

Analisi I - IngBM - 2014-15
COMPITO B 19 Gennaio 2016

COGNOME NOME

MATRICOLA VALUTAZIONE + =

1. ISTRUZIONI

Gli esercizi devono essere svolti negli appositi spazi del presente fascicolo; solo questo sarà ritirato e valutato. I fogli a quadretti messi a disposizione possono essere usati liberamente ma in nessun caso saranno ritirati. Il compito è composto di due parti. La prima parte deve essere svolta preliminarmente. Essa verrà corretta per prima e valutata con un punteggio di $0 \leq x \leq 10$ punti. Condizione necessaria affinché venga preso in considerazione l'eventuale svolgimento della seconda parte è che $x \geq 6$. In tal caso la seconda parte viene valutata con un punteggio di $0 \leq y \leq 24$ punti. Il compito sarà sufficiente per l'ammissione alla prova orale se $x + y \geq 18$. In tal caso il voto di ammissione all'orale sarà $v = \min(28, x + y)$.

Attenzione. Tutte le risposte devono essere giustificate.

2. PRIMA PARTE

Esercizio 0 (punti 0). Leggere e capire le istruzioni.

Esercizio 1. (3 punti) Sia a_n la successione

$$a_n = \frac{\sqrt[n]{n^n + 3^n}}{n}$$

Si dica se esiste il limite $L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ e, in caso affermativo, calcolarlo.

SOLUZIONE.

Il limite L non esiste

Il limite L esiste e vale 1

perché il limite proposto può essere calcolato in vari modi: uno di questi è osservare che

$$n = \sqrt[n]{n^n} < \sqrt[n]{n^n + 3^n}$$

e che per $n > 3$ si ha

$$\sqrt[n]{n^n + 3^n} < \sqrt[n]{n^n + n^n} = \sqrt[n]{2n^n} = n \sqrt[n]{2}$$

da cui otteniamo

$$1 < a_n < \sqrt[n]{2}$$

da cui, per il teorema del confronto, la tesi.

Esercizio 2. (3 punti) Dire se esiste e, in caso affermativo, calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{\sin 2x}}{\sin 2x}$$

SOLUZIONE \square Il limite L non esiste Il limite L esiste e vale -1
 perché si può calcolare il limite in vari modi. Dal teorema di de l'Hôpital abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{\sin 2x}}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \cos 2x e^{\sin 2x}}{2 \cos 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} -e^{\sin 2x} = -1$$

Esercizio 3. (4 punti) Discutere la veridicità o meno dei seguenti enunciati.

- (1) Sia a_n una successione di numeri reali convergente ad un limite finito $a \in \mathbf{R}$. Allora esiste un $H \in \mathbf{R}$ tale che $|a_n| \leq H$ per ogni n .
- (2) Sia a_n una successione di numeri reali per cui esiste $H \in \mathbf{R}$ tale che per ogni n si ha $|a_n| \leq H$. Allora la successione converge ad un limite finito $a \in \mathbf{R}$.

SOLUZIONE.

- (1) VERO \square FALSO
 perché dalla definizione stessa di limite si ha che fissato un ε esiste un \bar{n} per cui se $n > \bar{n}$ si ha $|a_n - a| < \varepsilon$. Per cui detto H il massimo tra $\{|a_1|, \dots, |a_{\bar{n}}|, |a + \varepsilon|, |a - \varepsilon|\}$ si ha $|a_n| \leq H$.
- (2) \square VERO FALSO
 perché basta considerare la successione

$$a_{2k} = 0, a_{2k+1} = 1.$$

per fornire un controesempio.

3. SECONDA PARTE

Esercizio 1. (6 punti)

Sia $f(x)$ la funzione da \mathbf{R} a \mathbf{R} definita dalla formula $f(x) = |x - 3| - |x + 2|$

- (1) Si descriva il più grande sottoinsieme aperto D di \mathbf{R} in cui la funzione $f(x)$ è derivabile.
- (2) Descrivere l'insieme dei punti di massimo e minimo relativi e assoluti della funzione $f(x)$
- (3) Descrivere gli eventuali asintoti del grafico della $f(x)$.
- (4) Sia a_n la successione definita da

$$a_n = \int_n^{n+1} f(x) dx$$

Dire se esiste il $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

SOLUZIONE.

- (1) $D = \mathbf{R} - \{-2, 3\}$. In tale insieme la funzione è derivabile valendo

$$f(x) = \begin{cases} 5 & \text{per } x \leq -2 \\ 1 - 2x & \text{per } -2 \leq x \leq 3 \\ -5 & \text{per } 3 \leq x \end{cases}$$

mentre nel complementare, cioè nei punti -2 e 3 , $f(x)$ non lo è in quanto il limite destro del rapporto incrementale è diverso dal limite sinistro.

- (2)
 - L'insieme dei punti di massimo assoluto è l'insieme $(-\infty, -2]$
 - L'insieme dei punti di massimo relativo è $(-\infty, -2] \cup (3, +\infty)$
 - L'insieme dei punti di minimo assoluto è $[3, +\infty)$
 - L'insieme dei punti di minimo relativo è $(-\infty, -2) \cup [3, +\infty)$

- (3) Il grafico non ammette asintoti

Gli asintoti del grafico della $f(x)$ sono le rette $y = 5$ e $y = -5$

perché, essendo la funzione definitivamente costante si ha che $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 5$ e

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -5$.

- (4) Il limite proposto non esiste Il limite esiste e vale -5
perché la successione a_n vale definitivamente -5 .

Esercizio 2. (4 punti)

Sia $f(x) = e^{-x} - \frac{2x^2}{2x^2 + 1}$

- a) Provare che esiste almeno un $\bar{x} > 0$ tale che $f(\bar{x}) = 0$
- b) Dire se un tale $\bar{x} > 0$ è unico.

SOLUZIONE.

- a) Essendo $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -1$ esiste (permanenza del segno) un $K > 0$ tale che $f(K) < 0$. Poiché $f(0) = 1$ si ha che nell'intervallo $[0, K]$ la funzione assume agli estremi valori opposti, quindi ha in tale intervallo almeno uno zero \bar{x} .

- b) Tale \bar{x} è unico poiché la derivata della funzione $f(x)$ vale $f'(x) = -e^{-x} - \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}$ e per $x > 0$ $f'(x) < 0$, quindi la funzione è strettamente decrescente.

Esercizio 3. (6 punti) Sia X l'insieme degli $z \in \mathbf{C}$ per cui

$$e^{|z|^2 + z^2} = 1$$

Provare che X è l'insieme dei numeri immaginari puri, ossia i numeri complessi del tipo αi con α numero reale. In simboli $X = i\mathbf{R}$.

SOLUZIONE.

Una verifica immediata mostra che $i\mathbf{R} \subset X$. Per mostrare il viceversa sia $z = a + ib$ un numero complesso. Si ha

$$e^{|z|^2 + z^2} = e^{a^2 + b^2 + (a^2 - b^2 + 2abi)} = e^{2a^2 + 2abi} = e^{2a^2} e^{2abi} = e^{2a^2} (\cos(2ab) + i \sin(2ab))$$

da cui si ha che, dovendo avere tale numero modulo 1, necessariamente deve essere $a = 0$ e quindi $z \in i\mathbf{R}$.

Esercizio 4. (8 punti)

Calcolare la soluzione dell'equazione differenziale

$$y'' - 9y = \cos t$$

tale che $y(0) = y'(0) = 1$.

SOLUZIONE.

Essendo le soluzioni dell'equazione caratteristica -3 e 3 , si ha che la soluzione generale dell'equazione omogenea è del tipo $C_1 e^{-3t} + C_2 e^{3t}$.

Cerchiamo una soluzione particolare del tipo $y(t) = \alpha \sin t + \beta \cos t$. Facendo i calcoli otteniamo $y'' = -\alpha \sin t - \beta \cos t$ e quindi

$$-\alpha \sin t - \beta \cos t - 9(\alpha \sin t + \beta \cos t) = -10\alpha \sin t - 10\beta \cos t = \cos t$$

che per l'indipendenza delle funzioni $\sin t$ e $\cos t$ implica $\alpha = 0$ e $\beta = -\frac{1}{10}$.

Quindi la soluzione dell'equazione proposta è del tipo $C_1 e^{-3t} + C_2 e^{3t} - \frac{1}{10} \cos t$.

Imponendo ora le condizioni iniziali otteniamo

$$\begin{cases} C_1 + C_2 - \frac{1}{10} = 1 \\ -3C_1 + 3C_2 = 1 \end{cases}$$

da cui si ottiene $C_1 = \frac{23}{60}$ e $C_2 = \frac{43}{60}$.

In definitiva la soluzione del problema di Cauchy proposto è $y(t) = \frac{23}{60} e^{-3t} + \frac{43}{60} e^{3t} - \frac{1}{10} \cos t$.