December 9, 2014

ARCHI DI CURVE

1. Introduzione

Nella definizione delle funzioni $\sin(t)$ e $\cos(t)$ siamo stati un po' vaghi nell'interpretare t come la "lunghezza dell'arco orientato" della circonferenza unitaria che delimita il corrispondente angolo. In particolare siamo stati vaghi nel definire 2π come la lunghezza della circonferenza unitaria. Uno degli scopi di questa breve nota è quello di precisare questo concetto, estendendolo ad una classe molto ampia di curve nel piano (e non solo). Useremo molte delle nozioni del calcolo differenziale e integrale che abbiamo sviluppato.

2. Interpretazione cinematica della derivata

Sia

$$f : I \to \mathbb{R}$$

una funzione derivabile definita sull'intervallo aperto I. Consideriamo la funzione associata

$$\phi : I \to \mathbb{R}^2,\ \phi(t) = (t, f(t)) \ .$$

Allora questa funzione ϕ realizza una *parametrizzazione* del grafico $G(f)$ considerato come una *curva* nel piano. Possiamo pensare t come il tempo e $G(f)$ come la traiettoria percorsa da un punto materiale che si muove sul piano con legge del moto data da ϕ. Deriviamo ora le due componenti di ϕ; otteniamo

$$v(t) := \phi'(t) = (1, f'(t)) \ .$$

Si nota che per ogni $t \in I$, $v(t) \neq (0, 0)$. Adesso la derivata di ϕ è un *vettore non nullo* di $\mathbb{R}^2$ che per ogni $t \in I$ può essere interpretato come il vettore *velocità* del punto all'istante t ed è tangente alla curva $G(f)$ nel punto $(t, f(t))$.
Questa discussione si può estendere ad una qualsiasi funzione

$$\phi = (f_1, f_2) : I \to \mathbb{R}^2$$

dove le due componenti sono entrambe derivabili ed inoltre $v(t) := (f_1'(t), f_2'(t)) \neq (0, 0)$ per ogni $t \in I$. $\Gamma := \phi(I)$ è ora una curva che può essere molto più complicata di un grafico. In particolare non richiediamo neanche che ϕ sia iniettiva, cioè la traiettoria del punto che si muove nel piano può occupare la stessa posizione in istanti diversi. Il vettore velocità è ora appunto $v(t) = (f_1'(t), f_2'(t))$ e per ogni $t \in I$ determina la retta tangente a Γ nell'istante t.

3. Lunghezza di un arco di curva

Consideriamo

$$\phi = (f_1, f_2) : I \to \mathbb{R}^2$$

come sopra e supponiamo di più che le due componenti siano $\mathcal{C}^1$, cioè che le due derivate siano continue.
Poniamo

$$|v(t)| = \sqrt{f_1'(t)^2 + f_2'(t)^2}$$

cioè il *modulo* del vettore velocità. Questo definisce una funzione *continua*

$$|v| : I \to \mathbb{R} \ .$$

Fissiamo un intervallo chiuso e limitato $[t_0, t_1] \subset I$; allora diciamo che

$$C = \phi([t_0, t_1])$$

è un *arco* "chiuso e limitato" di Γ. Poiché $|v|$ è continua, esiste l'integrale definito

$$\int_{t_0}^{t_1} |v(t)| dt \ .$$

Sia

$$r : J \to I$$

un'applicazione $\mathcal{C}^1$, iniettiva e con $r' > 0$, definita su un intervallo aperto J e tale che $[t_0, t_1] \subset r(J)$. Allora esiste $[s_0, s_1] \subset J$ tale che $r([s_0, s_1]) = [t_0, t_1]$. La composizione

$$\psi := \phi \circ r : [s_0, s_1] \to \mathbb{R}^2, \;\; \psi(s) = \phi(r(s))$$

è tale che

$$C = \psi([s_0, s_1])$$

e per questo è detta una *riparametrizzazione* dell'arco C. Usando le regole di derivazione per la composizione vediamo che

$$\bar{v}(s) := \psi'(s) = \phi'(r(s))r'(s) = v(r(s))r'(s)$$

$$|\bar{v}(s)| = |v(r(s))|r'(s) \;,$$

usando le regole di integrazione per cambiamento di variabile, abbiamo

$$\int_{s_0}^{s_1} |\bar{v}(s)|ds = \int_{t_0}^{t_1} |v(t)|dt \;.$$

Dunque questo numero non dipende dalla scelta della parametrizzazione ma solo dall' arco C e viene definito la *lunghezza di* C e lo indichiamo con $l(C)$. Notiamo anche che la funzione integrale

$$l(t) = \int_{t_0}^{t} |v(x)|dx$$

esprime la lunghezza del sotto-arco di C percorso dal punto al tempo t, partendo dall'istante iniziale t_0. Supponiamo adesso che $|v(t)| = 1$ per ogni t. In tal caso per ogni $t \in [t_0, t_1]$, $l(t) = t - t_0$, dunque la lunghezza del sotto-arco è uguale alla lunghezza del corrispondente sotto-intervallo dei parametri $[t_0, t]$. Necessariamente in questo caso $t_1 - t_0 = l(C)$. La parametrizzazione che verifica queste proprietà è speciale e viene detta *parametrizzazione secondo la lunghezza dell'arco* o anche *parametrizzazione naturale.* Supponiamo che ϕ sia una arbitraria parametrizzazione dell'arco C e vogliamo riparametrizzare mediante $r : [0, l(C)] \to [t_0, t_1]$ in modo che $\psi = \phi \circ r$ sia la parametrizzazione naturale. Consideriamo come sopra la funzione integrale associata a ϕ

$$l(t) = \int_{t_0}^{t} |v(x)|dx$$

questa definisce un'applicazione crescente quindi bigettiva

$$l : [t_0, t_1] \to [0, l(C)]$$

sia

$$r : [0, l(C)] \to [t_0, t_1]$$

l'applicazione inversa; verifichiamo allora che $\psi = \phi \circ r$ è la parametrizzazione naturale cercata, infatti:

$$\psi'(s) = \phi'(r(s))r'(s), \quad r'(s) = \frac{1}{|v(r(s))|} \;.$$

Dunque esiste sempre ed è unica la parametrizzazione secondo la lunghezza dell'arco di un qualsiasi arco di classe $\mathcal{C}^1$. Supponiamo ora che le componenti di ϕ siano $\mathcal{C}^2$. Allora, per ogni t, il vettore

$$a(t) = v'(t)$$

si chiama il vettore *accelerazione* del punto $\phi(t)$ all'istante t. Se ϕ è la parametrizzazione speciale secondo la lunghezza dell'arco, allora derivando

$$|v(t)|^2 = (f_1')^2(t) + (f_2')^2(t) = 1$$

otteniamo

$$2(f_1'(t)f"_1(t) + f_2'(t)f_2"(t) = 0$$

cioè, per ogni t, i vettori velocità $v(t)$ e accelerazione $a(t)$ sono tra loro *ortogonali.*

4. Le funzioni sin, cos e π rivisitati

Consideriamo la circonferenza unitaria $C = \{x^2 + y^2 = 1\}$ in $\mathbb{R}^2$. Allora $\phi(t) = (\cos(t), \sin(t))$, $t \in [0, l(C)]$ è *definita* come la parametrizzazione secondo la lunghezza di arco di C tale che $\phi(0) = \phi(l(C)) = (1, 0)$ e C è percorsa in senso antiorario. Si noti che tutto è coerente perché $v(t) = (-\sin(t), \cos(t))$ da cui $|v(t)| = 1$ e $a(t) = (-\cos(t), -\sin(t))$ è ortogonale a $v(t)$. Infine *poniamo* $2\pi = l(C)$.

Osserviamo infine che tutti gli argomenti possono essere applicati ad ogni parametrizzazione $\phi = (f_1, \dots, f_n) : I \to \mathbb{R}^n$ di una curva in $\mathbb{R}^n$ (per esempio se $n = 3$ abbiamo una curva nello spazio, se $n = 4$ abbiamo una curva nello "spazio-tempo" etc.)