

## EQUAZIONI DIFFERENZIALI I

## 1. INTRODUZIONE

Un “multirettangolo aperto”  $Q$  di  $\mathbb{R}^{n+1}$  è un prodotto di intervalli aperti della forma

$$Q = I_0 \times \cdots \times I_n .$$

Una funzione  $F : Q \rightarrow \mathbb{R}$  è *continua* se per ogni  $p \in Q$ , per ogni  $\epsilon > 0$ , esiste un multirettangolo aperto  $Q' \subset Q$  tale che  $p \in Q'$  e  $F(Q') \subset (F(p) - \epsilon, F(p) + \epsilon)$ .

Fissiamo un multirettangolo aperto della forma:

$$T \times Q \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^{n+2}$$

dove  $n \geq 1$  e l'intervallo aperto  $T$  può essere pensato come un intervallo di *tempi*. Sia data una funzione continua

$$F : T \times Q \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(t, \bar{x}) = F(t, x_0, \dots, x_n) .$$

Associata ad  $F$  abbiamo l' *equazione differenziale dell'  $n$ -esimo ordine*:

$$F(t, y, y^{(1)}, \dots, y^{(n)}) = 0 .$$

Una *soluzione* di questa equazione è una funzione

$$y : J \rightarrow \mathbb{R}$$

tale che:

- (1)  $J \subset T$  è un sotto-intervallo aperto dell'intervallo dei tempi  $T$ .
- (2)  $y$  è  $n$ -volte derivabile, e per ogni  $t \in J$ , poniamo  $y'(t) = y^{(1)}(t)$ ,  $y^{(s)}(t) = (y^{(s-1)})'(t)$ .
- (3) Ponendo, per ogni  $t \in J$ ,

$$\bar{y}(t) = (y(t), y^{(1)}(t), \dots, y^{(n)}(t))$$

si definisce una funzione

$$\bar{y} : J \rightarrow Q .$$

- (4) Per ogni  $t \in J$ , si ha che

$$F(t, \bar{y}(t)) = 0 .$$

Il grafico  $G(\bar{y})$  di  $\bar{y}$  in  $J \times Q$  è detto una *curva integrale dell'equazione*. E' chiaro che c'è una corrispondenza biunivoca canonica tra l'insieme delle soluzioni e l'insieme delle curve integrali. L'insieme  $I(F)$  di tutte le soluzioni (equivalentemente, di tutte le curve integrali) è detto l' *integrale totale dell'equazione differenziale*. Il problema generale è quello di determinare  $I(F)$  al variare di  $F$ . Una soluzione  $y : J \rightarrow \mathbb{R}$  (equivalentemente una curva integrale) è detta *massimale* se non si può prolungare ad una soluzione  $\tilde{y} : \tilde{J} \rightarrow \mathbb{R}$ , dove  $\tilde{J}$  contiene propriamente  $J$ . Dunque possiamo definire  $I_m(F)$  come l'insieme di tutte le soluzioni massimali e specializzare un poco il problema sostituendo  $I(F)$  con  $I_m(F)$ , al variare di  $F$ . Un sotto-problema fondamentale è il

*Problema di Cauchy sull'esistenza e unicità di soluzioni massimali con dati iniziali assegnati.*

Precisamente, assegnato un punto  $(t^0, \bar{x}^0) \in T \times Q$ , il problema chiede se esiste ed è unica una soluzione massimale  $y : J \rightarrow \mathbb{R}$  dell'equazione tale che  $t^0 \in J$  e  $(t^0, \bar{y}(t^0)) = (t^0, \bar{x}^0)$ .

Ci possiamo aspettare che la difficoltà di questi problemi cresca con l'ordine e che soprattutto dipenda da quanto è “complicata” la funzione  $F$ . Una prima semplificazione consiste nel richiedere che  $F$  sia in *forma normale* cioè della forma

$$F(t, \bar{x}) = x_n - f(t, x_0, \dots, x_{n-1}) .$$

Ricordando poi, per esempio, le considerazioni sulla “gerarchia” delle funzioni elementari (vedi [MODELLE]) il tipo più semplice per  $F$  è quello *lineare*, cioè della forma:

$$F(t, \bar{x}) = x_n + (a_0(t)x_0 + \dots + a_{n-1}(t)x_{n-1} - b(t))$$

dove  $f(t, \bar{x}) = -(\sum_j a_j(t)x_j) + b(t)$  è definita su  $T \times \mathbb{R}^n$ .

Nel seguito ci occuperemo principalmente di equazioni del primo e del secondo ordine.

## 2. GENERALITÀ SULLE EQUAZIONI LINEARI

Una equazione lineare (in forma normale) può essere scritta nella forma

$$y^{(n)} + a_0(t)y + \dots a_{n-1}(t)y^{(n-1)} = b(t)$$

dove le funzioni  $a_j(t)$  sono continue. L'equazione

$$y^{(n)} + a_0(t)y + \dots a_{n-1}(t)y^{(n-1)} = 0$$

è detta l'*equazione omogenea* associata, mentre la funzione  $b(t)$  è il *termine noto* di quella *non omogenea*. Il lettore probabilmente avrà riconosciuto la terminologia che si usa per i sistemi di equazioni lineari e che avrà già incontrato nel corso di algebra lineare. Non è un caso. Per ogni intervallo aperto  $J \subset T$ , l'insieme  $\mathcal{C}^0(J)$  delle funzioni continue  $z : J \rightarrow \mathbb{R}$  è *chiuso rispetto alle combinazioni lineari*, cioè, se  $z_1(t), \dots, z_k(t) \in \mathcal{C}^0(J)$  e  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ , allora la combinazione lineare  $\sum_j \alpha_j z_j(t) \in \mathcal{C}^0(J)$ .

Dunque  $\mathcal{C}^0(J)$  è un  $\mathbb{R}$ -spazio vettoriale. Il sottoinsieme  $\mathcal{C}^n(J)$  di  $\mathcal{C}^0(J)$  formato dalle applicazioni di classe  $\mathcal{C}^n$  è un sottospazio vettoriale (cioè è a sua volta chiuso rispetto alle combinazioni lineari). L'applicazione

$$L : \mathcal{C}^n(J) \rightarrow \mathcal{C}^0(J), \quad L(y) = y^{(n)} + a_0(t)y + \dots a_{n-1}(t)y^{(n-1)}$$

è un'applicazione lineare. Dunque trovare le soluzioni definite su  $J \subset T$  dell'equazione omogenea coincide con determinare il *nucleo*  $\text{Ker}(L)$  di  $L$ . Sappiamo dall'algebra lineare (e la verifica è facile) che  $\text{Ker}(L)$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathcal{C}^n(J)$ , in particolare, per ogni  $J \subset T$ , non è vuoto perché contiene almeno la soluzione costantemente nulla  $y = 0$ .

Venendo all'equazione non omogenea, fissato un sottointervallo  $J \subset T$ , si hanno due possibilità: (1) non esistono soluzioni definite su  $J$ ; (2) esiste almeno una soluzione  $y^0 : J \rightarrow \mathbb{R}$ . Nel secondo caso possiamo descrivere completamente l'insieme delle soluzioni dell'equazione non omogenea:

$y : J \rightarrow \mathbb{R}$  è una soluzione dell'equazione non omogenea se e solo se è della forma  $y = y^0 + z$ , dove  $z \in \text{Ker}(L)$ , cioè  $z$  è una soluzione dell'equazione omogenea associata.

Abbiamo dunque ritrovato la struttura delle soluzioni di un sistema lineare non omogeneo. L'unica differenza, rispetto ai sistemi lineari che probabilmente sono più familiari al lettore, è che lo spazio su cui è definita l'applicazione lineare  $L$  non è di dimensione finita e quindi, a priori, anche  $\text{Ker}(L)$  potrebbe non esserlo. Si noti infatti che le funzioni monomiali

$$y = t^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

che sono definite e  $\mathcal{C}^\infty$  su ogni intervallo  $J$ , sono infinite e tra loro linearmente indipendenti.

Le considerazioni precedenti suggeriscono di dividere lo studio di una data equazione lineare in due parti complementari:

- (1) Per ogni  $J \subset T$  (in particolare  $T$ ) Determinare  $\text{Ker}(L)$ , cioè determinare lo spazio vettoriale delle soluzioni dell'equazione omogenea associata (in particolare decidere se è di dimensione finita, nel caso determinarla).
- (2) Determinare se possibile una soluzione particolare  $y^0$  dell'equazione non omogenea.

Concludiamo osservando che per le equazioni lineari vale anche la seguente *proprietà di sovrapposizione* (che è di facile verifica):

Siano

$$y^{(n)} + a_0(t)y + \dots a_{n-1}(t)y^{(n-1)} = b_1(t)$$

$$y^{(n)} + a_0(t)y + \dots a_{n-1}(t)y^{(n-1)} = b_2(t)$$

due equazioni lineari non omogenee che hanno la stessa equazione omogenea associata. Allora se  $y_1$  e  $y_2$  sono rispettivamente soluzioni di queste equazioni, definite su uno stesso intervallo  $J$ , allora  $y_1 + y_2$  è una soluzione dell'equazione

$$y^{(n)} + a_0(t)y + \dots + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} = b_1(t) + b_2(t) .$$

### 3. EQUAZIONI DEL PRIMO ORDINE

Consideriamo

$$f : T \times I \rightarrow \mathbb{R}$$

continua che determina una  $F : T \times (I \times \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  in forma normale, cioè

$$F(t, x_0, x_1) = x_1 - f(t, x_0) .$$

L'equazione differenziale associata si può scrivere nella forma

$$y' = f(t, y) .$$

Nel seguito scriveremo semplicemente  $x$  invece di  $x_0$ .

Possiamo interpretare la situazione nel modo seguente. La coordinata  $x$  individua la posizione di un punto che si muove sull'intervallo  $I$ . Allora  $f(t, x)$  può essere interpretato come il vettore velocità del punto che all'istante  $t$  occupa la posizione  $x$ . Questo vettore è "tangente" a  $I$  come deve essere. Dunque la funzione  $f = f(t, x)$  può essere interpretata come:

*Un "campo di vettori tangenti" (di velocità istantanee nella nostra interpretazione cinematica) lungo  $I$  che varia con il tempo.*

Una soluzione  $y : J \rightarrow \mathbb{R}$  dell'equazione differenziale corrisponde ad una specifica *legge del moto* del punto (su  $I$ ) che ha in ogni istante la velocità pre-assegnata dal campo  $f$ . Integrare l'equazione significa quindi ricostruire tutte le leggi del moto che realizzano quella assegnata distribuzione di velocità (dipendente dal tempo).

La cosa diventa forse ancora più espressiva se la rileggiamo in termini delle curve integrali. In quanto segue svolgeremo un tipo di considerazioni già incontrato in [ARCHI]. Associamo alla funzione

$$f : T \times I \rightarrow \mathbb{R}$$

la funzione *a valori vettoriali*

$$S : T \times I \rightarrow \mathbb{R}^2, S(t, x) = (1, f(t, x))$$

che a volte è chiamata la *sospensione* di  $f$ .  $S$  può essere interpretato come:

*Un campo di vettori tangenti su  $T \times I$*

Nel senso che il vettore  $S(t, x) = (1, f(t, x))$  deve essere pensato "applicato" al punto  $(t, x) \in T \times I$ . Se  $y : J \rightarrow \mathbb{R}$  è una soluzione dell'equazione differenziale, allora  $t \rightarrow (t, y(t))$  è la legge del moto di un punto che si muove nel piano lungo la curva integrale  $G(y)$ , tale che il vettore  $S(t, y(t))$  è tangente alla curva e rappresenta la velocità del punto all'istante  $t$ .

**3.1. Un esempio già familiare.** Supponiamo che

$$f(t, x) = f(t)$$

cioè dipende solo da  $t$  ma non dalla posizione, come al solito

$$F(t, x, x_1) = x_1 - f(t) .$$

Lungo ogni intervallo "verticale" della forma

$$\{t\} \times I \subset T \times I$$

si applica il vettore costante

$$S(t) = (1, f(t)) .$$

In questo caso l'equazione differenziale diventa

$$y' = f(t)$$

dunque il suo integrale generale coincide con l'integrale indefinito  $\int f(t)dt$  che abbiamo già studiato. Poiché  $f$  è continua una qualsiasi funzione integrale di punto base  $t_0 \in T$

$$y(t) = \int_{t_0}^t f(x)dx$$

è una soluzione massimale definita su tutto  $T$ , per cui

$$I_m(F) = \int f(t)dt = y(t) + \mathbb{R} .$$

Le corrispondenti curve integrali si ottengono trasladando verticalmente il grafico  $G(y)$  e sono due a due disgiunte. Imponendo  $(t_0, x_0) = (t_0, y(t_0) + c) = (t_0, c)$  si ricava  $c = x_0$  e si risolve affermativamente il corrispondente problema di Cauchy di esistenza e unicità della soluzione massimale passante per  $(t_0, x_0)$ . Variando il punto base della funzione integrale, si vede così che il problema di Cauchy è sempre risolubile.

Il teorema fondamentale del calcolo integrale ci permette anche di riformulare il caso generale di equazioni del primo ordine. Infatti vale:

**Proposizione 3.1.** *Nelle solite ipotesi,  $y : J \rightarrow \mathbb{R}$  è una soluzione dell'equazione differenziale  $y' = f(t, y)$  tale che  $y(t_0) = x_0$  se e solo se per ogni  $t \in J$  verifica*

$$y(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s))ds .$$

Si noti però che *non* ci siamo ridotti come prima alla semplice determinazione di un integrale indefinito perché la funzione incognita interviene ora sotto il segno di integrazione.

**3.2. Enunciato del teorema di Cauchy-Lipschitz.** Consideriamo di nuovo un'equazione differenziale del primo ordine in forma normale

$$y' = f(t, y)$$

dove come al solito  $f$  è continua. Diciamo che  $f$  è *localmente Lipschitziana* se per ogni  $(t_0, x_0) \in T \times I$  esistono un rettangolo aperto  $Q \subset T \times I$  (che possiamo pensare "abbastanza piccolo") e una costante positiva  $K > 0$ , tali che

- $(t_0, x_0) \in Q$ .
- Per ogni  $(t, x), (t, z) \in Q$ , si ha che  $|f(t, x) - f(t, z)| < K|x - z|$ .

Ricordando il Corollario del teorema del valor medio visto in [D-INTERVALLI], si verifica per esempio che:

**Proposizione 3.2.** *Se  $f$  è continua e la restrizione di  $f$  ad ogni intervallo "verticale"  $\{t\} \times I \subset T \times I$  è di classe  $C^1$ , allora  $f$  è localmente Lipschitziana.*

Possiamo infine enunciare (omettendo la dimostrazione):

**Teorema 3.1. (Cauchy-Lipschitz)** *Supponiamo che  $f : T \times I \rightarrow \mathbb{R}$  sia continua e localmente Lipschitziana. Allora per ogni  $(t_0, x_0) \in T \times I$  esiste ed è unica una soluzione massimale  $y : J \rightarrow \mathbb{R}$  dell'equazione differenziale  $y' = f(t, y)$ , tale che  $t_0 \in J$  e  $y(t_0) = x_0$ .*

Questo teorema può essere visto come un'ampia estensione del teorema fondamentale del calcolo integrale per le funzioni continue; la sua dimostrazione è più riposta. Si noti che adesso, a differenza dell'integrale indefinito, lo stesso intervallo  $J$  può variare al variare del punto  $(t_0, x_0)$ .

Un risultato analogo vale più in generale per l'integrazione dei campi di vettori (di cui si parla alla fine della dispensa).

**3.3. Equazioni del primo ordine lineari.** Si tratta di studiare equazioni della forma

$$y' + a(t)y = b(t)$$

dove  $a(t)$  e  $b(t)$  sono continue. Quando  $a = 0$ , si riottiene il caso già familiare dell'integrale indefinito. In effetti queste equazioni lineari si integrano direttamente riconducendosi al caso degli integrali indefiniti. Secondo lo schema descritto sopra in generale per le equazioni di tipo lineare, determiniamo prima le soluzioni dell'equazione omogenea

$$y' + a(t)y = 0$$

e poi determineremo una soluzione particolare di quella non omogenea.

- (1) Fissiamo una primitiva  $A(t)$  di  $a(t)$  su tutto  $T$ . Poiché  $a$  è continua, basta fissare  $t_0 \in T$  e prendere la funzione integrale

$$A(t) = \int_{t_0}^t a(x)dx .$$

- (2) Osserviamo che  $y : T \rightarrow \mathbb{R}$  è soluzione di  $y' + a(t)y = 0$  se e solo se

$$e^{A(t)}(y'(t) + a(t)y(t)) = 0, \quad \forall t \in T$$

che può essere riscritta nella forma

$$(y(t)e^{A(t)})' = 0$$

da cui si ricava

$$y = ce^{-A(t)}, \quad c \in \mathbb{R} .$$

Possiamo quindi concludere che:

*Lo spazio vettoriale delle soluzioni massimali (definite su tutto  $T$ ) dell'equazione omogenea ha dimensione uguale a 1, e  $y(t) = e^{-A(t)}$  ne costituisce una base.*

- (3) Cerchiamo ora una soluzione particolare dell'equazione non omogenea. Lo facciamo applicando in questo caso particolare il metodo detto *della variazione della costante arbitraria*. Cioè cerchiamo una soluzione della forma:

$$y_0(t) = C(t)e^{-A(t)}$$

da cui

$$y_0'(t) = (C'(t) - a(t)C(t))e^{-A(t)}$$

sostituendo nell'equazione non omogenea si ottiene

$$C'(t) = e^{A(t)}b(t)$$

per cui possiamo infine scegliere

$$C(t) = \int_{t_0}^t e^{A(x)}b(x)dx .$$

Riassumendo:

*L'insieme delle soluzioni massimali (definite su tutto  $T$ ) dell'equazione non omogenea è formato dalle funzioni della forma*

$$y(t) = y_0(t) + ce^{-A(t)} = \left( \int_{t_0}^t e^{A(x)}b(x)dx \right) e^{-A(t)} + ce^{-A(t)}, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$A(t) = \int_{t_0}^t a(x)dx .$$

Riguardo al problema di Cauchy, considerando il punto  $(t_0, x_0)$ , ricaviamo univocamente la costante

$$c = x_0$$

che determina l'unica soluzione massimale passante per  $(t_0, x_0)$ . Variando il punto base  $t_0$ , vediamo direttamente che il problema di Cauchy è sempre risolubile (in accordo ma indipendentemente rispetto al teorema di Cauchy-Lipschitz).

Vediamo un esempio esplicito:

$$y' - \tan(t)y = \cos(t)$$

dove  $T = (-\pi/2, \pi/2)$ . Poiché

$$\frac{d}{dt} \log(\cos(t)) = -\tan(t)$$

l'integrale massimale generale dell'equazione omogenea è

$$y(t) = c \frac{1}{\cos(t)}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Una soluzione particolare dell'equazione non omogenea è

$$y_0(t) = \left( \int_0^t \cos^2(x) dx \right) \frac{1}{\cos(t)} = \\ \left( \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \sin(2t) \right) \frac{1}{\cos(t)}$$

**3.4. Equazioni del primo ordine a variabili separate.** Si tratta di studiare equazioni della forma

$$y' = a(t)b(y)$$

dove  $f(t, x) = a(t)b(x)$  è definita su  $T \times I$  ed è continua. E' il tipo più semplice di equazioni *non* lineari. Anche in questo caso ci ricondurremo allo studio di certi integrali indefiniti. Nonostante ciò, vedremo che a causa della non-linearità le soluzioni possono avere comportamenti sostanzialmente più complessi rispetto alle equazioni lineari. Le equazioni di questo tipo possono essere studiate seguendo il seguente schema:

- Si cercano gli eventuali zeri della funzione  $b(x)$ . Se  $x_0 \in I$  è un tale zero, la funzione costante  $y = x_0$  è una soluzione dell'equazione, la cui curva integrale è l'intervallo "orizzontale"  $T \times \{x_0\}$ .
- Si considerano tutti i sotto-intervalli aperti non vuoti di  $I$  contenuti in  $I \setminus \{b = 0\}$ . Per ciascuno di questi intervalli, sia  $L$ , consideriamo la restrizione di  $f$  su  $T \times L$  e studiamo la corrispondente equazione ristretta. Supponiamo per semplicità che per queste equazioni ristrette si possa applicare il teorema di Cauchy-Lipschitz.
- Fissiamo  $L$  come nel punto precedente. L'equazione può essere riscritta equivalentemente nella forma

$$\frac{y'}{b(y)} = a(t).$$

Se  $y : J \rightarrow \mathbb{R}$  è una soluzione (massimale), passando agli integrali indefiniti abbiamo

$$\int \frac{y'(t)}{b(y(t))} dt = \int a(t) dt$$

e usando le regole di integrazione per sostituzione otteniamo

$$\int \frac{1}{b(y)} dy = \int a(t) dt, \quad y = y(t).$$

La cosa può essere detta in altri termini: se

$$F : L \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_{x_0}^x \frac{1}{b(y)} dy$$

è una primitiva di  $\frac{1}{b} : L \rightarrow \mathbb{R}$ , se

$$A : T \rightarrow \mathbb{R}, \quad A(t) = \int_{t_0}^t a(s) ds$$

è una primitiva di  $a : T \rightarrow \mathbb{R}$ , allora al variare di  $c \in \mathbb{R}$ , l'equazione cartesiana

$$F(x) = A(t) + c$$

determina una curva  $\Gamma_c$  in  $T \times L$ . Fissato un punto  $(t_0, x_0) \in T \times L$ ,

$$c_0 = F(x_0) - A(t_0)$$

è l'unica costante tale che la curva  $\Gamma_{c_0}$  passa per  $(t_0, x_0)$ . Dunque l'unica soluzione massimale che passa per  $(t_0, x_0)$  parametrizza un arco di  $\Gamma_{c_0}$ . Possiamo così affermare che le soluzioni dell'equazione sono determinate *implicitamente* dalle relazioni

$$F(y(t)) = A(t) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

- Per svolgere il ragionamento precedente abbiamo assunto che il teorema di Cauchy-Lipschitz si potesse applicare all'equazione ristretta, per cui aveva senso riferirsi all'unica soluzione massimale che passa per  $(t_0, x_0) \in T \times L$ . In effetti si potrebbero sviluppare le considerazioni del punto precedente dimostrando *direttamente* (come nel caso lineare) che le conclusioni del teorema di C-L valgono in questa situazione. Ma non insistiamo su questo punto.
- Un'importante differenza che causa maggiori difficoltà, rispetto alle equazioni lineari, è che adesso, per ogni  $(t_0, x_0) \in T \times L$ , anche l'intervallo  $J \subset T$  su cui è definita l'unica soluzione massimale passante per  $(t_0, x_0)$  è una *incognita* del problema (ed in generale può variare al variare del punto). Nel caso lineare invece  $J$  è sempre uguale a tutto  $T$ .
- In certi (rari) casi risulta che la primitiva  $F$  è invertibile, per cui possiamo *esplicitare* le soluzioni:

$$y(t) = F^{-1}(A(t) + c).$$

In generale dobbiamo accontentarci della soluzione implicita che abbiamo ricavato.

- Abbiamo così determinato due tipi di soluzioni: quelle costanti con linea integrale orizzontale; quelle necessariamente non costanti per la restrizione dell'equazione su  $T \times L$ , dove  $L$  varia tra gli intervalli di  $I \setminus \{b = 0\}$ . Sia  $y = x_0$  una soluzione costante contenuta nel bordo del rettangolo aperto  $T \times L$ . Allora bisogna studiare il comportamento delle soluzioni non costanti rispetto a quelle costanti. In certi casi ci sono fenomeni di "raccordo" (tipo "scambio ferroviario") fra questi due tipi di soluzione. Questi fenomeni possono comportare che ci sono *diverse* soluzioni massimali passanti per un punto  $(t_0, x_0) \in T \times I$ . Se si realizza questa *perdita di unicità* delle soluzioni, necessariamente non sono verificate le ipotesi del teorema di C-L.

Mettiamo in pratica lo schema studiando un paio di esempi.

(1)

$$y' = a(t)b(y) = ty^2$$

dove  $f(t, x) = tx^2$  è definita su  $T \times I = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

$x = 0$  è uno zero "doppio" della funzione  $x^2$ . Consideriamo allora i due intervalli  $L^+ = \{x > 0\}$ ,  $L^- = \{x < 0\}$ . In entrambi i casi, separando le variabili su  $\mathbb{R} \times L^\pm$ ,

$$F(x) = -\frac{1}{x}$$

è una primitiva di  $\frac{1}{b(x)} = \frac{1}{x^2}$ ,

$$A(t) = \frac{1}{2}t^2$$

è una primitiva di  $a(t) = t$ . Dunque la famiglia di curve cartesiane  $\Gamma_c$  in  $\mathbb{R} \times L^\pm$  è definita dalle equazioni

$$-\frac{1}{x} = \frac{1}{2}t^2 + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Su  $\mathbb{R} \times L^+$ , necessariamente  $c > 0$  e  $t \in (-\sqrt{c}, \sqrt{c})$ . Allora  $y = \frac{2}{c-t^2}$  è una soluzione massimale dell'equazione e la curva integrale cioè il suo grafico in  $(-\sqrt{c}, \sqrt{c}) \times \mathbb{R}$  è simmetrico rispetto all'asse delle  $x$ , convesso con un punto di minimo assoluto per  $t = 0$  e due asintoti verticali.

Su  $\mathbb{R} \times L^-$ , ci sono due possibilità:

- se  $c < 0$ , allora  $y = \frac{2}{c-t^2}$  è una soluzione massimale definita su tutto  $\mathbb{R}$ . Il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse delle  $x$ , ha punto di minimo assoluto in  $t = 0$ , due punti di flesso simmetrici e asintoto orizzontale  $x = 0$  per  $t \rightarrow \pm\infty$ .
- Se  $c \geq 0$ , allora ci sono due soluzioni massimali definite rispettivamente sugli intervalli  $J^- = (-\infty, -\sqrt{c})$  e  $J^+ = (\sqrt{c}, +\infty)$ . I grafici sono concavi e hanno l'asintoto orizzontale  $x = 0$  per  $t \rightarrow \pm\infty$ , e ciascuno un asintoto verticale.

L'insieme di tutte le soluzioni così ottenute (costanti e non costanti) hanno curve integrali due a due disgiunte e quindi in questo caso il problema di Cauchy di esistenza e unicità ha soluzione positiva.

(2)

$$y' = a(t)b(t)$$

dove  $a(t) = t$ ,  $b(x) = \sqrt{x}$  se  $x \geq 0$ ,  $b(x) = 0$  se  $x < 0$ . Allora per ogni  $x_0 \leq 0$ , si ha la soluzione costante  $y = x_0$ . Consideriamo  $L = \{x > 0\}$  e restringiamo l'equazione su  $\mathbb{R} \times L$ .

$$F(x) = 2\sqrt{x}$$

$$A(t) = \frac{1}{2}t^2$$

quindi le curve  $\Gamma_c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , sono definite dalle equazioni

$$\sqrt{x} = \frac{t^2 + c}{4}.$$

Si ottengono allora le soluzioni massimali secondo la formula

$$y = \left(\frac{t^2 + c}{4}\right)^2$$

e definite per  $t^2 + c > 0$ . Quindi se  $c > 0$  sono definite su tutto  $\mathbb{R}$ ; il grafico è simmetrico rispetto all'asse delle  $x$ , convesso con punto di minimo assoluto in  $t = 0$ . Se  $c \leq 0$ , allora ci sono due soluzioni definite rispettivamente su  $J^- = (-\infty, -\sqrt{-c})$  e  $J^+ = (\sqrt{-c}, +\infty)$ . I grafici sono convessi e

$$\lim_{t \rightarrow \pm\sqrt{-c}} y(t) = 0.$$

E' chiaro che per ogni  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  esiste una soluzione massimale che passa per  $(t_0, x_0)$ . Si verifica infine che ci sono delle soluzioni non costanti dell'equazione definite su tutto  $\mathbb{R}$ , ottenute incollando per esempio la soluzione costante  $y = 0$  definita su  $(-\sqrt{-c}, \sqrt{-c})$  con le due soluzioni su  $\mathbb{R} \times L$  corrispondenti alla costante  $c < 0$ . Dunque per esempio per il punto  $(0, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  passano infinite soluzioni massimali dell'equazione.

**(3) (Equazione del primo ordine associata ad una famiglia di curve dipendente da un parametro - traiettorie ortogonali)** Prima abbiamo visto come lo studio di un'equazione differenziale ha dato luogo ad una famiglia di curve piane dipendenti da un parametro che fanno da supporto alle curve integrali. A volte questa procedura può essere invertita. Mostriamo come in un paio di esempi.

(i) Consideriamo la famiglia di ellissi data dalle equazioni cartesiane:

$$t^2 + 2x^2 = c^2, \quad c \in \mathbb{R}.$$

sostituiamo formalmente  $x = y(t)$  e deriviamo rispetto al tempo:

$$t + 2y(t)y'(t) = 0$$

allora l'equazione

$$y' = -\frac{t}{2y}$$



è a variabili separate e le corrispondenti curve  $\Gamma_c$  sono contenute nella famiglia di ellissi di partenza.

(ii) Consideriamo la famiglia di parabole

$$x = c(t - 1)^2, \quad c \in \mathbb{R}$$

sostituiamo formalmente  $x = y(t)$  e deriviamo rispetto al tempo:

$$\begin{aligned} y(t) &= c(t - 1)^2 \\ y' &= 2c(t - 1) \end{aligned}$$

otteniamo l'equazione

$$y' = 2 \frac{y}{t - 1}$$

(iii) Ricordiamo che in generale due rette di equazione

$$x = -mt, \quad x = \frac{1}{m}t, \quad (m \neq 0)$$

sono tra loro ortogonali. Allora, data una equazione

$$y' = f(t, y)$$

l'equazione

$$y' = -\frac{1}{f(t, y)}$$

ha la proprietà che le sue linee integrali sono ortogonali alle linee integrali della prima equazione. Se applichiamo per esempio questa considerazione all'equazione associata alla famiglia di ellissi dell'esempio (i), otteniamo l'equazione

$$y' = \frac{2y}{t}$$

che ha come famiglia di curve integrali la famiglia di parabole

$$x = ct^2.$$

**3.5. Altri esempi di equazioni del primo ordine.** Mostriamo alcuni altri tipi di equazione del primo ordine che con opportune manipolazioni possono essere ricondotte al caso lineare o a variabili separate.

**Nota.** Negli esempi che seguono metteremo più che altro in evidenza il tipo di manipolazione e la forma delle soluzioni. Sarà cura del lettore specificare i dettagli, quali per esempio gli effettivi intervalli di definizione delle soluzioni.

(1) **(Equazione di Bernoulli)** E' un'equazione della forma

$$y' + a(t)y = b(t)y^\alpha$$

dove  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ . Facciamo formalmente la sostituzione

$$y(t) = u(t)v(t)$$

dove le due funzioni  $u$  e  $v$  sono da determinare. Sostituendo nell'equazione si ottiene

$$u'(t)v(t) + u(t)v'(t) + a(t)u(t)v(t) = b(t)(u(t)v(t))^\alpha$$

da cui

$$v(u' + au) + v'u = b(uv)^\alpha$$

Imponiamo allora che

$$u' + a(t)u = 0$$

che sappiamo risolvere perché è lineare. Sostituendo una soluzione  $u = u(t)$  nell'equazione otteniamo

$$v' = [b(t)u(t)^{\alpha-1}]v^\alpha$$

che è a variabili separate. Vediamo un esempio concreto:

$$y' - \frac{4}{t}y = t\sqrt{y}$$

l'equazione lineare ausiliaria è allora

$$u' - \frac{4}{t}u = 0$$

che ha come soluzione particolare

$$u = t^4$$

sostituendo troviamo

$$v' = \frac{\sqrt{v}}{t}$$

ed infine l'integrale generale è della forma

$$v = t^4((1/2)\log(t) + c)^2, \quad c \in \mathbb{R}.$$

- (2) **(Equazioni omogenee)** L'aggettivo "omogeneo" ha qui un significato diverso da quello usato per le equazioni lineari. Infatti consideriamo equazioni della forma

$$y' = g\left(\frac{y}{t}\right)$$

dove

$$f(t, x) = g\left(\frac{x}{t}\right)$$

è omogenea nel senso che per ogni  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda \neq 0$ , per ogni  $(t, x)$ ,

$$f(\lambda t, \lambda x) = f(t, x).$$

Poniamo formalmente

$$y = tu$$

$$y' = u + tu'$$

$$u + tu' = f(u)$$

$$u' = \frac{f(u) - u}{t}$$

che è a variabili separate. Vediamo un esempio concreto:

$$y' = e^{y/t} + y/t.$$

Poniamo

$$y = tu$$

e svolgendo i conti otteniamo

$$u' = \frac{e^u + u - u}{t} = \frac{e^u}{t}$$

integrando si trova

$$u = -\log(\log(c/t)), \quad c \in \mathbb{R}$$

ed infine

$$y = -t \log(\log(c/t)), \quad c \in \mathbb{R}.$$

(3) Consideriamo un'equazione della forma

$$y' = f(at + my + c)$$

dove  $a, m, c \in \mathbb{R}$ ,  $m \neq 0$ . Poniamo formalmente

$$u = at + my + c, \quad y' = \frac{u' - a}{m}$$

da cui sostituendo otteniamo

$$\frac{u' - a}{m} = f(u)$$

$$u' = mf(u) - a = b(u)$$

che è a variabili separate con  $a(t) = 1$ .

(4) Consideriamo equazioni della forma

$$y' = f\left(\frac{a_1t + b_1y + c_1}{a_2t + b_2y + c_2}\right)$$

con la condizione che  $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ . L'algebra lineare ci dice che il sistema lineare ordinario

$$a_1\alpha + b_1\beta = -c_1, \quad a_2\alpha + b_2\beta = -c_2$$

nelle incognite  $\alpha, \beta$  ha un'unica soluzione  $(\alpha_0, \beta_0)$ . Poniamo allora formalmente

$$t = u + \alpha_0, \quad y = v + \beta_0$$

sostituendo nell'equazione otteniamo

$$v' = f\left(\frac{a_1u + b_1v}{a_2u + b_2v}\right) = g\left(\frac{v}{u}\right)$$

dove

$$g(z) = z \frac{a_1 + b_1z^{-1}}{a_2z + b_2}$$

dunque ci siamo ricondotti ad una equazione omogenea già trattata sopra.

(5) **(Equazioni non in forma normale)** In certi casi un'equazione non in forma normale può essere ricondotta ad equazioni in forma normale. Vediamo alcuni esempi:

(i) Supponiamo che l'equazione sia della forma

$$y = \phi(t)\psi(y') + \alpha(t)$$

allora introduciamo formalmente il parametro  $p = y'$ , riscriviamo

$$y = \phi(t)\psi(p) + \alpha(t)$$

e deriviamo rispetto a  $t$ , ottenendo

$$p = \phi'(t)\psi(p) + \phi(t)\psi'(p)p' + \alpha'(t)$$

da cui

$$p' = \frac{p - [\phi'(t)\psi(p) + \alpha'(t)]}{\phi(t)\psi'(p)}$$

che è in forma normale. Se sappiamo risolvere questa equazione in  $p$ , sostituendo troviamo le soluzioni in  $y$ . Vediamo un caso concreto

$$y = y'^2 - ty' + \frac{t^2}{2}$$

$$y = p^2 - tp + \frac{t^2}{2}$$

$$p = 2pp' - p - tp' + t$$

da cui

$$p' = \frac{2p - t}{2p - t} = 1$$

per cui

$$p = t + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$y = (t + c)^2 - t(t + c) + \frac{t^2}{2} = \frac{t^2}{2} + ct + c^2.$$

(ii) Consideriamo l'equazione

$$ty'2 + 2ty' - y = 0$$

che può essere trattata come prima facendo la sostituzione  $p = y'$ . Si ottiene

$$y = tp^2 + 2tp$$

$$p = p^2 + 2tpp' + 2p + 2tp'$$

da cui

$$p' = -\frac{p + p^2}{2t(1 + p)} = -\frac{p}{2t}$$

che è a variabili separate e quindi sappiamo studiare. In questo caso potevamo anche esplicitare  $y'$  ottenendo due equazioni in forma normale e omogenee

$$y' = -1 + \sqrt{1 + y/t}, \quad y' = -1 - \sqrt{1 + y/t}$$

a condizione che  $t(t + x) > 0$ .

Risulta che le curve  $\Gamma_c$  sono rispettivamente della forma

$$(\sqrt{1 + x/t} - 1)^2 = c/t, \quad (\sqrt{1 + x/t} + 1)^2 = c/t, \quad c \in \mathbb{R}$$

che possono essere inglobate in un'unica famiglia di parabole data da

$$(2t + x - c)^2 - 4(t^2 + tx) = 0$$

cioè

$$(x - c)^2 = 4ct.$$

Inoltre si verifica che  $y = -t$  è anch'essa una soluzione dell'equazione.

#### 4. INTEGRAZIONE DI CAMPI DI VETTORI - SISTEMI DI EQUAZIONI DEL PRIMO ORDINE

(*Rivolto soprattutto ad un lettore particolarmente interessato.*)

Riconsideriamo il campo di vettori

$$S : T \times I \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad S(t, x) = (1, f(t, x))$$

già introdotto quando abbiamo cominciato a studiare le equazioni del primo ordine in forma normale. Possiamo fare la seguente manipolazione formale:

- Cambiamo nome alle variabili ponendo  $(t, x) = (z_0, z_1) \in T \times I = I_0 \times I_1$ .
- Reintroduciamo un intervallo dei tempi  $T$ .
- Consideriamo

$$\tilde{f} : T \times (I_0 \times I_1) \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \tilde{f}(t, \bar{z}) = S(z_0, z_1)$$

così  $\tilde{f}$  può essere interpretato come un campo di vettori tangenti su  $I_0 \times I_1$  che *non* dipende dal tempo. A questo campo possiamo associare l'*equazione differenziale vettoriale* (a volte detto anche il *sistema di equazioni differenziali del primo ordine*)

$$(z'_0, z'_1) = S(z_0, z_1)$$

Se  $y = y(t)$  è una soluzione dell'equazione differenziale originale, allora  $(t, y(t))$  è una soluzione dell'equazione vettoriale associata.

Queste considerazioni ci fanno concludere che la situazione più generale in cui intervengono equazioni differenziali del primo ordine (in forma normale) è la seguente. Si considera una funzione continua

$$f : T \times (I_1 \times \cdots \times I_n) \rightarrow I_1 \times \cdots \times I_n$$

che interpretiamo come un campo di vettori tangenti su  $I_1 \times \cdots \times I_n$  dipendente dal tempo. Abbiamo l'equazione differenziale vettoriale (equivalentemente, il sistema di equazioni) associata:

$$(y'_1, \dots, y'_n) = f(t, y_1, \dots, y_n) .$$

Una soluzione  $\bar{y} = (y_1, \dots, y_n) : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  è definita su un sotto-intervallo aperto  $J$  di  $T$  e per ogni  $t \in J$  verifica

$$\bar{y}'(t) = (y'_1(t), \dots, y'_n(t)) = f(t, y_1(t), \dots, y_n(t)) .$$

Il grafico  $G(\bar{y})$  in  $J \times (I_1 \times \cdots \times I_n)$  è una curva integrale dell'equazione. Inoltre facendo la "sospensione" di  $f$ , possiamo riformulare l'equazione in modo equivalente nei termini di un'altra equazione vettoriale associata ad un campo di vettori tangenti su  $T \times (I_1 \times \cdots \times I_n) = (I_0 \times I_1 \times \cdots \times I_n)$  che *non* dipende dal tempo.

**4.1. Sui sistemi di equazioni differenziali del primo ordine lineari.** Sia  $A(t) = (a_{i,j}(t))_{i=1, \dots, m; j=1, \dots, n}$  una matrice  $m \times n$  dove ogni entrata è una funzione continua definita sull'intervallo  $T$ . Sia  $B(t) = (b_1(t), \dots, b_m(t))^t$  un vettore colonna con  $m$  righe, dove ogni  $b_j(t)$  è continua definita su  $T$ . Allora un sistema di equazioni differenziali del primo ordine di tipo lineare è della forma

$$\bar{y}' + A(t)y = B(t)$$

dove  $\bar{y} = (y_1, \dots, y_n)^t : T \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Si può verificare che lo spazio vettoriale delle soluzioni del sistema omogeneo associato

$$\bar{y}' + A(t)y = 0$$

ha dimensione uguale a  $n$ . La cosa è particolarmente semplice da verificare se  $A(t)$  è *diagonale*; infatti in tal caso ci riconduciamo ad un sistema di equazioni indipendenti in una variabile

$$y'_j + a_{j,j}(t)y_j = 0$$

che sappiamo trattare completamente. Una base dello spazio delle soluzioni sarà formata dalle funzioni a valori vettoriali  $y_j = e^{-A_{j,j}t} e_j$ , dove  $e_j$  è il  $j$ -esimo vettore della base canonica di  $\mathbb{R}^n$ . Per trovare una soluzione particolare del sistema non omogeneo, la cerchiamo della forma  $y^0 = \sum_j C_j(t) y_j(t)$  (metodo

della variazione delle costanti arbitrarie). Se  $A(t)$  è "*diagonalizzabile*" (se per esempio  $A(t) = A$  è costante ritroviamo la nozione abituale di matrice diagonalizzabile del corso di algebra lineare), allora possiamo ricondurci al caso diagonale per mezzo di un cambiamento globale di coordinate.