(13)

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES. — *Sur le comportement du maximum ponctuel des solutions de certains problèmes paraboliques par rapport au temps.* Note (*) de M. **Hugo Beirão-da-Veiga**, présentée par M. Jacques-Louis Lions.

On considère la solution $u(x, \tau)$ d'une inéquation variationnelle parabolique quasi linéaire dans un cylindre $\Omega\times]0, T[$, $0 < T \leqq +\infty$, et on démontre pour chaque $t \in]0, T]$ la majoration $\sup \operatorname{ess} |u(x, \tau)|$ dans $\Omega\times]0, t[\ \leqq A e^{Bt}$.

On se donne un ouvert connexe et borné Ω de $\mathbf{R}^N$ de frontière lipschitzienne Γ, Ω étant localement d'un seul côté de Γ. Étant donné $T > 0$ on pose $\Lambda = \Omega\times]0, T[$, $V = H^{1,2}(\Omega)$, $\mathscr{V} = L^2(0, T; V)$, $L^{p,s}(\Lambda) = L^s(0, T; L^p(\Omega))$, $\mathscr{E} = L^{2,\infty}(\Lambda)\cap\mathscr{V}$, $\mathscr{W}_1 = \{u \in \mathscr{V} : du/dt \in L^2(0, T; L^2(\Omega))\}$; ces espaces sont munis de leurs normes naturelles. On supposera par commodité $N > 2$.

On se donne aussi des fonctions réelles $B_k(x, t, y, z)$, $k = 0, \ldots, N$, définies dans $\Lambda\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}^N$ mesurables en (x, t) et continues en (y, z). On suppose qu'il existe des constantes positives a et $\bar{a}$ et des fonctions b, f, d, m, g, e, h non négatives et mesurables dans Λ tels que pour tout $(y, z) \in \mathbf{R}\times\mathbf{R}^N$ et pour presque tout $(x, t) \in \Lambda$ on a

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{j=1}^{N} B_j z_j \geqq a|z|^2 - by^2 - f, \\ |B_0| \leqq d|z| + m|y| + g, \\ |B_j| \leqq \bar{a}|z| + e|y| + h \qquad (j = 1, \ldots, N). \end{array}\right.$$

Soient p et s, $1 \leqq p, s \leqq +\infty$, tels que $0 \leqq N/(2p) + 1/s < 1$ et définissons χ_0, p_0, s_0 ~~par~~ $1/s_0 = 1/s + \chi_0/[(N+2\chi_0)s']$ où en général $1/r' = 1 - 1/r$, $1 \leqq r \leqq +\infty$. Nous supposerons que $b, f, m, d^2, e^2, h^2 \in L^{p,s}(\Lambda)$ et $g \in L^{p_0, s_0}(\Lambda)$. Posons finalement $\chi = 2\chi_0/N$, $q = 2p'(1+\chi)$, $r = 2s'(1+\chi)$.

par $\dfrac{N}{2p} + \dfrac{1}{s} = 1 - \chi_0$; $\dfrac{1}{p_0} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{\chi_0}{(N+2\chi_0)p}$

Pour presque tous les $t \in]0, T[$ on peut définir $A(t) : V \to V'$ par

$$(A(t)u, v) = \sum_{j=1}^{N}\int_\Omega B_j(x, t, u, \nabla u)\, D_j v\, dx + \int_\Omega B_0(x, t, u, \nabla u)\, v\, dx, \qquad \forall u, v \in V$$

et aussi

$$[A u, v] = \int_0^T (A(t)u(t), v(t))\, dt, \qquad \forall u, v \in \mathscr{E}.$$

Soit maintenant $\mathbf{K}$ un convexe fermé et non vide de V et soit

$$\mathscr{K} = \{v \in \mathscr{V} : v(t) \in \mathbf{K} \text{ p.p. en }]0, T[\};$$

$\mathscr{K}$ est un convexe fermé non vide de $\mathscr{V}$. On suppose en outre qu'il existe $k_0 \geqq 0$ tel que $\min(u, k) \in \mathbf{K}$, $\forall u \in \mathbf{K}$, $\forall k \geqq k_0$. On considérera aussi le cas particulier des convexes $\mathbf{K}$ tels que

$$(2)\qquad \|u^{(k)}\|_{2,\Omega} \leqq \gamma \|\nabla u^{(k)}\|_{2,\Omega}, \qquad \forall k \geqq k_0, \quad \forall u \in \mathbf{K},$$

où $u^{(k)} = u - \min(u, k)$ et γ est une constante. L'hypothèse (2) est valable en particulier pour les $\mathbf{K}$ tels que $u \in \mathbf{K} \Rightarrow u \leqq k_0$ dans un sous-ensemble de $\overline{\Omega}$ de mesure $(N-1)$-dimensionnelle non nule.

Soit finalement u une solution du problème

$$
(3) \quad \left\{
\begin{array}{l}
u \in C^0([0, T]; L^2(\Omega)) \cap \mathscr{K}, \qquad u(0) = u_0 \in \mathbf{K}, \\
\displaystyle\int_0^T (v'(t) + A(t)u(t), v(t) - u(t))\, dt \\
\displaystyle\geqq \frac{1}{2}(\| v(T) - u(T) \|_{2,\Omega}^2 - \| v(0) - u_0 \|_{2,\Omega}^2), \qquad \forall v \in \mathscr{W}_1 \cap \mathscr{K}.
\end{array}
\right.
$$

Pour des résultats d'existence liés à ce problème, *cf.* ([1]).

On désignera par c, c_1, c_2, c_3 des constantes qui dépendent au plus de a, N, p, s, Ω et γ et on pose par commodité :

$$\| g \| = \| g \|_{p_0, s_0, \Lambda}, \qquad \| f \| = \| f \|_{p, s, \Lambda}, \qquad \| \theta \| = \| \theta \|_{p, s, \Lambda}.$$

Alors :

Théorème I. — *Soit u une solution de* (3), $\theta = b + m + a^{-1} d$ *et supposons que*

$$(4) \qquad \sup \mathrm{ess}_\Omega\, u_0(x) \leqq k_0.$$

Alors $\sup \mathrm{ess}_\Lambda\, u(x, t) < +\infty$ *et en plus :*

$$(5) \qquad \sup \mathrm{ess}_\Lambda\, u(x, t) \leqq \{ 2k_0 + c_1 (H_1 \| g \| + \| f \|^{1/2}) H_2 \} e^{c \mathscr{H} T},$$

avec

$$H_1 = c_2 + c_3 \min(\| \theta \|^{-1/[2(1+\chi)]}, T^{1/r}), \qquad H_2 = \min(\| \theta \|^{-1/2}, c_2 (1 + T^{1/r}) T^{\chi/r}),$$
$$\mathscr{H} = \| \theta \|^{r/2\chi} + \| \theta \|^{r/2(1+\chi)}.$$

Si en particulier $\mathbf{K}$ *vérifie* (2) *alors :*

$$(6) \qquad \sup \mathrm{ess}_\Lambda\, u(x, t) \leqq \{ 2k_0 + c_1 (\| g \| + \| f \|^{1/2}) \min(\| \theta \|^{-1/2}, T^{\chi/r}) \} e^{c \| \theta \|^{r/2\chi} T}.$$

Les majorations (5) *et* (6) *restent valables si* $\theta \equiv 0$.

Théorème II. — *Soit u une solution de* (3), $\theta = b + m + a^{-1} d^2$ *et supposons vérifiée la condition* (4). *Supposons en outre que* $b, f, d, m, g \in L^\infty(\Lambda)$. *Alors :*

$$(7) \qquad \sup \mathrm{ess}_\Lambda\, u(x, t) \leqq \{ 2k_0 + c_1 H_2 (H_2 ||| g ||| + ||| f |||^{1/2}) \} e^{c \mathscr{H} T},$$

avec

$$H_2 = \min(||| \theta |||^{-1/2}, T^{1/(N+2)} + T^{1/2}), \qquad \mathscr{H} = ||| \theta |||^{(N+2)/2} + ||| \theta |||.$$

Si en particulier $\mathbf{K}$ *vérifie* (2) *alors on a* (7) *avec*

$$H_2 = \min(||| \theta |||^{-1/2}, T^{1/(N+2)}), \qquad \mathscr{H} = ||| \theta |||^{(N+2)/2}.$$

On a posé $|||\ \ ||| = \|\ \ \|_{\infty, \Lambda}$. *L'estimation* (7) *reste valable dans le cas* $\theta \equiv 0$.