HBV-4

Estratto dagli *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa*
Classe di Scienze, Vol. XXVI, Fasc. II, (1972)

EQUAZIONI ELLITTICHE NON LINEARI CON OSTACOLI SOTTILI. APPLICAZIONI ALLO STUDIO DEI PUNTI REGOLARI

HUGO BEIRÃO DA VEIGA (*) · FRANCO CONTI (**)

SUMMARY. - In this paper we prove the Hölder-continuity of the weak solutions of some non linear elliptic differential problems with internal $(n-1)$-dimensional obstacles. Applications to boundary regular points are given.

Introduzione.

Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ e sia $\mathbb{K}_\psi$ il convesso delle funzioni di $H_0^{1,\alpha}(\Omega)$ che sono maggiori od uguali ad una funzione ψ assegnata su un sottoinsieme chiuso di Ω (v. (2.2)). Prenderemo in considerazione il seguente problema: trovare $u \in \mathbb{K}_\psi$ tale che

$$\int_\Omega A_i(x, Du)\; D_i(v-u)\, dx \geq \int_\Omega f_i D_i(v-u)\, dx \quad \forall\, v \in \mathbb{K}_\psi, \tag{0.1}$$

essendo $A_i(x,p)$ funzioni soddisfacenti le condizioni (2.3) e (2.4), ed f_i elementi di $L^{\alpha'}(\Omega)$. Dalle ipotesi fatte sulle funzioni $A_i(x,p)$ segue, per risultati ben noti, che il problema considerato ammette soluzione unica.

In questo lavoro dimostreremo che se $f_i \in L^p(\Omega)$ con $p > n/(\alpha-1)$, e se $\psi \in H^{1,q}(\Omega)$ con $q > n$, allora la soluzione u del problema (0.1) è hölde-

---

Pervenuto il 29 Marzo 1971, e in forma definitiva il 18 Maggio 1971.

(*) Borsista dell'Institnto de Alta Cultura (Portogallo).

(**) Istituto di Matematica dell'Università di Roma; Lavoro eseguito con contributo del C. N. R. nell'ambito del Gruppo Nazionale per l'Analisi Funzionale e le sue Applicazioni.

riana di esponente γ ed inoltre è verificata la maggiorazione:

$$\| u \|_{C^{0,\gamma}(\bar{\Omega})} \leq C \left(\sum_{i=1}^{n} \| f_i \|_q^{\frac{1}{\alpha - 1}} + \| \psi \|_{1,p} \right), \tag{0.2}$$

(cfr. teorema (2.1).

Evidentemente la condizione di Dirichlet $u = 0$ su $\partial\Omega$ può essere sostituita con la condizione $u = \zeta$ su $\partial\Omega$, ove $\zeta \in H^{1,q}$ con $q > n$; in questo caso nel secondo membro della (0.2) compare anche la norma $\| \zeta \|_{1,p}$. Più in generale risultati del tutto analoghi si possono ottenere sostituendo alla condizione di Dirichlet altre condizioni di frontiera e considerando operatori differenziali del tipo

$$\mathcal{A} u = - \frac{\partial}{\partial x_i} A_i(x, u, Du) + B(x, u, Du),$$

ove le funzioni A_i e B soddisfano opportune ipotesi (cfr. [2]).

Problemi con ostacoli sono stati considerati da diversi autori, cfr. ad esempio [7], [5], [8]. La tecnica usata in questo lavoro per la dimostrazione del teorema 2.1 è un raffinamento di quelle introdotte da De Giorgi ([6]), Stampacchia ([10]) ed adoperate in [2]. Il metodo usato per trovare la maggiorazione (4.48) ha un carattere generale, e può ad esempio essere usato per ottenere una maggioraziane per i problemi studiati in [1].

Nell'ultimo paragrafo, oltre a fornire alcuni significativi esempi, ricaveremo dal teorema di hölderianità 2.1 una condizione sufficiente affinché un punto di frontiera sia regolare per il problema di Dirichlet relativo all'operatore (5.1). Più precisamente proveremo che se esiste un cono $(n-1)$-dimensionale, con vertice in $y \in \partial\Omega$ e contenuto nel complementare di Ω, allora y è regolare (cfr. teorema 5.5).

§ 1. Notazioni e definizioni preliminari.

Con Ω indichiamo un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$, localmente dalla stessa parte della sua frontiera $\partial\Omega$ che supporremo regolare (ad esempio di classe C^1), con $\bar{\Omega}$ indichiamo la chiusura di Ω.

$I(x_0, \varrho)$ è la sfera aperta di centro x_0 e raggio ϱ.

Per ogni $\varrho > 0$ e $\omega > 0$ indichiamo con $C_{\varrho,\omega}$ il cono $(n-1)$-dimensionale

$$C_{\varrho,\omega} = \{x \in \mathbb{R}^n ;\ x_1 \geq 0,\ x_n = 0,\ |x| \leq \varrho,\ |x|^2 \leq (1+\omega)\, x_1^2\}. \tag{1.1}$$

Se $1 < p < +\infty$, indichiamo con $\|f\|_p$ la norma della funzione f nello spazio $L^p(\Omega)$; con $\|f\|_\infty$ indichiamo la norma di f in $L^\infty(\Omega)$.

$C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$ è lo spazio delle funzioni hölderiane in $\overline{\Omega}$ con esponente γ $(0 < \gamma \leq 1)$ munito della norma

$$\|f\|_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} = \|f\|_\infty + [f]_{\gamma,\Omega},$$

ove

$$[f]_{\gamma,\Omega} = \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\gamma}.$$

Se f è una funzione derivabile indichiamo con Df il vettore $(D_1 f, D_2 f, \ldots$ $\ldots, D_n f)$ e con $|Df|$ la sua lunghezza.

$H^{1,p}(\Omega)$ è il completamento di $C^1(\overline{\Omega})$, spazio delle funzioni con derivate parziali continue in $\overline{\Omega}$, rispetto alla norma

$$\|f\|_{1,p} = \|f\|_p + \|Df\|_p \qquad (p > 1).$$

$H_0^{1,p}(\Omega)$ è l'aderenza in $H^{1,p}(\Omega)$ dello spazio $C_0^1(\Omega)$ delle funzioni di $C^1(\overline{\Omega})$ che sono a supporto compatto in Ω. In tale spazio le norme

$$\|Df\|_p = \|f\|_{H_0^{1,p}(\Omega)} \quad \text{e} \quad \|f\|_{1,p}$$

sono equivalenti. Per comodità poniamo $\|\,|Df|\,\| = \|Df\|$.

$H_0^{1,p}(\Omega)$ è uno spazio di Banach separabile e riflessivo ed il suo duale $H^{-1,p'}(\Omega)$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$, è isomorfo allo spazio delle distribuzioni che sono somme di derivate prime di funzioni di $L^{p'}(\Omega)$.

Se E è un sottoinsieme chiuso di Ω, una funzione $f \in H^{1,p}(\Omega)$ si dice non negativa su E nel senso di $H^{1,p}(\Omega)$ se esiste una successione $\{f_m\}$ di funzioni di $C^1(\overline{\Omega})$ che converge ad f in $H^{1,p}(\Omega)$ e tale che $f_m \geq 0$ su E. Due funzioni f e g di $H^{1,p}(\Omega)$ sono tali che $f \geq g$ su E nel senso di $H^{1,p}(\Omega)$ se la funzione $f - g$ è non negativa su E nel senso di $H^{1,p}(\Omega)$.

Indichiamo con $C, \widetilde{C}, \overline{C}, C_1\, C_2, \ldots,$ delle costanti dipendenti al più da $\Omega, E, \alpha, n, p, q, \nu, \mu$; invero tali costanti non dipendono dalle particolari f_i in L^q e ψ in $H^{1,p}$. Lo stesso simbolo potrà indicare costanti diverse, anche nel corso di una stessa dimostrazione.

§ 2. Il problema. Risultati ottenuti.

Sia E un chiuso contenuto in Ω soddisfacente alla seguente condizione:
— esistono due numeri positivi ω, ϱ_0 tali che per ogni $x_0 \in E$ e per ogni $0 < \varrho \leq \varrho_0$ si possa trovare una trasformazione bilipschitziana T di $I(x_0, \varrho)$ in $I(0, \varrho)$ in maniera che risulti

$$T(E \cap I(x_0, \varrho)) \supset C_{\varrho, \omega} \tag{2.1}$$

Supporremo che le costanti di Lipschitz di T e di T^{-1} siano non superiori ad un numero η; inoltre potremo supporre

$$\varrho_0 < \operatorname{dist}(E, \partial\Omega); \ \varrho_0 < 1.$$

Nel paragrafo 5 saranno forniti alcuni esempi di insiemi verificanti le condizioni sopra imposte; si osservi che E può essere $(n-1)$-dimensionale.

Sia $\psi \in H_0^{1,\alpha}(\Omega)$ con $1 < \alpha < n$; indicheremo con $\mathbb{K}_\psi$ il seguente convesso chiuso di $H_0^{1,\alpha}(\Omega)$:

$$\mathbb{K}_\psi = \{v \in H_0^{1,\alpha}(\Omega); \ v \geq \psi \text{ su } E\}. \tag{2.2}$$

Osserviamo che se $\psi' = \psi$ su E nel senso di $H^{1,\alpha}$ evidentemente si ha $\mathbb{K}_{\psi'} = \mathbb{K}_\psi$.

Siano $A_i(x, p)$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ delle funzioni reali definite su $\Omega \times \mathbb{R}^n$, continue in p per quasi tutti gli x, misurabili in x per ogni p, tali inoltre che esistano due costanti positive ν e μ in modo che per ogni $p \in \mathbb{R}^n$ e quasi tutti gli $x \in \Omega$ risultino soddisfatte le condizioni:

$$\begin{cases} A_i(x, p)\, p_i \geq \nu\, |p|^\alpha, \ ^{(1)} \\ |A_i(x, p)| \leq \mu\, |p|^{\alpha - 1}, \end{cases} \tag{2.3}$$

$$[A_i(x, p) - A_i(x, q)](p_i - q_i) > 0 \quad \text{se } p \neq q. \tag{2.4}$$

Considereremo il seguente

Problema 2.1. *Dato un funzionale $F \in H^{-1,\alpha'}(\Omega)$, trovare una funzione $u \in \mathbb{K}_\psi$ tale che*

$$\int_\Omega A_i(x, Du)\, D_i(v - u)\, dx \geq \langle F, v - u \rangle, \ \forall\, v \in \mathbb{K}_\psi. \tag{2.5}$$

---

(1) Qui e nel seguito sottointendiamo la sommatoria sugli indici ripetuti.

L'esistenza e l'unicità della soluzione del problema suddetto provengono dalla forte monotonia, dalla emicontinuità e dalla coercività dell'operatore $\mathcal{A} : H^{1,\alpha}(\Omega) \longrightarrow H^{-1,\alpha'}(\Omega)$ così definito:

$$\langle \mathcal{A}(u), v \rangle = \int_\Omega A_i(x, Du)\, D_i v\, dx \quad \forall\, v \in H^{1,\alpha}(\Omega) \tag{2.6}$$

Senza ledere la generalità potremo supporre che risulti

$$\langle F, v \rangle = \int_\Omega f_i\, D_i v\, dx, \qquad \text{ove } f_i \in L^{\alpha'}(\Omega),\ i = 1, 2, \dots, n.$$

Osserviamo fin d'ora (v. [2]) che se sono soddisfatte le condizioni

$$f_i \in L^q(\Omega) \text{ con } q > \frac{n}{\alpha - 1},\ i = 1, 2, \dots, n, \tag{2.8}$$

$$\psi \in H^{1,p}(\Omega) \text{ con } p > n, \tag{2.9}$$

esiste una costante C tale che risulti

$$\| u \|_\infty \leq C\left(\sum_{i=1}^n \| f_i \|_q^{\frac{1}{\alpha-1}} + \| \psi \|_{1,p} \right). \tag{2.10}$$

Inoltre è ben noto che se $p > n$ si ha

$$H^{1,p}(\Omega) \subset C^{0,1-\frac{n}{p}}(\overline{\Omega}), \tag{2.11}$$

e pertanto la « funzione ostacolo » ψ, soddisfacente all'ipotesi (2.9), può essere prolungata a tutto $\overline{\Omega}$ come funzione hölderiana.

In questo lavoro dimostreremo il seguente

TEOREMA 2.1. *Nelle ipotesi* (2.8), (2.9) *esistono due costanti positive* γ *e* C *tali che la soluzione* u *del problema* 2.1 *appartiene a* $C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$ *ed inoltre si ha:*

$$\| u \|_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} \leq C\left(\sum_{i=1}^n \| f_i \|_q^{\frac{1}{\alpha-1}} + \| \psi \|_{1,p} \right) \tag{2.12}$$

OSSERVAZIONE 2.2. I risultati qui esposti, ed in particolare il teorema 2.1, sono validi in ipotesi più generali sull'insieme E. Alla condizione (2.1) può essere sostituita la seguente:

$E \subset \Omega$ è un chiuso tale che si possono trovare due insiemi E_0, E_1 e due numeri positivi ω, ϱ_0 in modo che risulti:

(*a*) $E = E_0 \cup E_1$,

(*b*) *per ogni $x_0 \in E_0$ ed ogni $0 < \varrho \leq \varrho_0$ esista una trasformazione bilipschitziana T di $I(x_0, \varrho)$ in $I(0, \varrho)$ tale che*

$$T(E \cap I(x_0, \varrho)) \supset C_{\varrho, \omega}$$

(*c*) *ad ogni $x_1 \in E_1$ si possa associare un punto $x_0 \in E_0$, con $|x_1 - x_0| < \varrho_0$, tale che la condizione (b) sia soddisfatta per ogni $\varrho < |x_1 - x_0|$.*

Scelto allora per ogni $x_1 \in E_1$ un tale x_0 si può porre $\delta_1(x_1) = |x_1 - x_0|$, ed anche, per ogni $y \in E$:

$$\delta(y) = \begin{cases} \delta_1(y) & \text{se } y \in E_1 \\ \varrho_0 & \text{se } y \in E_0 \end{cases}.$$

Con tali ipotesi sull'insieme E le dimostrazioni delle proposizioni contenute in questo lavoro restano invariate, pur di sostituire $\delta(y)$ a ϱ_0, ad eccezione della dimostrazione del Corollario 4.5, che viene svolta esplicitamente nell'osservazione 4.6.

§ 3. Alcuni lemmi preliminari.

Iniziamo questo paragrafo con alcuni lemmi che forniscono delle maggiorazioni locali per funzioni di $H^{1,\alpha}$ e per le loro «troncate»; tali maggiorazioni sono indipendenti dalla disequazione variazionale (2.5).

Lemma 3.1. *Sia E un chiuso contenuto in Ω soddisfacente alla condizione (2.1); esiste allora una costante positiva C_1 tale che per ogni $y \in E$ ed ogni $\varrho < \varrho_0$ risulti*

$$|v(x)| \leq C_1 \int_{I(y,\varrho)} \frac{|Dv(t)|}{|x - t|^{n-1}}\, dt, \qquad x \in I(y, \varrho) \text{ q. o.,} \tag{3.1}$$

per ogni funzione $v \in H^{1,\alpha}(I(y, \varrho))$ nulla su un sottoinsieme di misura maggiore od uguale a $\dfrac{1}{4}|I(y, \varrho)|$, oppure nulla su $E \cap I(y, \varrho)$.

Dim. Se v soddisfa la prima condizione, la (3.1) è nota (v. [9]). Nel caso invece in cui v è nulla su $E \cap I(y, \varrho)$, mediante la trasformazione T introdotta all'inizio del paragrafo 2 ci si può ricondurre a dimostrare la

(3.1) in $I(0, \varrho)$ per funzioni nulle su $C_{\varrho, \omega}$. Tramite un'omotetia si potrà supporre $\varrho = 1$. Poiché esiste una trasformazione bilipschitziana S di $I(0, 1)$ in sé tale che $S(C_{1, \omega})$ sia « visto » da ogni punto di $I(0, 1)$ sotto un angolo solido di misura maggiore di una costante positiva, si ha la tesi (v. [9]).

LEMMA 3.2. *Esiste una costante positiva C_2 tale che nelle ipotesi del lemma precedente si abbia*

$$\left(\int_{I(y, \varrho)} |v|^{\alpha^*} dx \right)^{\frac{1}{\alpha^*}} \leq C_2 \left(\int_{I(y, \varrho)} |Dv|^{\alpha} dx \right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

ove $\dfrac{1}{\alpha^*} = \dfrac{1}{\alpha} - \dfrac{1}{n}$.

Il lemma 3.2 si dimostra tenendo presente la (3.1) e la nota maggiorazione di Sobolev

$$\| U_1 \|_{L^{\alpha^*}(\mathbb{R}^n)} \leq \widetilde{C}_2 \| Dv \|_{L^{\alpha}(I(y, \varrho))},$$

ove

$$U_1(x) = \int_{I(y, \varrho)} \frac{|Dv(t)|}{|x - t|^{n-1}} dt.$$

LEMMA 3.3. *Se μ è una misusa positiva a variazione limitata in $\mathbb{R}^n$, esiste una costante C tale che*

$$|\{x \in \mathbb{R}^n ; |U_1^{\mu}(x)| \geq \sigma\}| \leq \left(\frac{C \int d\mu}{\sigma} \right)^{\frac{n}{n-1}} \quad \forall \sigma > 0, \tag{3.3}$$

ove

$$U_1^{\mu}(x) = \int_{I(y, \varrho)} \frac{d\mu(t)}{|x - t|^{n-1}}.$$

La dimostrazione del Lemma 3.3 segue dalle maggiorazioni:

$$\operatorname{cap}_1^* \{x \in \mathbb{R}^n ; |U_1(x)| \geq \sigma\} \leq \frac{2^{n-1} \int d\mu}{\sigma},$$

$$|E| \leq \overline{C} (\operatorname{cap}_1^* E)^{n/n-1},$$

ove $\operatorname{cap}_1^* E$ è la capacità interna di ordine 1 dell'insieme misurabile E.

Data una funzione $v \in H^{1,\alpha}(\Omega)$ ed un punto $y \in E$, per ogni reale k ed ogni $0 < \varrho \leq \varrho_0$, indicheremo con $A(k)$, $B(k)$, $A(k, \varrho)$, $B(k, \varrho)$ i seguenti insiemi

$$\text{(3.4)} \qquad \begin{cases} A(k) = \{x \in \Omega\,;\; v \geq k\}, \\ B(k) = \{x \in \Omega\,;\; v \leq k\}, \\ A(k, \varrho) = \{x \in I(y, \varrho)\,;\; v \geq k\}, \\ B(k, \varrho) = \{x \in I(y, \varrho)\,;\; v \leq k\}. \end{cases}$$

LEMMA 3.4. *Sia* $v \in H^{1,\alpha}(\Omega)$; *siano* h *e* k *due numeri reali,* $0 < \varrho < R < \varrho_0$ *ed* $y \in E$. *Si ha,*
se $h < k$:

$$\text{(3.5)} \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{B(h,\varrho)} (h - v)^\alpha\, dx \leq C\left[\frac{1}{(R-\varrho)^\alpha}\int_{B(k,R)} (k - v)^\alpha\, dx + \int_{B(k)} |Dv|^\alpha \varphi^\alpha\, dx\right] \\ \displaystyle |B(h, \varrho)|\,(k - h)^\alpha \leq C\left[\frac{1}{(R-\varrho)^\alpha}\int_{B(k,R)} (k - v)^\alpha\, dx + \int_{B(k)} |Dv|^\alpha \varphi^\alpha\, dx\right], \end{cases}$$

se $h > k$:

$$\text{(3.6)} \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{A(h,\varrho)} (v - h)^\alpha\, dx \leq C\left[\frac{1}{(R-\varrho)^\alpha}\int_{A(k,R)} (v - k)^\alpha\, dx + \int_{A(k)} |Dv|^\alpha \varphi^\alpha\, dx\right] \\ \displaystyle |A(h, \varrho)|\,(h - k)^\alpha \leq C\left[\frac{1}{(R-\varrho)^\alpha}\int_{A(k,R)} (v - k)^\alpha\, dx + \int_{A(k)} |Dv|^\alpha \varphi^\alpha\, dx\right], \end{cases}$$

ove:

$$\text{(3.7)} \qquad \varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x - y| \leq \varrho \\ \dfrac{R - |x - y|}{R - \varrho} & \text{se } \varrho < |x - y| \leq R \\ 0 & \text{se } |x - y| > R \end{cases}$$

e C *è una opportuna costante.*

DIM. Supponiamo $h < k$ e dimostriamo la (3.5). La funzione

$$w(x) = -\varphi(x) \min(v(x) - k, 0)$$

è nulla fuori dalla sfera $I(y, R)$. Pertanto potremo applicare la diseguaglianza di Sobolev relativa all'immersione di $H_0^{1,\alpha}(I(y, R))$ in $L^{\alpha^*}(I(y, R))$:

$$(3.8)\qquad \left[\int_{B(k)} (k-v)^{\alpha^*}\varphi^{\alpha^*}\,dx\right]^{\frac{1}{\alpha^*}} \leq C\left[\int_{B(k)} ((k-v)\,|D\varphi| + |Dv|\,\varphi)^{\alpha}\,dx\right]^{\frac{1}{\alpha}}.$$

D'altra parte dalla diseguaglianza di Hölder si ha:

$$(3.9)\qquad \left[\int_{B(k)} (k-v)^{\alpha}\varphi^{\alpha}\,dx\right]^{\frac{1}{\alpha}} \leq \left[\int_{B(k)} (k-v)^{\alpha^*}\varphi^{\alpha^*}\,dx\right]^{\frac{1}{\alpha^*}}\cdot |B(k,R)|^{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha^*}}$$

Da (3.8) e (3.9), tenuta presente la definizione di φ, si ottiene la prima delle (3.5). Inoltre poiché

$$|B(h,\varrho)|\,(k-h)^{\alpha^*} \leq \int_{B(k)} (k-v)^{\alpha^*}\varphi^{\alpha^*}\,dx,$$

tenendo conto della (3.8) si può dedurre

$$|B(h,\varrho)|^{\frac{1}{\alpha^*}}\,|B(k,R)|^{\frac{1}{n}}\,(k-h) \leq C\left[\int_{B(k)} ((k-v)\,|D\varphi| + |Dv|\,\varphi)^{\alpha}\,dx\right]^{\frac{1}{\alpha}}\cdot |B(k,R)|^{\frac{1}{n}}$$

e quindi la seconda delle (3.5).

Le (3.6) si dimostrano allo stesso modo.

Lemma 3.5. *Siano $y \in E$, $2r < \varrho_0$, $v \in H^{1,\alpha}(\Omega)$.*

A). *Se per ogni $h < k$ si ha*

$$(3.10)\qquad |A(k,2r)| \geq \frac{1}{4}\,|I(y,2r)|$$

allora

$$(3.11)\qquad |B(h,2r)|^{\alpha(n-1)/n} \leq \frac{|B(k,2r)-B(h,2r)|^{\alpha-1}}{(k-h)^{\alpha}} \int_{B(k,2r)} |Dv|^{\alpha}\,dx.$$

B). *Se per ogni $h > k$ si ha*

$$(3.12)\qquad |B(k,2r)| \geq \frac{1}{4}\,|I(y,2r)|$$

allora

$$(3.13)\qquad |A(h,2r)|^{\alpha(n-1)/n} \leq \frac{|A(k,2r)-A(h,2r)|^{\alpha-1}}{(k-h)^{\alpha}} \int_{A(k,2r)} |Dv|^{\alpha}\,dx.$$

C). *Se* $v \in \mathbb{K}_0$ *e* $h < k \leq 0$ *allora la* (3.11) *è soddisfatta anche se la condizione* (3.10) *non è verificata.*

Dim. Proveremo il lemma nel caso C), per gli altri casi la dimostrazione è analoga.

Posto

$$w = \max(v, h) - \max(v, k),$$

osserviamo che $w = 0$ su E, pertanto le ipotesi del lemma 3.1 sono soddisfatte e ne segue

$$|w(x)| \leq C_1 U_1^{\mu}(x) \qquad \text{q. o. su } I(y, 2r), \tag{3.14}$$

ove μ è la misura di densità $|Dw|$ su $I(y, 2r)$ e nulla altrove. Dal lemma 3.3, inoltre, si ricava:

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R}^n;\ U_1^{\mu}(x) \geq \frac{\sigma}{\mu}\right\}\right| \leq \left[\frac{C \int_{I(y,2r)} d\mu}{\sigma}\right]^{\frac{n}{n-1}} \qquad \forall \sigma > 0,$$

e pertanto:

$$|\{x \in I(y, 2r);\ |w(x)| \geq \sigma\}| \leq \left[\frac{C \int_{I(y,2r)} |Dw(t)|\, dt}{\sigma}\right]^{\frac{n}{n-1}}. \tag{3.15}$$

Assunto allora $\sigma = k - h$ si ha che $B(h, 2r) \subset \{x \in I(y, 2r);\ |w(x)| \geq \sigma\}$ e quindi da (3.15) segue

$$|B(h, 2r)| \leq \left[\frac{C \int_{B(k,2r)-B(h,2r)} |Dv(t)|\, dt}{k-h}\right]^{\frac{n}{n-1}},$$

elevando alla potenza $\alpha \dfrac{n-1}{n}$ ed applicando la diseguaglianza di Hölder si ha la (3.11).

Osservazione 3.6. La trasformazione

$$v \to \bar{v} = v - \psi$$

manda il convesso $\mathbb{K}_\psi$ nel convesso $\mathbb{K}_0$; se u è la soluzione di (2.5) osserviamo che la funzione $\bar{u}$ verifica la disequazione

$$\int_\Omega \tilde{A}_i(x, D\bar{u})\, D_i(\bar{v}-\bar{u})\, dx \geq \int_\Omega f_i D(\bar{v}-\bar{u})\, dx \qquad \forall\, \bar{v} \in \mathbb{K}_0, \tag{3.16}$$

ove

$$\tilde{A}_i(x, p) = A_i(x, p + D\psi),$$

inoltre per ogni $p \in \mathbb{R}^n$ ed ogni $x \in \Omega$ risulta soddisfatta la diseguaglianza

$$\tilde{A}_i(x, p)\, p_i \geq 2^{-\alpha-1}\nu\, |p|^\alpha - C(\nu, \mu, \alpha)\, |D\psi|^\alpha. \tag{3.17}$$

Infatti il primo membro di (3.17) si può scrivere come

$$A_i(x, p + D\psi)(p_i + D_i\psi) - A_i(x, p + D\psi)\, D_i\psi$$

e quindi applicando le (2.3) si perviene con alcuni calcoli alla (3.17). Osserviamo inoltre che dalla (2.4) segue ovviamente una analoga condizione di forte monotonia per le $\tilde{A}_i$.

Ricaviamo ora una maggiorazione locale per il gradiente della soluzione della disequazione (3.16).

LEMMA 3.6. *Sia $\bar{u}$ una soluzione di* (3.16) *e siano verificate le seguenti condizioni.*

$$\sum_{i=1}^n \|f_i\|_q \leq 1, \quad con\ q > \frac{n}{\alpha-1}; \tag{3.18}$$

$$\|\psi\|_{1,p} \leq 1, \quad con\ p > n; \tag{3.19}$$

allora, se $y \in E$ e $0 < \varrho < R < \varrho_0$, per ogni reale k si ha:

$$\int_{B(k)} |D\bar{u}|^\alpha \varphi^\alpha\, dx \leq C\left[\frac{1}{(R-\varrho)^\alpha}\int_{B(k,R)} (k-\bar{u})^\alpha\, dx + |B(k, R)|^{1+\varepsilon-\frac{\alpha}{n}}\right], \tag{3.20}$$

ove φ è la funzione definita in (3.7) *ed*

$$\varepsilon = \min(\varepsilon', \varepsilon''), \tag{3.21}$$

essendo ε', ε'' definiti dalle relazioni

$$\frac{1}{q} = \frac{\alpha-1}{n} - \frac{\alpha-1}{\alpha}\varepsilon'; \qquad \frac{1}{p} = \frac{1}{n} - \frac{\varepsilon''}{\alpha}. \tag{3.22}$$

Inoltre se $k \geq 0$ si ha anche:

$$\int_{A(k)} |D\bar{u}|^\alpha \varphi^\alpha \, dx \leq C \left[\frac{1}{(R-\varrho)^\alpha} \int_{A(k,R)} (\bar{u}-k)^\alpha \, dx + |A(k,R)| \right]^{1+\varepsilon-\frac{\alpha}{n}}. \tag{3.23}$$

Gli insiemi $A(k)$, $B(k)$, $A(k,R)$, $B(k,R)$ sono relativi alla funzione $\bar{u}$.

Dim. Posto

$$\bar{v} = \bar{u} - \varphi^\alpha \min(\bar{u}-k, 0)$$

si può osservare che $\bar{v} \in \mathbb{K}_0$ e che inoltre:

$$\bar{v} - \bar{u} = \begin{cases} -\varphi^\alpha(\bar{u}-k) & \text{per } \bar{u} \leq k \\ 0 & \text{per } \bar{u} \geq k \end{cases}$$

$$D_i(\bar{v}-\bar{u}) = \begin{cases} -\alpha\,\varphi^{\alpha-1}(\bar{u}-k)\,D_i\varphi - \varphi^\alpha D_i\bar{u} & \text{per } \bar{u} \leq k \\ 0 & \text{per } \bar{u} \geq k. \end{cases}$$

La (3.16) pertanto diviene:

$$-\int_{B(k)} \tilde{A}_i(x, D\bar{u})\,\varphi^\alpha D_i\bar{u}\,dx \geq \alpha \int_{B(k)} \tilde{A}_i(x, D\bar{u})(k-\bar{u})\,\varphi^{\alpha-1} D_i\varphi\,dx -$$

$$-\alpha \int_{B(k)} f_i(k-\bar{u})\,\varphi^{\alpha-1} D_i\varphi\,dx - \int_{B(k)} \varphi^\alpha f_i D_i\bar{u}\,dx$$

che si può scrivere, tenendo presenti la (3.17) e la (2.3), nella maniera seguente

$$2^{-\alpha-1}\nu \int_{B(k)} |D\bar{u}|^\alpha \varphi^\alpha\,dx \leq C \int_{B(k)} |D\psi|^\alpha \varphi^\alpha\,dx + \tag{3.24}$$

$$+ C \int_{B(k)} |D\bar{u}|^{\alpha-1} \varphi^{\alpha-1} |D\varphi|(k-\bar{u})\,dx +$$

$$+ C \int_{B(k)} |D\psi|^{\alpha-1} \varphi^{\alpha-1} |D\varphi|(k-\bar{u})\,dx +$$

$$+ C \int_{B(k)} |f| \varphi^{\alpha-1} | D \varphi | (k - \bar{u}) \, dx +$$

$$+ \int_{B(k)} |f| \varphi^{\alpha} | D \bar{u} | \, dx \ (^2).$$

Utilizzando la (3.19) si hanno le diseguaglianze seguenti

$$(3.25) \quad \int_{B(k)} | D \psi |^{\alpha} \varphi^{\alpha} \, dx \leq \left[\int_{B(k,R)} | D \psi |^{p} \, dx \right]^{\frac{\alpha}{p}} \cdot | B(k, R) |^{1+\varepsilon'' - \frac{\alpha}{n}} \leq | B(k, R) |^{1+\varepsilon'' - \frac{\alpha}{n}}$$

$$(3.26) \quad \int_{B(k)} (| D \bar{u} | \varphi)^{\alpha-1} | D \varphi | (k - \bar{u}) \, dx \leq \left[\int_{B(k)} | D \bar{u} |^{\alpha} \varphi^{\alpha} \, dx \right]^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \cdot \left[\int_{B(k)} | D\varphi |^{\alpha} (k - \bar{u})^{\alpha} \, dx \right]^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$(3.27) \quad \int_{B(k)} (| D\psi | \varphi)^{\alpha-1} | D\varphi | (k - \bar{u}) \, dx \leq \left[\int_{B(k)} | D\psi |^{\alpha} \varphi^{\alpha} \, dx \right]^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \cdot$$

$$\cdot \left[\int_{B(k)} | D\varphi |^{\alpha} (k - \bar{u})^{\alpha} \, dx \right]^{\frac{1}{\alpha}} \leq \left[| B(k, R) |^{1+\varepsilon'' - \frac{\alpha}{n}} \right]^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \cdot \left[\int_{B(k)} | D\varphi |^{\alpha} (k - \bar{u})^{\alpha} \, dx \right]^{\frac{1}{\alpha}}$$

Tenendo presente che

$$\int_{B(k)} |f_i|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \varphi^{\alpha} \, dx \leq \int_{B(k,R)} |f_i|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \, dx \leq \| f_i \|_q^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} | B(k, R) |^{1+\varepsilon' - \frac{\alpha}{n}}$$

ed utilizzando la (3.18) si ha anche

$$(3.28) \quad \int_{B(k)} |f| \varphi^{\alpha-1} | D \varphi | (k - \bar{u}) \, dx \leq$$

$$\leq \left[\int_{B(k)} |f|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \varphi^{\alpha} \, dx \right]^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \left[\int_{B(k)} | D\varphi |^{\alpha} (k - \bar{u})^{\alpha} \, dx \right]^{\frac{1}{\alpha}} \leq$$

$$\leq \left[| B(k, R) |^{1+\varepsilon' - \frac{\alpha}{n}} \right]^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \left[\int_{B(k)} | D \varphi |^{\alpha} (k - \bar{u})^{\alpha} \, dx \right]^{\frac{1}{\alpha}}$$

(2) Denotiamo per comodità con $|f|$ il modulo del vettore di componenti $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

ed inoltre :

$$(3.29)\qquad \int_{B(k)} \varphi^{\alpha-1} |f| \varphi | D\bar{u} | \, dx \le \left[\int_{B(k)} | D\bar{u} |^{\alpha} \varphi^{\alpha} \, dx \right]^{\frac{1}{\alpha}} \left[| B(k, R) |^{1+\varepsilon' - \frac{\alpha}{n}} \right]^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}$$

In definitiva da (3.24), (3.25), ... , (3.29) segue che almeno una delle seguenti diseguaglianze è verificata

$$(3.30)\qquad \int_{B(k)} | D\bar{u} |^{\alpha} \varphi^{\alpha} \, dx \le C | B(k, R) |^{1+\varepsilon'' - \frac{\alpha}{n}},$$

$$(3.\overline{31})\qquad \int_{B(k)} | D\bar{u} |^{\alpha} \varphi^{\alpha} \, dx \le C \left[\int_{B(k)} | D\bar{u} |^{\alpha} \varphi^{\alpha} \, dx \right]^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \left[\int_{B(k)} | D\varphi |^{\alpha} (k - \bar{u})^{\alpha} \, dx \right]^{\frac{1}{\alpha}},$$

che equivale alla

$$(3.31)\qquad \int_{B(k)} | D\bar{u} |^{\alpha} \varphi^{\alpha} \, dx \le C \int_{B(k)} | D\varphi |^{\alpha} (k - \bar{u})^{\alpha} \, dx ;$$

$$(3.\overline{32})\qquad \int_{B(k)} | D\bar{u} |^{\alpha} \varphi^{\alpha} \, dx \le C \left[| B(k, R) |^{1+\varepsilon'' - \frac{\alpha}{n}} \right]^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \left[\int_{B(k)} | D\varphi |^{\alpha} (k - \bar{u})^{\alpha} \, dx \right]^{\frac{1}{\alpha}},$$

che implica la seguente

$$(3.32)\qquad \int_{B(k)} | D\bar{u} |^{\alpha} \varphi^{\alpha} \, dx \le C \left[| B(k, R) |^{1+\varepsilon'' - \frac{\alpha}{n}} + \int_{B(k)} | D\varphi |^{\alpha} (k - \bar{u})^{\alpha} \, dx \right];$$

$$(3.\overline{33})\qquad \int_{B(k)} | D\bar{u} |^{\alpha} \varphi^{\alpha} \, dx \le C \left[| B(k, R) |^{1+\varepsilon' - \frac{\alpha}{n}} \right]^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \left[\int_{B(k)} | D\varphi |^{\alpha} (k - \bar{u})^{\alpha} \, dx \right]^{\frac{1}{\alpha}},$$

che implica la seguente

$$(3.33)\qquad \int | D\bar{u} |^{\alpha} \varphi^{\alpha} \, dx \le C \left[| B(k, R) |^{1+\varepsilon' - \frac{\alpha}{n}} + \int_{B(k)} | D\varphi |^{\alpha} (k - \bar{u})^{\alpha} \, dx \right];$$

$$(3.\overline{34})\qquad \int_{B(k)} | D\bar{u} |^{\alpha} \varphi^{\alpha} \, dx \le C \left[\int_{B(k)} | D\bar{u} |^{\alpha} \varphi^{\alpha} \, dx \right]^{\frac{1}{\alpha}} \left[| B(k, R) |^{1+\varepsilon' - \frac{\alpha}{n}} \right]^{\frac{\alpha-1}{\alpha}},$$

che equivale alla

$$\int_{B(k)} |D\bar{u}|^\alpha \varphi^\alpha\, dx \leq C\,|B(k, R)|^{1+\varepsilon' - \frac{\alpha}{n}}. \tag{3.34}$$

Dalle (3.21), (3.7), (3.30), (3.31), ... , (3.34) segue immediatamente la tesi.

La dimostrazione della (3.23) è analoga, basta invero assumere

$$\bar{v} = \bar{u} - \varphi^\alpha \max(\bar{u} - k, 0)$$

ed eseguire le maggiorazioni viste nel caso precedente, osservando che se $k \geq 0$ la funzione v appartiene a $\mathbb{K}_0$.

§ 4. Maggiorazioni locali e hölderianità della soluzione.

Premettiamo alla dimostrazione del teorema 2.1 alcune immediate conseguenze dei precedenti lemmi.

Dai Lemmi 3.4 e 3.6 segue il

TEOREMA 4.1. *Sia $\bar{u}$ la soluzione della disequazione* (3.16) *e siano verificate le condizioni*

$$\sum_{i=1}^{n} \|f_i\|_q \leq 1, \quad con\ q > \frac{n}{\alpha - 1}; \tag{3.18}$$

$$\|\psi\|_{1,p} \leq 1, \quad con\ p > n; \tag{3.19}$$

allora, se $y \in E$ e $0 < \varrho < R < \varrho_0$, per $h < k$ si ha:

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{B(h,\varrho)} (h - \bar{u})^\alpha\, dx \leq C\left[\frac{|B(k, R)|^{\frac{\alpha}{n}}}{(R-\varrho)^\alpha} \int_{B(k,R)} (k - \bar{u})^\alpha\, dx + |B(k, R)|^{1+\varepsilon}\right] \\ \displaystyle |B(h, \varrho)|\,(k - h)^\alpha \leq C\left[\frac{|B(k, R)|^{\frac{\alpha}{n}}}{(R-\varrho)^\alpha} \int_{B(k,R)} (k - \bar{u})^\alpha\, dx + |B(k, R)|^{1+\varepsilon}\right] \end{cases}, \tag{4.1}$$

mentre per $0 \leq k < h$ si ha:

$$
(4.2) \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{A(h,\varrho)} (\bar{u} - h)^\alpha \, dx \le C \left[\frac{|A(k,R)|^{\frac{\alpha}{n}}}{(R-\varrho)^\alpha} \int_{A(k,R)} (\bar{u} - k)^\alpha \, dx + |A(k,R)|^{1+\varepsilon} \right] \\[2ex] \displaystyle |A(h,\varrho)|\,(h-k)^\alpha \le C \left[\frac{|A(k,R)|^{\frac{\alpha}{n}}}{(R-\varrho)^\alpha} \int_{A(k,R)} (\bar{u} - k)^\alpha \, dx + |A(k,R)|^{1+\varepsilon} \right] \end{cases}
$$

essendo ε *dato dalla* (3.21).

Dai lemmi 3.5 e 3.6, ponendo $R = 4r$ e $\varrho = 2r$, segue inoltre il

TEOREMA 4.2. *Sia* $\bar{u}$ *la soluzione della disequazione* (3.16), *siano verificate le condizioni* (3.18) *e* (3.19) *ed inoltre si supponga* $y \in E$ *e* $0 < 4r < \varrho_0$.

A) *Se*

$$
(4.3) \qquad |A(k, 2r)| \ge \frac{1}{4} |I(y, 2r)|
$$

allora, per $h < k$, *si ha :*

$$
(4.4) \qquad |B(h, 2r)|^{\alpha\frac{n-1}{n}} \le
$$

$$
\le C \frac{|B(k,2r) - B(h,2r)|^{\alpha-1}}{(k-h)^\alpha} \left[\frac{1}{r^\alpha} \int_{B(k,4r)} (k - \bar{u})^\alpha \, dx + |B(k,4r)|^{1+\varepsilon-\frac{\alpha}{n}} \right].
$$

B) *Se*

$$
(4.5) \qquad |B(k, 2r)| \ge \frac{1}{4} |I(y, 2r)|
$$

allora, per $0 \le k < h$, *si ha :*

$$
(4.6) \qquad |A(h, 2r)|^{\alpha\frac{n-1}{n}} \le
$$

$$
\le C \frac{|A(k,2r) - A(h,2r)|^{\alpha-1}}{(h-k)^\alpha} \left[\frac{1}{r^\alpha} \int_{A(k,4r)} (\bar{u} - k)^\alpha \, dx + |A(k,4r)|^{1+\varepsilon-\frac{\alpha}{n}} \right].
$$

C) *Se poi* $h < k \le 0$ *allora la* (4.4) *è verificata anche se la* (4.3) *non è soddisfatta.*

Enunciamo ora un lemma algebrico che ci sarà utile nella dimostrazione del successivo lemma 4.4.

LEMMA 4.3. *Sia* $\{\chi_m\}$ *una successione di numeri reali non negativi tale che risulti*

$$(4.7) \qquad \chi_{m+1} \leq G\left(\frac{d}{R}\right)^{\alpha}\left(2^{\alpha m}\frac{\chi_m}{d^{\alpha}}\right)^{1+\frac{\alpha}{n}} + H\left(2^{\alpha m}\frac{\chi_m}{d^{\alpha}}\right)^{1+\varepsilon}, \ \forall\, m \geq 0,$$

ove G, H, d, R, α, n, ε *sono costanti positive ed inoltre*

$$\varepsilon \leq \frac{\alpha}{n}.$$

Siano ν *e* ϑ *due numeri così definiti*

$$(4.8) \qquad \nu = \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}; \qquad \vartheta^{\alpha/n} = G\, 2^{\alpha\nu+1}.$$

Allora se d *soddisfa alla diseguaglianza:*

$$(4.9) \qquad d^{\alpha} \geq \vartheta\,\frac{\chi_0}{R^n} + \vartheta^{-\varepsilon} H\, 2^{\alpha\nu+1} R^{n\varepsilon},$$

si ha:

$$(4.10) \qquad \chi_m \leq \vartheta^{-1}\frac{d^{\alpha} R^n}{2^{\alpha m\nu}}, \ \forall\, m \geq 0.$$

Per la dimostrazione di questo lemma cfr. [1] e [2].

LEMMA 4.4. *Sia* $\bar{u}$ *la soluzione della disequazione* (3.16), *siano verificate le* (3.18), (3.19) *e si abbia inoltre* $y \in E$ *e* $0 < 2r < \varrho_0$. *Esistono allora due costanti positive* M, N *tali che:*

A) *se* d *verifica la seguente diseguaglianza*

$$(4.11) \qquad d^{\alpha} \geq \frac{M}{(2r)^n}\int_{B(k,\,2r)} (k-\bar{u})^{\alpha}\,dx + N(2r)^{n\varepsilon}$$

ne segue

$$(4.12) \qquad \left| B\left(k-\frac{d}{2},\, r\right)\right| = 0\,;$$

B) *se* d *verifica invece la seguente*

$$(4.13) \qquad d^{\alpha} \geq \frac{M}{(2r)^n}\int_{A(k,\,2r)} (\bar{u}-k)^{\alpha}\,dx + N(2r)^{n\varepsilon}$$

e se $k \geq 0$, *ne segue*

$$\left| A\left(k + \frac{d}{2}, r\right) \right| = 0. \tag{4.14}$$

Il numero ε *è dato dalla* (3.21).

DIM. Proveremo il lemma nel caso A). Poniamo per $m = 0, 1, 2, \ldots$

$$\begin{cases} \varrho_m = r + \dfrac{r}{2^m} \\ k_m = k - \dfrac{d}{2} + \dfrac{d}{2^{m+1}} \end{cases} \qquad \begin{cases} b_m = | B(k_m, \varrho_m) | \\ u_m = \displaystyle\int_{B(k_m, \varrho_m)} (k_m - u)^\alpha \, dx \end{cases} \tag{4.15}$$

essendo d una costante positiva il cui significato sarà precisato nel seguito.

Applicando la (4.1) del teorema 4.1 con $h = k_{m+1}$, $k = k_m$, $\varrho = \varrho_{m+1}$ ed $R = \varrho_m$ otteniamo

$$\begin{cases} u_{m+1} \leq C \left[\dfrac{2^{\alpha(m+1)}}{r^\alpha} u_m \, b_m^{\alpha/n} + b_m^{1+\varepsilon} \right] \\ b_{m+1} \leq C \dfrac{2^{\alpha(m+2)}}{d^\alpha} \left[\dfrac{2^{\alpha(m+1)}}{r^\alpha} u_m \, b_m^{\alpha/n} + b_m^{1+\varepsilon} \right]. \end{cases} \tag{4.16}$$

Ponendo ancora:

$$\chi_m = \frac{2^{\alpha(m+1)}}{r^\alpha} u_m \, b_m^{\alpha/n} + b_m^{1+\varepsilon} \tag{4.17}$$

le (4.16) si scrivono nella forma seguente

$$\begin{cases} u_{m+1} \leq C \chi_m \\ b_{m+1} \leq C \dfrac{2^{\alpha(m+2)}}{d^\alpha} \chi_m \end{cases} \tag{4.18}$$

e da (4.17) e (4.18) si ricava, indicando con G e H opportune costanti

$$\chi_{m+1} \leq G \left(\frac{d}{2r} \right)^\alpha \left(2^{\alpha m} \frac{\chi_m}{d^\alpha} \right)^{1 + \frac{\alpha}{n}} + H \left(2^{\alpha m} \frac{\chi_m}{d^\alpha} \right)^{1+\varepsilon}, \ \forall \, m \geq 0. \tag{4.19}$$

D'altra parte si vede facilmente che esistono delle costanti M, N tali che se d soddisfa la disuguaglianza (4.11) allora d verifica anche la seguente

$$d^{\alpha} \geq \vartheta \frac{\chi_0}{(2r)^n} + \vartheta^{-\varepsilon} H \, 2^{\alpha\nu+1} (2r)^{n\varepsilon}, \tag{4.20}$$

ove ϑ e ν sono dati dalla (4.8).

Sono pertanto soddisfatte le ipotesi del lemma 4.3, con $R = 2r$, ne segue:

$$\chi_m \leq \vartheta^{-1} \frac{d^{\alpha} (2r)^n}{2^{\alpha m \nu}}, \quad \forall\, m \geq 0. \tag{4.21}$$

Da (4.18) e (4.21) segue allora immediatamente

$$b_{m+1} \leq C \, \vartheta^{-1} \frac{(2r)^n}{2^{\alpha m(\nu-1)-2\alpha}}, \quad \forall\, m \geq 0.$$

Poiché inoltre $B(k_m, \varrho_m) \supset B\left(k - \frac{d}{2}, r\right)$, facendo tendere m all'infinito si ottiene la (4.12).

La dimostrazione nel caso B) è del tutto analoga.

Il precedente lemma ci consente di dimostrare il seguente risultato:

TEOREMA 4.3. *Esistono τ, λ, β costanti positive, con $\tau < 1$, tali che per ogni $y \in E$ e $0 < 4r < \varrho_0$ risulti*

$$\omega(y, r) \leq \tau \, \omega(y, 4r) + \lambda \, r^{\beta}, \tag{4.22}$$

ove $\omega(y, r)$ è l'oscillazione nella sfera $I(y, r)$ della soluzione $\bar{u}$ della disequazione (3.16), *e sono verificate le condizioni* (3.18) *e* (3.19).

DIM. Posto

$$\begin{cases} l_1 = \sup\limits_{x \in I(y, 4r)} \bar{u}(x); \quad l_2 = \inf\limits_{x \in I(y, 4r)} \bar{u}(x) \\ \omega = l_1 - l_2 = \omega(y, 4r) \\ \bar{l} = \dfrac{l_1 + l_2}{2} \end{cases} \tag{4.23}$$

si possono presentare i tre casi seguenti

1) $\qquad \bar{l} \geq 0 \qquad$ e $\qquad |A(\bar{l}, 2r)| \geq \frac{1}{2} |I(y, 2r)|,$

2) $$\bar{l} \geq 0 \quad \text{e} \quad |B(\bar{l}, 2r)| > \frac{1}{2} |(y, 2r)|,$$

3) $$\bar{l} < 0.$$

Supponiamo, per esempio, di trovarci nel primo caso (i casi restanti si trattano in modo del tutto analogo) e poniamo

$$\begin{cases} k_m = l_2 + \omega\, 2^{-m-1} \\ b_m = |B(k_m, 2r)| \end{cases} \quad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.24}$$

Applicando la (4.4) con $h = k_{m+1}$, $k = k_m$ si ha

$$b_{m+1}^{\alpha(n-1)/n} \leq C \frac{2^{(m+2)\alpha}}{\omega^\alpha} (b_m - b_{m+1})^{\alpha-1} \left[\frac{1}{r^\alpha} \int_{B(k_m, 4r)} (k_m - \bar{u})\, dx + \right. \tag{4.25}$$

$$\left. + |I(0,1)| (4r)^{n-\alpha+n\varepsilon} \right] \leq$$

$$\leq C \frac{2^{(m+2)\alpha}}{\omega} (b_m - b_{m+1})^{\alpha-1} \left[\frac{|I(0,1)|}{r^\alpha} \omega^\alpha (4r)^n\, 2^{-(m+1)\alpha} + \right.$$

$$\left. + |I(0,1)| (4r)^{n-\alpha+n\varepsilon} \right].$$

Pertanto si ha

$$b_{m+1}^{\frac{\alpha(n-1)}{n(\alpha-1)}} \leq \tilde{C} (b_m - b_{m+1})\, r^{\frac{n-\alpha}{\alpha-1}} \left[1 + \left(\frac{2^m\, r^{n\varepsilon/\alpha}}{\omega} \right)^\alpha \right]^{\frac{1}{\alpha-1}}. \tag{4.26}$$

Sia allora n_0 un indice che fisseremo in seguito; si possono presentare due casi:

a) $$\omega \leq 2^{n_0}\, r^{n\varepsilon/\alpha},$$

b) $$\omega > 2^{n_0}\, r^{n\varepsilon/\alpha}.$$

Nel caso *a*) la (4.22) è verificata con $\tau = 0$. Nel caso *b*) si ha invece

$$\frac{2^m\, r^{n\varepsilon/\alpha}}{\omega} < 1 \quad \text{per} \quad 0 \leq m < n_0,$$

e pertanto, dalla (4.25)

$$b_{n_0}^{\frac{\alpha(n-1)}{n(\alpha-1)}} \leq b_{m+1}^{\frac{\alpha(n-1)}{n(\alpha-1)}} \leq \tilde{C}\, r^{\frac{n-\alpha}{\alpha-1}}\, 2^{\frac{1}{\alpha-1}} (b_m - b_{m+1}), \qquad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.27}$$

Dalle (4.27) si ricava

$$n_0\, b_{n_0}^{\frac{\alpha(n-1)}{n(\alpha-1)}} \leq \widetilde{C}\, r^{\frac{n-\alpha}{\alpha-1}}\, 2^{\frac{1}{\alpha-1}}\, b_0 \leq |\, I(0,1)\,|\, \widetilde{C}\, 2^{\frac{1+\alpha-n}{\alpha-1}}\, (2r)^{\frac{\alpha(n-1)}{\alpha-1}} \tag{4.28}$$

Siano ora M, N le costanti fornite dal lemma 4.4; scegliendo n_0 tale che

$$n_0 \geq |\, I(0,1)\,|\, \widetilde{C}\, 2^{\frac{1+\alpha-n}{\alpha-1}}\, M^{\frac{\alpha(n-1)}{n(\alpha-1)}}, \tag{4.29}$$

e sostituendo in (4.28) si ottiene

$$b_{n_0} \leq \frac{(2r)^n}{M}. \tag{4.30}$$

Possiamo ora applicare il lemma 4.4 con

$$\begin{cases} k = k_{n_0} = l_2 + \dfrac{\omega}{2^{n_0+1}}, \\ d = k_{n_0} - l_2 + N^{1/\alpha}(2r)^{n\varepsilon/\alpha}, \end{cases} \tag{4.31}$$

infatti è facile verificare che la (4.30) e la (4.31) implicano

$$d^\alpha \geq \frac{M}{(2r)^n} \int\limits_{B(k_{n_0},\, 2r)} (k_{n_0} - \bar{u})^\alpha\, dx + N(2r)^{n\varepsilon}.$$

Segue pertanto la

$$\left|\, B\left(k_{n_0} \quad \frac{d}{2}, r\right) \right| = 0, \tag{4.32}$$

cioè quasi-ovunque in $I(y, r)$ si ha:

$$\bar{u}(x) \geq l_2 + \frac{\omega}{2^{n_0+2}} - \frac{1}{2} N^{1/\alpha}(2r)^{n\varepsilon/\alpha}. \tag{4.33}$$

Finalmente dalla (4.33), tenute presenti le (4.23), si ottiene

$$\omega(y, r) \leq (1 - 2^{-(n_0+2)})\, \omega(y, 4r) + \frac{1}{2} N^{1/\alpha}(2r)^{n\varepsilon/\alpha},$$

cioè la tesi.

COROLLARIO 4.4. *Nelle ipotesi del teorema 4.3 esistono due costanti positive η e Q tali che, per ogni $y \in E$ ed ogni $0 < r < \varrho_0$, si abbia*

$$\omega(y, r) \leq \left[4^\eta \frac{\omega(y, \varrho_0)}{\varrho_0^\eta} + Q \right] r^\eta. \tag{4.34}$$

DIM. Siano τ, λ, β le costanti fornite dal teorema 4.3, sia $\tau < \sigma < 1$ e siano η, $\bar{\eta}$ i numeri definiti dalle relazioni

$$\left\{\begin{aligned} & 4^{\bar{\eta}}\,\tau = \sigma < 1, \\ & \eta = \min(\bar{\eta}, \beta). \end{aligned}\right. \tag{4.35}$$

Dal teorema 4.3 segue

$$\omega(y, r) \leq \tau\, \omega(y, 4r) + \lambda r^{\eta}, \quad \forall\, r \text{ tale che } 0 < r < \frac{\varrho_0}{4}. \tag{4.36}$$

Ponendo

$$A = 4^{\eta}\, \frac{\omega(y, \varrho_0)}{\varrho_0^{\eta}} \tag{4.37}$$

segue

$$\omega(y, r) \leq A r^{\eta}, \qquad \forall\, r \text{ tale che } \frac{\varrho_0}{4} \leq r < \varrho_0 \tag{4.38}$$

e pertanto da (4.36) e (4.38) si ha

$$\omega(y, r) \leq \tau A (4r)^{\eta} + \lambda r^{\eta} = r^{\eta}[\tau A\, 4^{\eta} + \lambda], \quad \forall\, r \text{ tale che } \frac{\varrho_0}{4^2} \leq r < \frac{\varrho_0}{4}.$$

Analogamente:

$$\omega(y, r) \leq \tau (4r)^{\eta} [\tau A\, 4^{\eta} + \lambda] + \lambda r^{\eta} = r^{\eta}[A (\tau\, 4^{\eta})^2 + \lambda (1 + 4^{\eta}\,\tau)],$$

$$\forall\, r \text{ tale che } \frac{\varrho_0}{4^3} \leq r < \frac{\varrho_0}{4^2};$$

ed in generale si avrà, per $m = 0, 1, 2, \ldots$

$$\omega(y, r) \leq r^{\eta}\left[A (\tau\, 4^{\eta})^m + \lambda \sum_{s=0}^{m-1} (\tau\, 4^{\eta})^s\right], \quad \forall\, r \text{ tale che } \frac{\varrho_0}{4^{m+1}} \leq r < \frac{\varrho_0}{4^m}. \tag{4.39}$$

Tenendo presente allora la (4.35) si ricava

$$\omega(y, r) \leq r^{\eta}\left[A + \frac{\lambda}{1 - \sigma}\right], \quad \forall\, r \text{ tale che } 0 < r < \varrho_0, \tag{4.40}$$

che, per la (4.37), è la tesi.

COROLLARIO 4.5. *Nelle ipotesi del teorema 4.3 esistono due costanti positive η e P tali che, per ogni $y \in E$ si abbia*

$$\omega(y, r) \leq P r^{\eta}, \quad \forall\, r \text{ tale che } 0 < r < \frac{\varrho_0}{2}. \tag{4.41}$$

DIM. Osserviamo anzitutto che dalle (2.10), (2.11), tenuto anche conto della (3.19), segue

$$\| \bar{u} \|_\infty \le C_1 . \tag{4.42}$$

La (4.41) segue allora, per $0 < r < \varrho_0$, dalla (4.34) e dalla diseguaglianza seguente:

$$\frac{\omega(y, \varrho_0)}{\varrho_0^\eta} \le \frac{2\,C_1}{\varrho_0^\eta} .$$

OSSERVAZIONE 4.6. Se l'insieme E non soddisfa la condizione (2.1) ma solo le condizioni enunciate nell'osservazione 2.2, la dimostrazione del precedente corollario va modificata come segue.

Se $y \in E_0$ allora la (4.41) segue immediatamente come nel caso precedente.
Se invece $y \in E_1$ distingueremo i due casi:

1) $$r < \delta(y)$$

2) $$0 < \delta(y) \le r < \frac{\varrho_0}{2} .$$

Nel caso 1), se si suppone $\delta(y) \ge \frac{\varrho_0}{2}$ la tesi è una conseguenza immediata di (4.34) e (4.42). Se invece risulta $\delta(y) < \frac{\varrho_0}{2}$, sia y_0 un punto di E_0 tale che

$$\operatorname{dist}(y, y_0) < (1 + \varepsilon)\,\delta(y), \quad \text{con } 0 < \varepsilon < \frac{\varrho_0}{\delta(y)} - 2. \tag{4.43}$$

Allora

$$\frac{\omega(y, \delta(y))}{[\delta(y)]^\eta} \le \frac{\omega(y_0, (2+\varepsilon)\,\delta(y))}{[\delta(y)]^\eta}, \tag{4.44}$$

e, poiché y_0 appartiene ad E_0 e la (4.41) è verificata per i punti di E_0 e per $0 < r < \varrho_0$, dalla (4.44) si deduce

$$\frac{\omega(y, \delta(y))}{[\delta(y)]^\eta} \le C. \tag{4.45}$$

La tesi segue allora da (4.34) e (4.45).

Supponiamo finalmente di trovarci nel caso 2). Anche in questo caso scegliamo $y_0 \in E_0$ verificante la condizione seguente

$$\operatorname{dist}(y, y_0) < (1+\varepsilon)\,\delta(y), \quad \text{con } 0 < \varepsilon < \frac{\varrho_0}{r} - 2.$$

Si ha allora

$$\omega(y, r) \leq \omega(y_0, (2+\varepsilon)\,r)$$

e, poiché $(2+\varepsilon)\,r < \varrho_0$ e la (4.41) è stata dimostrata in queste condizioni per i punti di E_0, si perviene alla tesi.

Osservazione 4.7. È noto che con tecnica analoga è possibile dimostrare che:
- la maggiorazione (4.34) è valida per punti $y \in \Omega - E$, ove $\varrho_0 = \operatorname{dist}(y, E \cup \partial\Omega)$;
- la maggiorazione (4.41) è valida per punti $y \in \partial\Omega$ con ϱ_0 scelto opportunamente;

(cfr. [1]).

Dalla precedente osservazione e dal Corollario 4.5 risulta che la (4.41) è verificata per ogni $y \in \overline{\Omega}$ e per ogni r tale che $0 < r < \frac{\varrho_0}{2}$ (essendo eventualmente cambiato il valore di η e di ϱ_0).

Poiché se $|x - y| \geq \frac{\varrho_0}{2}$, utilizzando la (4.42), si ottiene

$$\frac{|\overline{u}(x) - \overline{u}(y)|}{|x-y|^\eta} \leq \frac{2\,\|\overline{u}\|_\infty}{\left(\frac{\varrho_0}{2}\right)^\eta} \leq \text{cost.} \tag{4.46}$$

si conclude che

$$[\overline{u}]_{\eta,\,\Omega} \leq \text{cost.} \tag{4.47}$$

Ponendo allora

$$\gamma = \min\left(\eta, 1 - \frac{n}{p}\right)$$

e tenendo conto della (2.11) e della (4.47) si può dedurre che:

Nelle ipotesi (3.18) (3.19) *la soluzione u della disequazione variazionale* (2.5) *appartiene a* $C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$ *ed inoltre*

$$\|u\|_\infty + [u]_{\gamma,\,\Omega} = \|u\|_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} \leq C \quad (^3) \tag{4.48}$$

(3) Si tenga presente che $u = \overline{u} + \psi$ e si utilizzi la (2.10).

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 2.1.

Sia ora u la soluzione della disequazione (2.5) e siano $f_i \in L^q(\Omega)$ e $\psi \in H^{1,p}(\Omega)$, con $q > \dfrac{n}{a-1}$ e $p > n$, senza che siano necessariamente verificate le (3.18), (3.19).

Posto allora

$$t = \sum_{i=1}^{n} \| f_i \|_q^{\frac{1}{a-1}} + \| \psi \|_{1,p}, \tag{4.49}$$

si osservi che la funzione

$$\overset{\circ}{u} = \frac{u}{t}$$

è la soluzione della disequazione variazionale

$$\int_\Omega \overset{\circ}{A}_i(x, D\overset{\circ}{u})\, D_i(v - \overset{\circ}{u})\, dx \geq \int_\Omega \overset{\circ}{f}_i\, D_i(v - \overset{\circ}{u})\, dx, \qquad \forall\, v \in \mathbb{K}_{\psi/t},$$

ove:

$$\overset{\circ}{A}_i(x, p) = \frac{A_i(x, tp)}{t^{\alpha-1}},$$

$$\overset{\circ}{f}_i = \frac{f_i}{t^{\alpha-1}}.$$

Utilizzando le (2.3) e la definizione di t si ottengono allora le diseguaglianze seguenti:

$$\overset{\circ}{A}_i(x, p)\, p_i = \frac{1}{t^\alpha} A_i(x, tp)\cdot(tp_i) \geq \nu\, |p|^\alpha,$$

$$|\overset{\circ}{A}_i(x, p)| = \frac{|A_i(x, tp)|}{t^{\alpha-1}} \leq \mu\, |p|^{\alpha-1},$$

$$\|\overset{\circ}{f}_i\|_q = \frac{\|f_i\|_q}{t^{\alpha-1}} \leq 1, \qquad\qquad i = 1, 2, \ldots n,$$

$$\left\| \frac{\psi}{t} \right\|_{1,p} = \frac{\|\psi\|_{1,p}}{t} \leq 1,$$

e pertanto si possono applicare alla funzione $\overset{\circ}{u}$ le conclusioni esposte in precedenza; in particolare la (4.48) si scrive

$$\|\overset{\circ}{u}\|_{C^{0,\gamma}(\bar\Omega)} = \left\| \frac{u}{t} \right\|_{C^{0,\gamma}(\bar\Omega)} \leq C. \tag{4.50}$$

Moltiplicando la (4.50) per t e tenendo conto della (4.49) si perviene alla (2.12).

§ 5. Alcuni esempi. Punti regolari di frontiera.

In questo paragrafo ci proponiamo di fornire alcuni esempi di ostacoli soddisfacenti le ipotesi (2.1) e (2.9) del § 2; utilizzando quindi il teorema di regolarità 2.1 ricaveremo delle condizioni sufficienti per la regolarità dei punti di frontiera per il problema di Dirichlet relativo all'operatore non lineare qui considerato.

Assegnato un insieme chiuso E di $\mathbb{R}^n$, diremo che *il punto* $x \in E$ *soddisfa la proprietà di cono* s*-dimensionale* ($s \leq n$) se esiste un cono s-dimensionale avente vertice in x contenuto in E.

Diremo che E *soddisfa la proprietà di cono* s*-dimensionale* se ogni suo punto verifica tale proprietà con un cono fisso (a meno di congruenze).

Se Ω è un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$, diremo che il punto $y \in \partial\Omega$ *verifica la proprietà di cono esterno* s*-dimensionale* se esiste un cono s-dimensionale con vertice in y e contenuto nell'insieme complementare di Ω.

Osservazione 5.1. Se $E \subset \Omega$ verifica la proprietà di cono s-dimensionale con $s = n - 1$ oppure $s = n$, allora E soddisfa l'ipotesi (2.1) del § 2 e pertanto se la funzione ostacolo ψ assegnata su E è la traccia di una funzione di $H^{1,p}(\Omega)$ con $p > n$, allora la soluzione del problema (2.5) con $f_i \in L^q(\Omega)$ $\quad (q > n/(\alpha - 1))$ è hölderiana in $\overline{\Omega}$ ed inoltre è verificata la maggiorazione (2.12).

Esempio 1. Sia $n = 2$, $x = (\xi, \eta)$, $\Omega = I(0, 2)$ e sia E il segmento $\{0 \leq \xi \leq 1, \eta = 0\}$. Assegnato su E l'ostacolo sottile ψ di equazione

$$\psi(\xi) = 1 - \xi^{\vartheta}, \quad \text{con} \quad 0 < \vartheta < 1,$$

la funzione u che minimizza in $\mathbb{K}_\psi$ il funzionale

$$\iint_{I(0,2)} [(D_\xi v)^2 + (D_\eta v)^2]^{\alpha/2} \, d\xi \, d\eta \qquad (1 < \alpha < 2),$$

ove $\mathbb{K}_\psi = \{v \in H_0^{1,\alpha}(\Omega);\ v \geq \psi \text{ su } E\}$, è hölderiana.

Invero E gode della proprietà di cono 1-dimensionale e ψ è la restrizione ad E della funzione

$$1-(\xi^2+\eta^2)^{\vartheta/2},$$

la quale appartiene ad $H^{1,p}(\Omega)$ con $p=\dfrac{2}{1-\vartheta}$.

ESEMPIO 2. In analogia all'esempio poc'anzi considerato assumiamo come Ω una sfera n-dimensionale con centro nell'origine, sia poi E un cono $(n-1)$-dimensionale contenuto in tale sfera ed avente il vertice nell'origine. Come «ostacolo» assumiamo la restrizione ad E della funzione $\psi(x)=$ $=1-|x|^\vartheta$ $(1>\vartheta>0)$, tale funzione appartiene allo spazio $H^{1,p}(\Omega)$ con $p=\dfrac{n}{1-\vartheta}>n$. Segue allora dal teorema 2.1 e dalla osservazione 5.1 che la soluzione del problema (2.5), nel caso ora considerato, è hölderiana e soddisfa la maggiorazione (2.12) $\left(\text{purchè naturalmente sia } f_i\in L^q(\Omega) \text{ con } q>\dfrac{n}{\alpha-1}\right)$.

Si osservi che per un insieme E soddisfacente solo proprietà di cono s dimensionale, con $s\leq n-2$, il teorema 2.1 è in generale falso.

OSSERVAZIONE 5.2. Va da sè che i risultati del teorema 2.1 sono verificati anche se l'insieme E, pur non verificando proprietà di cono $(n-1)$-dimensionale, soddisfa la seguente generalizzazione:

Esiste un cono $(n-1)$-dimensionale C tale che per ogni punto $x\in E$ si possa trovare un trasformato bilipschitziano $\widetilde{C}_x$ del cono C contenuto in E e con «vertice» in x (ed inoltre le costanti di Lipschitz di tali trasformazioni sono uniformemente limitate rispetto ad x).

Applicazioni allo studio dei punti regolari.

Dato un aperto limitato $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ sia Σ una fissata sfera aperta contenente Ω e sia E un chiuso contenuto in Σ.

Consideriamo l'operatore:

$$\mathcal{A}u=-\frac{\partial}{\partial x_i}A_i(Du), \tag{5.1}$$

ove le funzioni $A_i(p)$ sono continue in $\mathbb{R}^n$ e verificano le condizioni seguenti (cfr. (2.3), (2.4)):

$$\begin{cases} A_i(p)\cdot p_i\geq \nu\,|p|^\alpha \\ |A_i(p)|\leq\mu\,|p|^{\alpha-1}\end{cases}\qquad(1<\alpha<n); \tag{5.2}$$

$$(A_i(p) - A_i(q))(p_i - q_i) > 0 \quad \text{se} \quad p \neq q. \tag{5.3}$$

Premettiamo alcune definizioni

Si dice *m potenziale capacitario di ordine* α *dell'insieme* E, relativo all'operatore $\mathscr{A}$ e riferito alla sfera Σ, la soluzione $u \in \widetilde{\mathbb{K}}_{m,E}$ della disequazione variazionale

$$\int_{\Sigma} A_i(Du)\, D_i(v-u)\, dx \geq 0 \quad , \quad \forall\, v \in \widetilde{\mathbb{K}}_{m,E}\,, \tag{5.4}$$

ove

$$\widetilde{\mathbb{K}}_{m,E} = \begin{cases} \{v \in H_0^{1,\alpha}(\Sigma)\,;\ v \geq m \ \text{su}\ E\} \ \text{se}\ m \geq 0 \\ \{v \in H_0^{1,\alpha}(\Sigma)\,;\ v \leq m \ \text{su}\ E\} \ \text{se}\ m < 0. \end{cases} \tag{5.5}$$

Ad ogni dato φ continuo su $\partial\Omega$ si può associare una soluzione $u \in H^{1,\alpha}_{\text{loc}}(\Omega) \cap C^0(\Omega)$ del problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \mathscr{A}u = 0 \quad \text{in} \quad \Omega \\ u = \varphi \quad \text{su} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{5.6}$$

Se φ è traccia di una funzione di $H^{1,\alpha}(\Omega)$ allora $u \in H^{1,\alpha}(\Omega)$.

Osservazione 5.3. Si può verificare che le soluzioni dell'equazione $\mathscr{A}\,u = 0$ soddisfano il principio di massimo. Poiché inoltre le soluzioni della disequazione (5.3) verificano anche

$$\begin{cases} \mathscr{A}u = 0 \quad \text{in} \quad \Sigma - E \\ u = 0 \quad \text{su}\ \partial\Sigma \\ u = m \quad \text{su}\ E, \end{cases} \tag{5.7}$$

ne segue che se $E \subset E'$ e se $m \geq 0$ allora $u(x) \leq u'(x) \leq m$, ove u, u' sono gli m-potenziali capacitari degli insiemi E, E' rispettivamente (una analoga diseguaglianza si ha per $m < 0$).

In particolare se $y \in E$ e se $\lim_{x \to y} u(x) = m$ si potrà dedurre che $\lim_{x \to y} u'(x) = m$.

Diremo che un punto $y \in \partial\Omega$ è regolare per il problema (5.6) se per ogni funzione continua φ assegnata su $\partial\Omega$ si ha

$$\lim_{\substack{x \to y \\ x \in \Omega}} u(x) = \varphi(y).$$

Si può dimostrare (v. [4]) la seguente:

PROPOSIZIONE 5.4. *Condizione necessaria e sufficiente affinché y sia regolare per il problema (5.6) è che per ogni m gli m-potenziali capacitari di ordine α degli insiemi $E_\varrho(y) = \overline{I(y, \varrho)} \cap \complement\,\Omega$ siano continui e di valore m nel punto y al variare di ϱ in un intorno dello zero ($\varrho \neq 0$).*

Da quanto detto poc'anzi, dalle osservazioni 5.1 e 5.3, e dal teorema 2.1 segue il seguente criterio di regolarità:

TEOREMA 5.5. *Condizione sufficiente affinché $y \in \partial\Omega$ sia regolare per il problema (5.6) è che y verifichi la proprietà di cono esterno $(n-1)$ dimensionale.* (4)

Per concludere osserviamo che siccome la proposizione 5.4 è verificata, purché sia $A_i(0) = 0$, anche se le (5.2) sono soddisfatte soltanto per $p \geq$ cost., si deduce che il teorema 5.5 è valido anche per operatori più generali di quello finora considerato, ad esempio per l'operatore di Eulero associato all'integrale

$$\int_\Omega (1 + |Du|^2)^{\alpha/2}\, dx \qquad (1 < \alpha < n).$$

---

(4) Una ovvia generalizzazione del presente teorema si ottiene tenendo presente l'osservazione 5.2.

BIBLIOGRAFIA

[1] H. Beirão da Veiga, *Sulla hölderianità delle soluzioni di alcune disequazioni variazionali con condizioni unilatere al bordo*, Ann. Mat. Pura Appl., 83 (1969), pp. 73-112.

[2] H. Beirão da Veiga, *Sur la regularité des solutions de l'équation div* $A(x, u, \nabla u) = B(x, u, \nabla u)$ *avec des conditions aux limites unilatérales et mêlées*, Ann. Mat. Pura Appl. (in corso di stampa).

[3] H. Beirão da Veiga, *Proprietà di sommabilità e di limitatezza per soluzioni di disequazioni variazionali ellittiche*, Rend. Sem. Mat. Padova, 46 (1971), pp. 141-171.

[4] H. Beirão da Veiga, *Punti regolari per una classe di operatori ellittici non lineari*, Ricerche di Mat. Napoli (in corso di stampa).

[5] H. Brézis - G. Stampacchia, *Sur la regularité de la solution d'inéquations elliptiques*, Bull. Soc. Math. France, 96 (1968), pp. 153-180.

[6] E. De Giorgi, *Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari*, Mem. Accad. Sc. Torino, s. III, parte I (1957), pp. 25 43.

[7] H. Lewy, *On a variational problem with inequalities on the boundary*, Journ. Math. Mech., 17 (1968), pp. 861-884.

[8] H. Lewy - G. Stampacchia, *On the regularity of the solution of a variational inequality*, Comm. Pure and Appl. Math., 22 (1969), pp. 153-188.

[9] G. Stampacchia, *Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 15, fascicule 1 (1965), pp. 189-258.

[14] G. Stampacchia, *Problemi al contorno ellittici, con dati discontinui, dotati di soluzioni hölderiane*, Ann. Mat. Pura Appl., 51 (1960), pp. 1-38.