1$, quindi la funzione f non ha alcun limite per $x \to 0$.

Enunciamo ora alcune proprietà dei limiti di funzione che sono conseguenza della definizione. Proprietà analoghe sono già state incontrate nel caso delle successioni. In effetti la caratterizzazione vista prima permette proprio di estendere il caso delle successioni al caso generale.

In quanto segue sono dati una funzione $f : D \to \mathbb{R}$ e un punto $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ di accumulazione per D.

Unicità del limite. *Se $L \in \overline{\mathbb{R}}$ è tale che $L = \lim_{x \to x_0} f(x)$, allora L è l'unico valore limite della funzione f in $\overline{\mathbb{R}}$ per x che tende a x_0. Pertanto scriveremo anche $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ intendendo che L è "il" limite della funzione per x che tende a x_0.*

Permanenza del segno. *Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \overline{\mathbb{R}}$ e $L \neq 0$, allora esiste un intorno W di x_0 tale che per ogni $x \in W \cap (D \setminus \{x_0\})$, $f(x)$ ha lo stesso segno di L.*

Proprietà algebriche dei limiti di funzione. Usando la caratterizzazione per mezzo del limite di successioni vista prima, le proprietà algebriche dei limiti di successioni si estendono ai limiti di funzioni generali. Per completezza le enunciamo di nuovo.

(1) **(Limite di una somma di funzioni.)** Siano $a, b : D \to \mathbb{R}$ due funzioni, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ di accumulazione per D. Supponiamo che
$$\lim_{x \to x_0} a(x) = L \in \overline{\mathbb{R}}$$
$$\lim_{x \to x_0} b(x) = L' \in \overline{\mathbb{R}}$$
e che $L + L'$ è definito (cioè non è una forma indeterminata). Allora
$$\lim_{x \to x_0} (a(x) + b(x)) = L + L' \in \overline{\mathbb{R}} \ .$$

(2) **(Limite di un prodotto di funzioni.)** Siano $a, b : D \to \mathbb{R}$, x_0 come sopra. Supponiamo che
$$\lim_{x \to x_0} a(x) = L \in \overline{\mathbb{R}}$$
$$\lim_{x \to x_0} b(x) = L' \in \overline{\mathbb{R}}$$
e che $L \cdot L'$ è definito (cioè non è una forma indeterminata). Allora
$$\lim_{x \to x_0} a(x)b(x) = L \cdot L' \in \overline{\mathbb{R}} \ .$$

(3) **(Limite della funzione reciproca.)** Sia $a : D \to \mathbb{R}$ una funzione e supponiamo che per ogni $x \in D$, $a(x) \neq 0$. Supponiamo che
$$\lim_{x \to x_0} a(x) = L \in \overline{\mathbb{R}}$$
e che $1/L$ sia definito. Allora
$$\lim_{x \to x_0} 1/a(x) = 1/L \in \overline{\mathbb{R}} \ .$$

(4) Nella situazione del punto precedente, supponiamo che $L = 0$ e che esista un intorno W di x_0 tale $f(x)$ abbia segno costante $+$ o $-$ su $W \cap (D \setminus \{x_0\})$. Allora

$$\lim_{x \to x_0} 1/a(x) = \pm\infty \ .$$

In particolare

$$\lim_{x \to x_0} 1/|a(x)| = +\infty \ .$$

Confronto di funzioni. Come per le successioni, in certi casi si possono ricavare informazioni sui limiti di una funzione "confrontandola" con altre funzioni di cui il comportamento sia noto.

Confronto 0. Due funzioni $a, b : D \to \mathbb{R}$ che coincidono su $W \cap (D \setminus \{x_0\})$ per qualche intorno W del punto x_0 di accumulazione per D hanno lo stesso comportamento per $x \to x_0$, cioè l'una ha limite se e solo se l'altra ha limite ed eventualmente i limiti coincidono.

Confronto 1. Siano $a, b : D \to \mathbb{R}$ due funzioni. Supponiamo che

$$\lim_{x \to x_0} b(x) = +\infty$$

e che esiste un intorno W di x_0 tale che per ogni $x \in W \cap (D \setminus \{x_0\})$, $a(x) \geq b(x)$. Allora

$$\lim_{n \to +\infty} a(x) = +\infty \ .$$

C'e' una versione analoga se

$$\lim_{x \to x_0} b(x) = -\infty$$

i cui dettagli sono lasciati al lettore.

Confronto 2. Siano a,b,c tre funzioni definite su $D \subseteq \mathbb{R}$. Supponiamo che:
1) $\lim_{x \to x_0} a(x) = \lim_{x \to x_0} b(x) = L \in \mathbb{R}$;
2) Esiste un intorno W di x_0 tale che per ogni $x \in W \cap (D \setminus \{x_0\})$, $a(x) \leq c(x) \leq b(x)$.

Allora:

$$\lim_{x \to x_0} c(x) = L \ .$$

Convergenza delle funzioni monotone Sia x_0 di accumulazione per l'insieme D e supponiamo che $x \leq x_0$ per ogni $x \in D \setminus \{x_0\}$. Supponiamo che $f : D \to \mathbb{R}$ sia non decrescente e superiormente limitata. Allora

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L = \sup\{f(x)|\ x \in D \setminus \{x_0\}\} \ .$$

Se f è non decrescente e superiormente illimitata, allora

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \ .$$

Vale una versione analoga quando $x_0 \leq x$ per ogni $x \in D$ e f è non crescente. Lasciamo i dettagli al lettore.

Limiti di funzioni composte. Nel caso delle successioni abbiamo studiato il comportamento delle sottosuccessioni di successioni regolari. Questo si estende allo studio dei limiti delle funzioni composte. Vale il seguente fatto:

Siano $f : D \to \mathbb{R}$ tale che $f(D) \subseteq D' \subseteq \mathbb{R}$, e sia $g : D' \to \mathbb{R}$. Possiamo quindi considerare la funzione composta $g \circ f : D \to \mathbb{R}$. Supponiamo che:
1) $x_0 \in \mathbb{R}$ è di accumulazione per D.
2) $\lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \overline{\mathbb{R}}$ e L è di accumulazione per D'.
3) $\lim_{y \to L} g(y) = M \in \overline{\mathbb{R}}$
4) Esiste un intorno W di x_0 tale che per ogni $x \in W \cap (D \setminus \{x_0\})$, $f(x) \neq L$.

Allora $\lim_{x \to x_0} g \circ f(x) = M$.

Alcune osservazioni su questo enunciato. Se $L = \pm\infty$ la condizione 4) è automaticamente verificata. Se $L \in \mathbb{R}$, la condizione 4) è necessaria. Infatti si considerino: $f(x) = x\sin(1/x)$ definita su $D = \{x \neq 0\}$; $g(y)$ definita su $D' = \mathbb{R}$ da $g(y) = 0$ se $y \neq 0$, $g(0) = 1$; $x_0 = 0$. Allora $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ (verificarlo per esercizio), 0 è di accumulazione per D', $\lim_{y\to 0} g(y) = 0$. D'altra parte $g(x\sin(1/x)) = 1$ se e solo se $\sin(1/x) = 0$, cioè $1/x = \pm n\pi$, $x = \pm(1/n\pi)$, con n che varia in $\mathbb{N}$. Altrimenti $g(x\sin(1/x)) = 0$. Applicando la caratterizzazione dei limiti per mezzo delle successioni si vede allora che $g\circ f$ è irregolare. Infatti l'enunciato precedente non si applica perché non vale l'ipotesi 4). La dimostrazione è una conseguenza diretta delle definizioni e può essere svolta come utile esercizio.

Vedremo tra poco una variante di questo enunciato che farà uso della nozione di *continuità*.

Limiti destri e limiti sinistri. Dati $x_0 \in \mathbb{R}$ e $D \subseteq \mathbb{R}$, diciamo che x_0 è un punto di accumulazione *bilaterale* di D se è un punto di accumulazione per entrambi i sottoinsiemi $D^+ = \{x \in D;\ x > x_0\}$ e $D^- = \{x \in D;\ x < x_0\}$. Se $f : D \to \mathbb{R}$ è una funzione definita su D indichiamo con f^+ e f^- rispettivamente le restrizioni di f a D^+ e D^-. Poniamo allora per definizione

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) := \lim_{x\to x_0} f^+(x)$$

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) := \lim_{x\to x_0} f^-(x)\ .$$

Vale il seguente fatto di facile verifica:

$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \in \overline{\mathbb{R}}$ *se e solo se* $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = L$.

In certi casi può essere conveniente ricondurre lo studio del limite di f per $x \to x_0$ allo studio dei due limiti destro e sinistro. Per esempio se $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L^+$, $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L^-$ e $L^+ \neq L^-$, allora possiamo concludere che non esiste il limite $\lim_{x\to x_0} f(x)$. Ad esempio questo si applica alla funzione $f(x) = 1/x$ definita su $D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ e $x_0 = 0$.

2. Funzioni continue

Funzioni continue in un punto. Siano $f : D \to \mathbb{R}$ una funzione e $x_0 \in D$. Per definizione

la funzione f è continua nel punto $x_0 \in D$ se per ogni intorno U di $f(x_0)$ esiste un intorno W di x_0 tale che per ogni $x \in W \cap D$, $f(x) \in U$.

In questo caso entrambi x_0 e $f(x_0)$ appartengono a $\mathbb{R}$, quindi la definizione appena data può essere esplicitata come segue:

la funzione f è continua nel punto $x_0 \in D$ se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in I(x_0,\delta) \cap D$ (cioè $x \in D$ e $|x - x_0| < \delta$) si ha che $f(x) \in I(f(x_0),\epsilon)$ (cioè $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$).

Ci sono due casi possibili riguardo alla posizione di x_0 in D:
(1) $x_0 \in D$ ed è di accumulazione per D;
(2) $x_0 \in D$ e non è di accumulazione per D. Quindi esiste un intorno $I(x_0,\epsilon)$ di x_0 tale che $I(x_0,\epsilon) \cap D = \{x_0\}$ e si dice anche che x_0 è un *punto isolato* di D.

Valgono i seguenti fatti

(a) Se $x_0 \in D$ è un punto isolato di D allora f è continua in x_0.
(b) Se $x_0 \in D$ è di accumulazione per D allora f è continua in x_0 se e solo se

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)\ .$$

Dimostriamo (a). Fissiamo un intorno W di x_0 in $\mathbb{R}$ tale che $D\cap W = \{x_0\}$. Allora $f(D\cap W) = \{f(x_0)\}$ che è contenuto in qualsiasi intorno di $f(x_0)$. Dimostriamo (b). Supponiamo che f sia continua in x_0. Fissato un intorno U di $f(x_0)$, sia W un intorno di x_0 tale che $f(W \cap D) \subseteq U$. Allora a maggior ragione $f(W \cap (D \setminus \{x_0\})) \subseteq U$ e quindi $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Dimostriamo ora la contronominale dell'altra implicazione. Supponiamo che $f(x_0)$ non sia uguale a $\lim_{x \to x_0} f(x)$ e dimostriamo che allora f non è continua in x_0. Usando l'ipotesi sappiamo che esiste un intorno U di $f(x_0)$ tale per ogni intorno W di x_0 esiste $x \in W \cap D$, $x \neq x_0$, tale che $f(x) \notin U$. Quindi non esiste alcun intorno W di x_0 tale che $f(D \cap W) \subseteq U$ e f non è continua in x_0.

Estensione di funzioni per continuità. Siano D un sottoinsieme di $\mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ di accumulazione per D e supponiamo che $x_0 \notin D$. Sia $f : D \to \mathbb{R}$ tale che $\lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}$. Allora possiamo definire $\bar{f} : D \cup \{x_0\} \to \mathbb{R}$, ponendo $\bar{f}(x) = f(x)$ se $x \in D$, $\bar{f}(x_0) = L$. E' immediato che $\bar{f}$ è continua in x_0; si dice allora che $\bar{f}$ è stata ottenuta *estendendo f al punto x_0 per continuità*. Ad esempio la funzione $f(x) = x \sin(1/x)$ è definita su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Si verifica che $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$, quindi f può essere estesa al punto 0 per continuità, ponendo $\bar{f}(0) = 0$.

Funzioni globalmente continue. Si dice che una funzione $f : D \to \mathbb{R}$ è *continua* se per ogni $x \in D$, f è continua in x. Per esempio:

- Ogni successione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ è continua perché ogni $n \in \mathbb{N}$ è isolato in $\mathbb{N}$.
- Se D è un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}$ (vedi [TOP]) allora $f : D \to \mathbb{R}$ è continua se e solo se per ogni $x_0 \in D$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \ .$$

Infatti se D è aperto ogni $x_0 \in D$ è di accumulazione per D.

Esempi fondamentali di funzioni continue. Le seguenti funzioni sono continue:

- Le funzioni costanti $x \to c$ definite su tutto $\mathbb{R}$.
- La funzione identità $x \to x$ definita su tutto $\mathbb{R}$.
- Le funzioni trigonometriche

  $$x \to \sin(x) \text{ e } x \to \cos(x)$$

  definite su tutto $\mathbb{R}$.
- La funzione esponenziale $x \to e^x$ definita su tutto $\mathbb{R}$.
- La funzione logaritmo naturale $x \to \log(x)$ definita sulla semiretta aperta $(0, +\infty)$.

La verifica di queste affermazioni può essere fatta per esercizio.

Ancora sui limiti delle funzioni composte. Come promesso diamo qui una variante del risultato già visto, dove vegono modificate le ipotesi 2) e 4). Vale il seguente fatto:

Siano $f : D \to \mathbb{R}$ tale che $f(D) \subseteq D' \subseteq \mathbb{R}$, e sia $g : D' \to \mathbb{R}$. Possiamo quindi considerare la funzione composta $g \circ f : D \to \mathbb{R}$. Supponiamo che:
1) $x_0 \in \mathbb{R}$ è di accumulazione per D.
2)' $\lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}$, $L \in D'$ ed è di accumulazione per D'.
3) $\lim_{y \to L} g(y) = M \in \overline{\mathbb{R}}$
4)' g è continua in L.

Allora $\lim_{x \to x_0} g \circ f(x) = M$.

La dimostrazione è una conseguenza diretta delle definizioni e può essere svolta come utile esercizio. Si noti che nell'esempio dato in precedenza a commento della necessità dell'ipotesi 4), la funzione g *non* è continua in $L = 0$. Quindi quell'esempio non verifica neanche l' ipotesi 4)'.

Continuità delle restrizioni e della composizione di funzioni continue. Valgono i seguenti fatti:

(1) Se $f : D \to \mathbb{R}$ è continua e $D' \subseteq D$ è un sottoinsieme di D, allora la restrizione di f a D' $f_| : D' \to \mathbb{R}$ è continua.

(2) Siano $f : D \to \mathbb{R}$ tale che $f(D) \subseteq D' \subseteq \mathbb{R}$, e sia $g : D' \to \mathbb{R}$. Possiamo quindi considerare la funzione composta $g \circ f : D \to \mathbb{R}$. Se f e g sono continue allora anche $g \circ f$ è continua.

Il punto (1) è una conseguenza immediata delle definizioni. Per il punto (2), basta dimostrare che $g \circ f$ è continua in ogni punto $x_0 \in D$ che è di accumulazione per D e il risultato voluto è una conseguenza di quanto osservato sui limiti delle funzioni composte.

Sulla (non) continuità della funzione inversa. Sia $f : D \to \mathbb{R}$ continua e iniettiva. Quindi è definita la funzione inversa $f^{-1} : \mathrm{Im}(f) \to D \subseteq \mathbb{R}$. Possiamo allora chiederci se anche f^{-1} è continua. La risposta è in generale negativa. Si consideri ad esempio $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, definita da $f(0) = 0$, $f(n) = 1/n$ per ogni $n \geq 1$. Chiaramente f è iniettiva ed è continua perché tutti i punti di $\mathbb{N}$ sono isolati. L'immagine di f è

$$\mathrm{Im}(f) = \{0\} \cup \{1/n |\ n \geq 1\}$$

allora f^{-1} è continua in ogni punto del tipo $1/n$ perché questo è isolato in $\mathrm{Im}(f)$. D'altra parte f^{-1} *non* è continua in 0. Infatti 0 è di accumulazione per $\mathrm{Im}(f)$, $1/n \to 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} f^{-1}(1/n) = \lim_{n\to+\infty} n = +\infty \neq f^{-1}(0) = 0\ .$$

E' però vero che per certe classi particolari di funzioni continue e invertibili l'inversa è a sua volta continua. Ad esempio vedremo in seguito che vale il seguente risultato:

Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua e iniettiva definita su un intervallo aperto I. Allora anche $J := \mathrm{Im}(f)$ è un intervallo aperto e $f^{-1} : J \to I$ è continua.

Ancora sui limiti di funzione.

Sulle forme indeterminate. Nello studio delle proprietà algebriche dei limiti (di successioni o di funzioni) abbiamo individuato delle cosiddette *forme indeterminate*. In questo paragrafo vogliamo riorganizzarle un po'. Poniamo ∞ per indicare senza fare distinzione $\pm\infty$. Prendiamo come forme indeterminate *fondamentali* le due seguenti:

$$\frac{\infty}{\infty},\ \ \frac{0}{0}\ .$$

Individuiamo adesso altre forme indeterminate ed indichiamo come, almeno formalmente, possano essere ricondotte a quelle fondamentali.

- $(0 \cdot \infty)$ Supponiamo che per $x \to a$, un prodotto di funzioni $f(x)g(x)$ presenti una indeterminazione del tipo $0 \cdot \infty$. Allora in un intorno di a, $f(x)g(x) = \dfrac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ dove il rapporto presenta ora un'indeterminazione di tipo $\dfrac{0}{0}$. Se f e' diversa da zero quando $x \to a$, allora possiamo anche usare $f(x)g(x) = \dfrac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$ ottenendo così una indeterminazione di tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$.
- $(+\infty - \infty)$. Supponiamo che per $x \to a$, una somma di funzioni $f(x) + g(x)$ presenti una indeterminazione del tipo $-\infty + (+\infty)$. Allora $f + g = \log(e^{f+g}) = \log(e^f e^g)$, così che al limite il prodotto $e^f e^g$ presenta una indeterminazione di tipo $0 \cdot \infty$ e ci possiamo ricondurre al caso precedente.
- (1^∞). Supponiamo che per $x \to a$, la funzione $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\log(f(x))}$ sia tale che $f(x) > 0$, $f(x) \to 1$, $g(x) \to \infty$. Si noti che l'esponente $g(x)\log(f(x))$ presenta una indeterminazione di tipo $0 \cdot \infty$ e possiamo quindi ricondurci ad un caso precedente. Questa situazione si può anche trattare osservando che $f(x)^{g(x)} = ((1 + (f(x) - 1))^{\frac{1}{f(x)-1}})^{(f(x)-1)g(x)}$, con $f(x) - 1$ che tende a 0 quando $x \to a$. Usando il limite
$$\lim_{y\to0}(1 + y)^{1/y} = e$$
che giustificheremo dopo, e un cambio di variabile, per $x \to a$ siamo ridotti a studiare il limite di $e^{(f(x)-1)g(x)}$ e nell'esponente troviamo ancora una indeterminazione di tipo $0 \cdot \infty$. Abbiamo così individuato un nuovo tipo di indeterminazione indicato come 1^∞.

- (∞^0). In una situazione analoga alla precedente supponiamo che $f(x) > 0$, $f(x) \to \infty$, $g(x) \to 0$. Come prima consideriamo $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\log(f(x))}$ e osserviamo che l'esponente $g(x)\log(f(x))$ presenta ancora una indeterminazione di tipo $\infty \cdot 0 = 0 \cdot \infty$ e possiamo quindi ricondurci ad un caso precedente.

Alcuni limiti notevoli.

(1) Si consideri la funzione $x \to \sin(x)/x$ definita su $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Il punto 0 è di accumulazione per D. Vale allora

$$\lim_{x\to 0} \sin(x)/x = 1 \ .$$

Infatti valgono le seguenti disuguaglianze

$$\sin(x) < x < \sin(x)/\cos(x), \ \ 0 \leq x \leq \pi/4$$
$$\sin(x) > x > \sin(x)/\cos(x), \ \ 0 > x \geq -\pi/4$$

dividendo per per $\sin(x)$, otteniamo che per ogni $x \in [-\pi/4, \pi/4]$,

$$\cos(x) < \sin(x)/x < 1$$

e si conclude usando la continuità del coseno e i "carabinieri".

(2) Si consideri la funzione $x \to (\cos(x) - 1)/x$ definita su $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Il punto 0 è di accumulazione per D. Vale allora

$$\lim_{x\to 0} (\cos(x) - 1)/x = 0 \ .$$

Infatti, moltiplicando numeratore e denominatore per $(\cos(x) + 1)$ si può riscrivere la funzione nella forma

$$x \to \sin(x)(-\sin(x)/x)(1/(\cos(x) + 1))$$

dove, quando $x \to 0$, i tre fattori del prodotto tendono rispettivamente a 0 (per la continuità del seno), -1 (esempio **(1)**), $1/2$ (per la continuità del coseno). Il risultato segue per le proprietà algebriche dei limiti. Ragionando in modo simile si dimostra che

$$\lim_{x\to 0} (1 - \cos(x))/x^2 = 1/2 \ .$$

(3) Si consideri la funzione $f(x) := (1 + \frac{1}{x})^x = e^{x\log(1+1/x)}$ definita su $D = \{x \in \mathbb{R} | \ (1 + 1/x) > 0\}$. I punti $\pm\infty \in \overline{\mathbb{R}}$ sono di accumulazione per D. Vale allora:

$$\lim_{x\to\pm\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e \ .$$

Consideriamo $+\infty$. Indicando come al solito $x \to [x]$ la funzione *parte intera di* x definita su $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} | \ x > 0\}$. Poniamo

$$g(x) = (1 + \frac{1}{[x] + 1})^{[x]}, \ h(x) = (1 + \frac{1}{[x]})^{[x]+1} \ .$$

Si osserva che:

- Poichè $[x] \leq x \leq [x] + 1$, allora per ogni $x > 0$, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$.
- Se $[x] = n$, allora
$$g(x) = (1 + \frac{1}{n+1})^{n+1)}/(1 + \frac{1}{n+1})$$
$$h(x) = (1 + \frac{1}{n})(1 + \frac{1}{n})^n \ .$$
- Poiché $(1 + \frac{1}{n+1}) \to 1$ e $(1 + \frac{1}{n}) \to 1$ quando $n \to +\infty$, allora $g(x) \to e$ e $h(x) \to e$ (limite notevole che definisce il numero di Nepero).
- Infine, per i "carabinieri" anche $f(x) \to e$ quando $x \to +\infty$.

Il caso di $-\infty$ si tratta in modo analogo.

(4) Si consideri la funzione $f(x) := (1+x)^{1/x}$ definita su $D = (-1,1) \setminus \{0\}$. Il punto 0 è di accumulazione per D. Vale allora

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e \ .$$

Infatti $f(x) = F(G(x))$, dove $G(x) = 1/x$ definita su D, $F(y) = (1+1/y)^y$, definita quando $|y| > 1$. Allora il limite segue da quelli dell'esempio **(3)** e dalle proprietà dei limiti delle funzioni composte.

(5) Si consideri la funzione $f(x) := \dfrac{\log(1+x)}{x}$ definita su $D = (-1,1) \setminus \{0\}$. Il punto 0 è di accumulazione per D. Vale allora

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1 \ .$$

Infatti $f(x) = \log((1+x)^{1/x}$, allora poiché $\log(e) = 1$, il risultato segue dalla continuità di log e dal limite dell'esempio **(4)**.

(6) Si consideri la funzione $f(x) := (e^x - 1)/x$ definita su $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Il punto 0 è di accumulazione per D. Vale allora

$$\lim_{x\to 0}(e^x - 1)/x = 1 \ .$$

Infatti, poniamo $e^x = t+1$, $x = \log(1+t)$. Quando $x \to 0$, $e^x \to 1$ (per la continuità dell'esponenziale), quindi $t \to 0$. Dunque il limite che ci interessa può essere espresso come il limite della funzione $t/\log(1+t)$, quando $t \to 0$, che vale 1 (esempio **(5)**).

(7) Si consideri la funzione $f(x) := \cos(x)^{1/x}$ definita su $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Il punto 0 è di accumulazione per D. E' una forma indeterminata del tipo "$1^{+\infty}$". Vale allora

$$\lim_{x\to 0} \cos(x)^{1/x} = \lim_{x\to 0} e^{\lim_{x\to 0}(\cos(x)-1)/x} = e^0 = 1 \ .$$