Versione: 12 settembre 2022

Università di Pisa
Corso di laurea in Ingegneria Gestionale

prove scritte dell'esame di

# Analisi Matematica I (158AA), a.a. 2021-22

# Testi e soluzioni

Giovanni Alberti
Dipartimento di Matematica
Università di Pisa
largo Pontecorvo 5
56127 Pisa
http://pagine.dm.unipi.it/alberti

Gli scritti d'esame per il corso di Analisi Matematica I per Ingegneria Gestionale si compongono di due parti: una prima parte con otto domande relativamente semplici a cui si deve dare solo la risposta, ed una seconda con tre problemi a cui si deve invece dare una soluzione articolata in dettaglio. Il tempo a disposizione è di un'ora per la prima parte e di due ore per la seconda. Per ottenere la sufficienza sono solitamente richieste almeno cinque risposte corrette nella prima parte, ed un problema completamente risolto nella seconda.
Questa raccolta contiene i testi e le soluzioni degli scritti di tutti gli appelli dell'a.a. 2021-22, incluse le prove in itinere. Degli scritti di cui sono state preparate più varianti qui viene riportata solo la prima.

**Programma del corso [versione: 20 dicembre 2021].** Sono riportati in corsivo gli argomenti non fondamentali.

1. Funzioni e grafici
   - Richiamo delle nozioni di base di trigonometria. Coordinate polari di un punto nel piano.
   - Funzioni elementari: funzioni lineari, potenze, esponenziali, logaritmo (in base $e$), funzioni trigonometriche (seno, coseno, tangente), funzioni trigonometriche inverse.
   - Funzioni: dominio, codominio, immagine, grafico; funzione inversa; funzioni pari e dispari.
   - Operazioni sui grafici di funzioni. Risoluzione "grafica" di equazioni e disequazioni.

2. Limiti di funzioni e continuità
   - Limiti di funzioni; calcolo dei limiti elementari; forme indeterminate.
   - Funzioni continue.

3. Derivate
   - Derivata di una funzione. Significato geometrico come pendenza della retta tangente al grafico. Altre applicazioni del concetto di derivata: velocità (scalare e vettoriale) e accelerazione di un punto in movimento.
   - Derivate delle funzioni elementari e regole per il calcolo delle derivate.
   - Funzioni asintoticamente equivalenti (vicino ad un punto assegnato). Trascurabilità di una funzione rispetto ad un altra. Notazione di Landau ("o piccolo" e "o grande"). Parte principale di una funzione all'infinito e in zero. Principio di sostituzione nel calcolo dei limiti e delle parti principali.
   - Teorema di de l'Hôpital. Confronto tra i comportamenti asintotici di esponenziali, potenze e logaritmi all'infinito e in zero.
   - Valore massimo e minimo di una funzione; punti di massimo e di minimo (assoluti e locali); estremo superiore ed inferiore dei valori di una funzione. Esistenza del punti di minimo e di massimo per una funzione continua su un intervallo chiuso (teorema di Weierstrass, senza dimostrazione). Individuazione dei valori e dei punti di massimo e di minimo di una funzione definita su un'unione finita di intervalli (aperti o chiusi, limitati e non).
   - Sviluppo di Taylor (in zero) di una funzione ed espressione del resto come "o grande" e nella forma di Lagrange. Sviluppi di Taylor di alcune funzioni fondamentali. Formula del binomio di Newton. Uso degli sviluppi di Taylor per il calcolo dei limiti e delle parti principali.
   - Teoremi di Rolle, Lagrange e Cauchy e dimostrazioni (parziali) dei teoremi di de L'Hôpital e dello sviluppo di Taylor.
   - Funzioni crescenti e decrescenti; caratterizzazione in termini di segno della derivata. Funzioni convesse e concave; caratterizzazioni in termini di segno della derivata seconda. Applicazioni al disegno del grafico di una funzione.

4. Integrali
   - Definizione di integrale (definito) di una funzione su un intervallo in termini di area. Primitiva di una funzione e teorema fondamentale del calcolo integrale.
   - Calcolo delle primitive (integrali indefiniti) e degli integrali.

- Approssimazione dell'integrale tramite somme finite. La distanza percorsa da un punto in movimento come integrale del modulo della velocità. Parametrizzazione di una curva e calcolo della lunghezza.
- Calcolo delle aree delle figure piane. Calcolo dei volumi delle figure solide, e in particolare dei solidi di rotazione.

5. Integrali impropri
   - Integrali impropri semplici: definizione e possibili comportamenti.
   - Criterio del confronto e del confronto asintotico (per funzioni positive); criterio della convergenza assoluta (per funzioni a segno variabile).
   - Integrali impropri non semplici.

6. Serie numeriche e serie di potenze
   - *Successioni e limiti di successioni. Collegamento con i limiti di funzioni.*
   - Serie numeriche: definizione e possibili comportamenti. La serie geometrica.
   - Criterio del confronto con l'integrale. La serie armonica generalizzata.
   - Criteri per determinare il comportamento di una serie: del confronto, del confronto asintotico, della convergenza assoluta.
   - Serie di Taylor di alcune funzioni elementari. Espressione del numero $e$ come serie. *Definizione di esponenziale complesso e giustificazione della formula* $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.
   - Serie di potenze e raggio di convergenza, calcolo del raggio di convergenza con il criterio del rapporto e della radice.

7. Equazioni differenziali
   - Equazioni differenziali del primo ordine: definizione e fatti generali. Risoluzione delle equazioni lineari e delle equazioni a variabili separabili.
   - Equazioni differenziali del secondo ordine: definizione e fatti generali. Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti, omogenee e non omogenee. Risoluzione delle equazioni a coefficienti costanti omogenee; ricerca della soluzione particolare per quelle non omogenee per alcune classi di termini noti.

# TESTI E SOLUZIONI

PRIMA PARTE (prima variante)

1. Trovare le soluzioni della disequazione trigonometrica $\sin(\pi x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ nell'intervallo $[-1, 1]$.
   SOLUZIONE. $\big[-1, \frac{1}{4}\big] \cup \big[\frac{3}{4}, 1\big]$.

2. Determinare l'insieme di definizione della funzione $f(x) := \sqrt{\dfrac{x^2 - 2x - 3}{-x^2 - 9}}$.
   SOLUZIONE. $-1 \leq x \leq 3$.

3. Dire se esistono, e in caso affermativo calcolare, i punti di massimo e minimo assoluti della funzione $f(x) := 2x^3 \log x$ relativi alla semiretta $x > 0$.
   SOLUZIONE. Il punto di massimo non esiste. Il punto di minimo è $e^{-1/3}$.

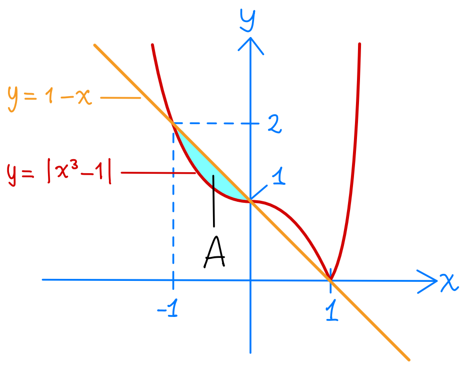
4. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) := \dfrac{9^{x-1}}{3^{x-1}}$ nel punto $x = 1$.
   SOLUZIONE. $y = \log 3 \cdot (x - 1) + 1$.

5. Scrivere la parte principale per $x \to +\infty$ di $f(x) := \sqrt[3]{x^2 - 1} - \sqrt[4]{x^5 + 1}$.
   SOLUZIONE. La parte principale è $-x^{5/4}$.

6. Mettere le seguenti funzioni nell'ordine corretto rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$:
$$\underbrace{\frac{x + \log x}{x^3 + x^5}}_{a}\ ,\quad \underbrace{\frac{4^x + 1}{2^x - 1}}_{b}\ ,\quad \underbrace{2^x \log x}_{c}\ ,\quad \underbrace{\frac{x - x^3}{3 + x^2}}_{d}\ .$$
   SOLUZIONE. $a \ll d \ll b \ll c$.

7. Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 7 in $x = 0$ di $f(x) := \big(x + 2x^4\big)\big(1 + 2x^3\big)^{1/3}$.
   SOLUZIONE. Il polinomio è $x + \frac{8}{3}x^4 + \frac{8}{9}x^7$.
   SOLUZIONE.

8. Disegnare l'insieme $A$ dei punti $(x, y)$ del piano tali che $|x^3 - 1| \leq y \leq 1 - x$.
   SOLUZIONE.



Seconda parte (prima variante)

$\boxed{1}$ Trovare per quali numeri reali $a$ vale la disuguaglianza $x - 2 \le ae^{x/2}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Soluzione. Siccome la funzione $e^{x/2}$ è sempre positiva, posso riscrivere la disuguaglianza nella forma

$$a \ge \underbrace{(x-2)\,e^{-x/2}}_{f(x)},$$

che è soddisfatta per tutti gli $x \in \mathbb{R}$ se e solo se

$$a \ge \max_{x\in\mathbb{R}} f(x)$$

(al solito, se il valore massimo non esiste, va sostituito con l'estremo superiore dei valori).
Devo quindi trovare il valore massimo (o l'estremo superiore dei valori) della funzione $f(x)$ al variare di $x \in \mathbb{R}$. Per farlo applico la solita strategia: confronto il valore di $f$ in $\pm\infty$ (cioè gli estremi dell'intervallo $\mathbb{R}$) con il valore nell'unico punto in cui si annulla la derivata

$$f'(x) = \big(-\tfrac{1}{2}x + 2\big)\,e^{-x/2}\,,$$

vale a dire $x = 4$:

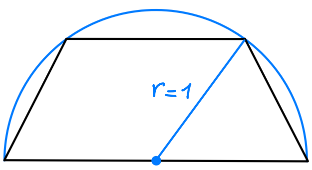
$$\begin{aligned} f(-\infty) &:= \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x-2)\,e^{-x/2} = (-\infty)\cdot(+\infty) = -\infty\,,\\ f(+\infty) &:= \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-2}{e^{x/2}} = 0\,,\\ f(4) &= 2e^{-2}\,. \end{aligned}$$

(Nella seconda riga ho usato il fatto ben noto che $x - 2 \sim x \ll e^{x/2} = (e^{1/2})^x$ per $x \to +\infty$.)
Posso dunque concludere che il valore massimo di $f(x)$ è $f(4) = 2e^{-2}$, e quindi la disuguaglianza di partenza, $x - 2 \le ae^{x/2}$, è soddisfatta per ogni $x \in \mathbb{R}$ se e solo se

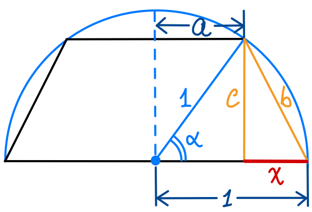
$$a \ge 2e^{-2}\,.$$

Osservazioni. In alternativa si può cercare il massimo della funzione $f(x)$ studiando solo il segno della derivata: così facendo si ottiene infatti che $f(x)$ cresce per $x \le 4$ e decresce per $x \ge 4$, da cui segue che necessariamente $x = 4$ è il punto di massimo.

$\boxed{2}$ Tra tutti i trapezi iscritti nella semicirconferenza di raggio 1 come nella figura sotto, trovare quello di perimetro massimo.




Soluzione. Osservo che il trapezio è univocamente determinato dalla lunghezza $x$ nella figura sotto, che varia tra 0 e 1 (per $x = 0$ e $x = 1$ ottengo dei trapezi degeneri).




Voglio quindi esprimere il perimetro $p$ del trapezio in funzione di $x$. Per farlo considero le lunghezze $a, b, c$ nel disegno ($2a$ è la base minore del trapezio e $c$ l'altezza), e osservo che siccome il trapezio è simmetrico rispetto all'asse verticale tratteggiato, vale che

$$p = 2(a + b + 1)\,.$$

Usando inoltre considerazioni di geometria elementare (al più il teorema di Pitagora) esprimo $a, b, c$ in funzione di $x$:

$$a = 1 - x\,, \quad c = \sqrt{1-a^2} = \sqrt{2x - x^2}\,, \quad b = \sqrt{c^2 + x^2} = \sqrt{2x}\,,$$

e sostituendo questi valori nella formula per $p$ ottengo infine

$$p = 4 - 2x + 2\sqrt{2x}\,.$$

Devo ora trovare il valore massimo della funzione $p(x)$ al variare di $x$ nell'intervallo $[0, 1]$. Per farlo confronto il valore di $p$ negli estremi dell'intervallo con il valore nel punto in cui si annulla la derivata

$$p'(x) = -2 + \sqrt{\frac{2}{x}}\,,$$

vale a dire $x = \frac{1}{2}$. Siccome

$$p(0) = 4\,, \quad p(1) = 2 + 2\sqrt{2} = 4{,}83 \pm 0{,}002\,, \quad p\big(\tfrac{1}{2}\big) = 5\,,$$

deduco che il perimetro massimo è 5 ed è raggiunto per $x = \frac{1}{2}$, vale a dire dal trapezio iscritto con base minore $2a = 1$ e altezza $c = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

<u>OSSERVAZIONI</u>. La scelta di $x$ come variabile per descrivere il trapezio non è l'unica possibile. Una possibile alternativa è l'altezza (ma in questo caso la formula per $p$ si complica), un'altra è l'angolo $\alpha$ riportato nella figura sopra; in questo caso $\alpha$ varia nell'intervallo $[0, \frac{\pi}{2}]$ e il perimetro è $p = 2 + 4\sin(\alpha/2) + 2\cos\alpha$. Inoltre la derivata

$$p'(\alpha) = 2\cos(\alpha/2) - 2\sin\alpha = 2\cos(\alpha/2)\big(1 - 2\sin(\alpha/2)\big)$$

si annulla quando $\sin(\alpha/2) = \frac{1}{2}$, vale a dire $\alpha = \frac{\pi}{3}$, e si verifica facilmente che il valore massimo di $p$ è raggiunto proprio per questo valore di $\alpha$.

**3** Consideriamo la funzione

$$f(x) := \log\big(x^3\cos(x + x^3)\big) - 3\log x\,.$$

a) Determinare la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0^+$.

b) Per ogni $a \in \mathbb{R}$, determinare la parte principale di $f(x) + ax^2$ per $x \to 0^+$.

<u>SOLUZIONE</u>. Usando le proprietà dei logaritmi riscrivo la funzione $f(x)$ come

$$f(x) = \log\big(\cos(x + x^3)\big)\,.$$

a) Per prima cosa sviluppo l'argomento del logaritmo: usando lo sviluppo $\cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + O(t^4)$ con $t := x + x^3$,[1] ottengo

$$\begin{aligned}\cos(x + x^3) = \cos t &= 1 - \tfrac{1}{2}t^2 + O(t^4)\\ &= 1 - \tfrac{1}{2}(x + x^3)^2 + O(x^4) = 1 - \tfrac{1}{2}x^2 + O(x^4)\end{aligned}$$

(nel terzo passaggio ho usato che $t \sim x$ e quindi $O(t^4) = O(x^4)$; nel quarto passaggio ho usato che $(x + x^3)^2 = x^2 + 2x^4 + x^6 = x^2 + O(x^4)$).
Uso ora lo sviluppo $\log(1 + t) = t + O(t^2)$ con $t := -\frac{1}{2}x^2 + O(x^4)$, ed ottengo

$$\begin{aligned}f(x) = \log\big(1 - \tfrac{1}{2}x^2 + O(x^4)\big) &= \log(1 + t)\\ &= t + O(t^2) = -\tfrac{1}{2}x^2 + O(x^4)\end{aligned}$$

(nel quarto passaggio ho usato il fatto che $t \sim -\frac{1}{2}x^2$ e quindi $O(t^2) = O(x^4)$).
In conclusione

$$\text{p.p.}(f(x)) = -\tfrac{1}{2}x^2\,.$$

b) Se $a \neq \frac{1}{2}$, usando quanto fatto al punto a) ottengo

$$\text{p.p.}\big(f(x) + ax^2\big) = \big(a - \tfrac{1}{2}\big)\,x^2\,.$$

[1] Posso farlo perché $x + x^3 \to 0$ per $x \to 0$.

Per $a = \frac{1}{2}$ devo però procedere in modo diverso, utilizzando sviluppi più precisi di quelli utilizzati nella risoluzione del punto a). Usando lo sviluppo $\cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 + O(t^6)$ con $t := x + x^3$ ottengo

$$\begin{aligned}\cos(x + x^3) = \cos t &= 1 - \tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{1}{24}t^4 + O(t^6)\\ &= 1 - \tfrac{1}{2}(x + x^3)^2 + \tfrac{1}{24}(x + x^3)^4 + O(x^6)\\ &= 1 - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{23}{24}x^4 + O(x^6)\end{aligned}$$

(nel terzo passaggio ho usato che $t \sim x$ e quindi $O(t^6) = O(x^6)$; nel quarto passaggio ho usato che $(x + x^3)^2 = x^2 + 2x^4 + O(x^6)$ e $(x + x^3)^4 = x^4 + O(x^6)$).
Uso ora lo sviluppo $\log(1 + t) = t - \frac{1}{2}t^2 + O(t^3)$ con $t := -\frac{1}{2}x^2 - \frac{23}{24}x^4 + O(x^6)$, ed ottengo

$$\begin{aligned}f(x) &= \log\big(1 - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{23}{24}x^4 + O(x^6)\big)\\ &= \log(1 + t)\\ &= t - \tfrac{1}{2}t^2 + O(t^3)\\ &= \big(-\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{23}{24}x^4 + O(x^6)\big) - \tfrac{1}{2}\big(-\tfrac{1}{2}x^2 + O(x^4)\big)^2 + O(x^6)\\ &= -\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{13}{12}x^4 + O(x^6)\end{aligned}$$

(nel quarto passaggio ho usato che $t \sim -\frac{1}{2}x^2$ e quindi $O(t^6) = O(x^6)$; nel quinto passaggio ho usato che $(-\frac{1}{2}x^2 + O(x^4))^2 = \frac{1}{4}x^4 + O(x^6)$).
Ma allora

$$f(x) + \tfrac{1}{2}x^2 = -\tfrac{13}{12}x^4 + O(x^6)$$

e quindi

$$\text{p.p.}\big(f(x) + +\tfrac{1}{2}x^2\big) = -\tfrac{13}{12}x^4\,.$$

PRIMA PARTE (prima variante)

1. Calcolare le coordinate polari dei seguenti punti (dati in coordinate cartesiane), scegliendo l'angolo nell'intervallo $[0, 2\pi)$: a) $(0, -3)$ ; b) $(-3, -\sqrt{3})$ ; c) $(-4, 4)$.

   SOLUZIONE. a) $\rho = 3$, $\theta = \frac{3\pi}{2}$ ; b) $\rho = 2\sqrt{3}$, $\theta = \frac{7\pi}{6}$ ; c) $\rho = 4\sqrt{2}$, $\theta = \frac{3\pi}{4}$ .

2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x^2)}{(\sin x)^4}$ , b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 1 + \cos(2^x)$ , c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^8 + 2^x}{x^{10}+1}$ .

   SOLUZIONE. a) $\frac{1}{2}$, b) non esiste, c) $+\infty$.

3. Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 4 in 0 di $f(x) := (2 - 3x^4)\exp(x^2)$.

   SOLUZIONE. $P(x) = 2 + 2x^2 - 2x^4$.

4. Calcolare la velocità *scalare* e la distanza percorsa tra gli istanti $t = 0$ e $t = 1$ da un punto che si muove con legge oraria $P(t) := \big(\sin(3t^3)\, ,\, -\cos(3t^3)\big)$.

   SOLUZIONE. Velocità scalare $= 9t^2$; distanza percorsa $= 3$.

5. Calcolare la primitiva $\displaystyle\int \frac{1}{(x-7)(x-2)}\, dx$.

   SOLUZIONE. Per prima cosa si scrive la frazione $\frac{1}{(x-a)(x-b)}$ nella forma $\frac{c}{x-a} + \frac{d}{x-b}$:
$$\int \frac{1}{(x-7)(x-2)}\, dx = \int \frac{1}{5(x-7)} - \frac{1}{5(x-2)}\, dx = \frac{1}{5}\log\left|\frac{x-7}{x-2}\right| + c\,.$$

6. Dire per quali $a > 0$ risulta finito il seguente integrale improprio: $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\log(1+x^{-a})}{x^{2a}+4}\, dx$

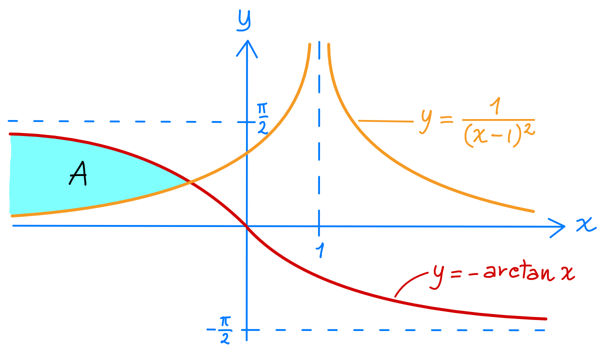
   SOLUZIONE. L'integrale si comporta come $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{3a}}$ e quindi è finito per $a > \frac{1}{3}$.

7. Determinare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = e^t\,(4x^2+1)$ che soddisfa $x(0) = \frac{1}{2}$.

   SOLUZIONE. Equazione a variabili separabili:
$$\int \frac{dx}{4x^2+1} = \int e^t\, dt \quad\Leftrightarrow\quad \tfrac{1}{2}\arctan(2x) = e^t + c \quad\Leftrightarrow\quad x = \tfrac{1}{2}\tan(2e^t + 2c)$$
   e imponendo la condizione iniziale ottengo $x(t) = \frac{1}{2}\tan\left(2e^t - 2 + \frac{\pi}{4}\right)$.

8. Disegnare l'insieme $A$ dei punti $(x, y)$ tali che $\displaystyle\frac{1}{(x-1)^2} \le y \le -\arctan x$.

   SOLUZIONE.



SECONDA PARTE (prima variante)

Scritto del primo appello: esercizi 1, 2 e 3; secondo compitino: esercizi 3, 4 e 5.

**1** a) Dire se la disequazione $(x^2+1)^5 \geq x^{10}+16$ vale per ogni $x \geq 1$.

b) Dire per quali $m>0$ vale che $(x^2+1)^5 \geq m(x^{10}+16)$ per ogni $x \geq 1$.

SOLUZIONE. Trovo prima la risposta al punto b), da cui seguirà che la risposta ad a) è positiva. Per farlo riscrivo la disequazione $(x^2+1)^5 \geq m(x^{10}+16)$ nella forma

$$\underbrace{\frac{(x^2+1)^5}{x^{10}+16}}_{f(x)} \geq m$$

ed noto quindi che questa disequazione è verificata per ogni $x \geq 1$ se e solo se

$$m \leq \min_{x\geq 1} f(x)$$

(se il minimo non esiste va sostituito con l'estremo inferiore).
Per calcolare questo minimo (o estremo inferiore) seguo la solita procedura, cioè confronto i valori di $f$ negli estremi dell'intervallo $[1,+\infty)$ e nei punti $x$ di questo intervallo in cui si annulla la derivata

$$f'(x) = \frac{10\,x\,(x^2+1)^4\,(x^{10}+16) - (x^2+1)^5\,10\,x^9}{(x^{10}+16)^2} = \frac{10\,x\,(x^2+1)^4(16-x^8)}{(x^{10}+16)^2}\,;$$

la derivata si annulla quando $x=0$ (che non ci interessa) e quando $16-x^8=0$, cioè $x=\sqrt{2}$. Inoltre

$$\begin{aligned} f(1) &= \frac{32}{17} = 1{,}88 \pm 0{,}01\,, \\ f(\sqrt{2}) &= \frac{81}{16} = 5{,}06 \pm 0{,}01\,, \\ f(+\infty) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^2+1)^5}{x^{10}+16} = 1\,, \end{aligned}$$

e quindi il valore minimo di $f(x)$ per $x \geq 1$ non esiste, mentre l'estremo inferiore dei valori è 1.

In conclusione la risposta al punto b) è $m \leq 1$ e di conseguenza la risposta al punto a) è affermativa.

**2** Un punto $P$ si muove con legge oraria $P(t) = \big(\rho(t)\cos t,\, \rho(t)\,\sin t\big)$ con $\rho(t) := 4\cos^2\Big(\frac{\sqrt{3}}{4}t\Big) - 1$.

a) Calcolare la distanza percorsa da $P$ nell'intervallo di tempo $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

b) Disegnare la traiettoria di $P$ nello stesso intervallo di tempo.

SOLUZIONE. a) Calcolo la velocità vettoriale $P$:

$$\vec{v}(t) = \big(\dot\rho(t)\cos t - \rho(t)\sin t\,,\ \dot\rho(t)\sin t + \rho(t)\cos t\big)\,,$$

e la velocità scalare :

$$\begin{aligned} v(t) = |\vec{v}(t)| &= \sqrt{(\dot\rho\cos t - \rho\sin t)^2 + (\dot\rho\sin t + \rho\cos t)^2} \\ &= \sqrt{\rho^2+\dot\rho^2} \\ &= \sqrt{\Big(4\cos^2\Big(\tfrac{\sqrt{3}}{4}t\Big) - 1\Big)^2 + \Big(-2\sqrt{3}\cos\Big(\tfrac{\sqrt{3}}{4}t\Big)\,\sin\Big(\tfrac{\sqrt{3}}{4}t\Big)\Big)^2} \\ &= \sqrt{\big(16\cos^4(\cdots) - 8\cos^2(\cdots) + 1\big) + 12\cos^2(\cdots)\big(1-\cos^2(\cdots)\big)} \\ &= \sqrt{4\cos^4(\cdots) + 4\cos^2(\cdots) + 1} \\ &= 2\cos^2(\cdots) + 1\,. \end{aligned}$$

Quindi la distanza percorsa $d$ è data da

$$\begin{aligned} d = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} v(t)\,dt &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2\Big(\tfrac{\sqrt{3}}{4}t\Big) + 1\,dt \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\Big(\tfrac{\sqrt{3}}{2}t\Big) + 2\,dt \\ &= \tfrac{2}{\sqrt{3}} \int_{-\frac{\sqrt{3}}{4}\pi}^{\frac{\sqrt{3}}{4}\pi} \cos(s)\,ds + 2\pi = \tfrac{4}{\sqrt{3}} \sin\Big(\tfrac{\sqrt{3}}{4}\pi\Big) + 2\pi\,. \end{aligned}$$

(Nel terzo passaggio ho usato l'identità $\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(\cos(2\alpha)+1)$; nel quarto ho spezzato l'integrale come somma di due integrali, calcolando direttamente quello della funzione 2 ed usando il cambio di variabile $s = \frac{\sqrt{3}}{2}t$ per quello di $\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t)$.)

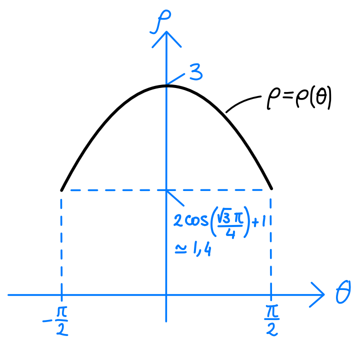
b) Osservo che le coordinate *polari* del punto $P$ all'istante $t$ sono $\theta = t$ e $\rho = \rho(t)$, e quindi la traiettoria di $P$ è data dalla curva dei punti del piano le cui coordinate polari soddisfano

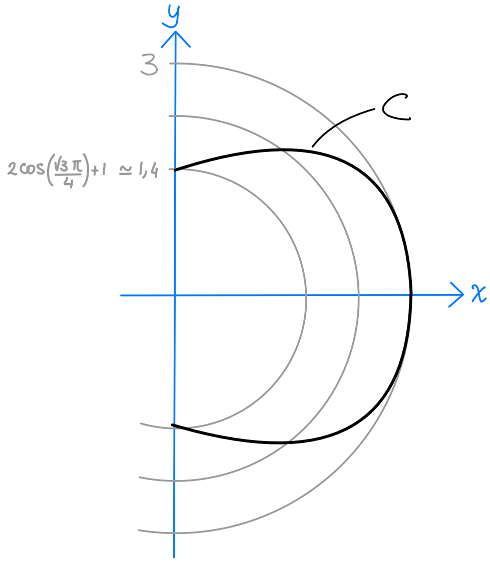
$$-\tfrac{\pi}{2} \le \theta \le \tfrac{\pi}{2} \quad \text{e} \quad \rho = \rho(\theta)\,.$$

Osservo ora che

$$\rho(\theta) = 4\cos^2\Big(\tfrac{\sqrt{3}}{4}\theta\Big) - 1 = 2\cos\Big(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\theta\Big) + 1$$

(nel secondo passaggio ho usato l'identità $\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(\cos(2\alpha)+1)$) e traccio quindi il grafico della funzione $\rho(\theta)$ relativamente all'intervallo $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ (figura sotto a sinistra).
Usando questo grafico traccio infine la traiettoria di $P$ (figura sotto a destra).




$\boxed{3}$ Dato $a \in \mathbb{R}$, consideriamo l'equazione differenziale

$$\ddot{x} + 4a\dot{x} + a^3 x = t \qquad (*)$$

Determinare la soluzione generale di (*), facendo particolare attenzione al caso $a = 0$.

<u>SOLUZIONE</u>. La (*) è un'equazione differenziale del secondo ordine, lineare e a coefficienti costanti. Ricordo che per questo tipo di equazioni la soluzione generale è della forma

$$x(t) = x_{\text{om}}(t) + \tilde{x}(t)$$

dove $x_{\text{om}}$ è la soluzione generale dell'equazione omogenea $\ddot{x} + 4a\dot{x} + a^3x = 0$, mentre $\tilde{x}$ è una soluzione particolare dell'equazione (*).

*Calcolo di $x_{om}$.* L'equazione caratteristica associata all'equazione omogenea è $\lambda^2 + 4a\lambda + a^3 = 0$, ed ha come soluzioni

$$\lambda_{1,2} = -2a \pm \sqrt{a^2(4-a)}\,.$$

Distinguo ora diversi casi:

- se $a < 4$ e $a \neq 0$ le soluzioni $\lambda_{1,2}$ sono numeri reali distinti e quindi
$$x_{\text{om}}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R};$$
- se $a = 4$ allora $\lambda_1 = \lambda_2 = -8$ e quindi
$$x_{\text{om}}(t) = e^{-8t}(c_1 + c_2 t) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R};$$
- se $a = 0$ allora $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ e quindi
$$x_{\text{om}}(t) = c_1 + c_2 t \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R};$$
- se $a > 4$ le soluzioni $\lambda_{1,2}$ sono numeri complessi della forma $-2a \pm \omega i$ con $\omega := a\sqrt{a-4}$, e quindi
$$x_{\text{om}}(t) = e^{-2at}(c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t)) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

*Calcolo di $\tilde{x}$.* Poiché il termine noto $t$ è un polinomio di primo grado, cerco $\tilde{x}$ tra i polinomi di primo grado, vale a dire le funzioni della forma $\tilde{x}(t) = b + ct$. Sostituendo questa espressione nell'equazione (*) ottengo
$$(4ac + a^3 b) + a^3 ct = t\,,$$
e questa identità di polinomi è soddisfatta per tutti i $t$ se $a^3 c = 1$ e $4ac + a^3 b = 0$, vale a dire $c = \frac{1}{a^3}$ e $b = -\frac{4c}{a^2} = -\frac{4}{a^5}$ (devo supporre $a \neq 0$, altrimenti il sistema non ammette soluzioni $b, c$). Pertanto la soluzione particolare cercata è
$$\tilde{x}(t) = -\frac{4}{a^5} + \frac{t}{a^3} \quad \text{per } a \neq 0.$$
Nel caso $a = 0$ non ho alcuna soluzione particolare tra i polinomi di primo grado, e devo procedere in modo diverso. In questo caso l'equazione (*) si riduce a $\ddot{x} = t$, ed integrando due volte termine a termine ottengo $\dot{x} = \frac{1}{2}t^2 + c$ e poi $x = \frac{1}{6}t^3 + ct + c'$; quindi una soluzione particolare è
$$\tilde{x}(t) = \tfrac{1}{6}t^3 \quad \text{per } a = 0.$$

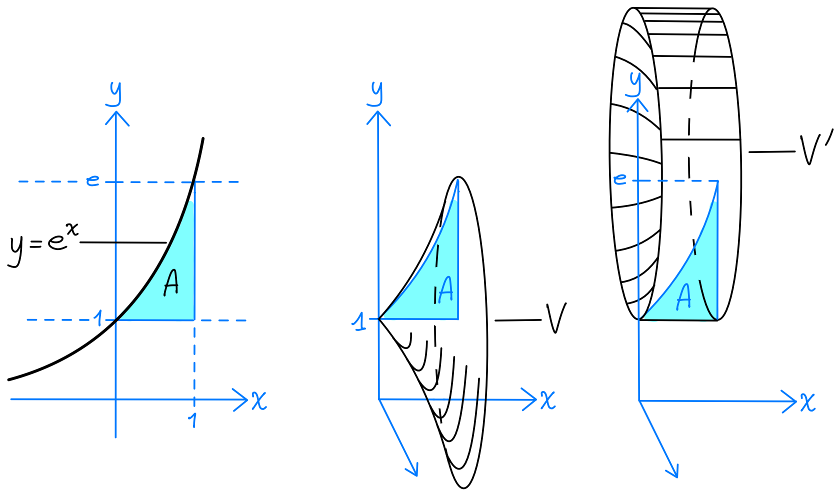
$\boxed{\mathbf{4}}$ Sia $A$ l'insieme dei punti $(x, y)$ tali che $1 \leq y \leq e^x$ e $-1 \leq x \leq 1$, sia $V$ il solido ottenuto ruotando $A$ attorno all'asse $y = 1$, e sia $V'$ il solido ottenuto ruotando $A$ attorno all'asse $y = e$.

a) Disegnare $A$, $V$ e $V'$.

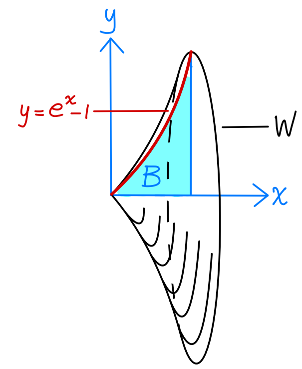
b) Calcolare il volume di $V$.

c) Calcolare il volume di $V'$.

SOLUZIONE. a) Gli insiemi $A$, $V$ e $V'$ sono disegnati nella figura sotto:



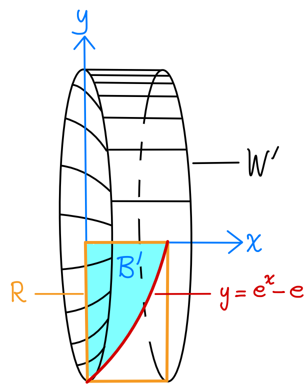

b) Siano $B$ e $W$ le figure ottenute traslando $A$ e $V$ verso il basso di 1, come in figura:




Allora $V$ e $W$ hanno lo stesso volume, e siccome $W$ è il solido ottenuto ruotando $B$ attorno all'asse $x$, possiamo calcolarne il volume usando la formula vista a lezione:

$$\begin{aligned}\text{volume}(V) = \text{volume}(W) &= \pi \int_0^1 (e^x - 1)^2\, dx \\ &= \pi \int_0^1 e^{2x} - 2e^x + 1\, dx \\ &= \pi \left| \frac{e^{2x}}{2} - 2e^x + x \right|_0^1 = \frac{\pi}{2}(e^2 - 4e + 5) = 2{,}38 \pm 0{,}01\,.\end{aligned}$$

c) Sia $W'$ il solido ottenuto traslando $V'$ verso il basso di $e$, e siano $R$ e $B'$ il rettangolo e la sua parte descritti nella figura sotto:




Allora $V'$ e $W'$ hanno lo stesso volume, e quello di $W'$ è uguale al volume del cilindro $C$ ottenuto ruotando $R$ attorno all'asse $x$ meno il volume del solido $W''$ ottenuto ruotando $B$ attorno all'asse $x$. Quindi

$$\begin{aligned}\text{volume}(W'') &= \pi \int_0^1 (e^x - e)^2\, dx \\ &= \pi \int_0^1 e^{2x} - 2e^{x+1} + e^2\, dx \\ &= \pi \left| \frac{e^{2x}}{2} - 2e^{x+1} + e^2 x \right|_0^1 = \frac{\pi}{2}(-e^2 + 4e - 1)\,,\end{aligned}$$

e infine, tenuto conto che $C$ ha raggio di base $e - 1$ ed altezza 1,

$$\begin{aligned}\text{volume}(V') = \text{volume}(W') &= \text{volume}(C) - \text{volume}(W'') \\ &= \pi(e-1)^2 - \frac{\pi}{2}(-e^2 + 4e - 1) \\ &= \frac{\pi}{2}(3e^2 - 8e + 3) = 5{,}37 \pm 0{,}01\,.\end{aligned}$$

$\boxed{5}$ Dire dove è improprio il seguente integrale, e studiarne il comportamento:

$$I = \int_0^{+\infty} \exp\left(\tfrac{1}{x} - x\right) dx\,.$$

<u>Soluzione</u>. La funzione integranda

$$f(x) := \exp\left(\tfrac{1}{x} - x\right)$$

è ben definita e continua per $x \neq 0$ ma non è definita per $x = 0$, e quindi l'integrale $I$ è improprio in 0 e $+\infty$. e per studiarne lo scrivo come somma degli integrali impropri semplici

$$I_1 := \int_0^1 f(x)\,dx\,, \quad I_2 := \int_1^{+\infty} f(x)\,dx\,,$$

di cui studio separatamente il comportamento. Osservo per cominciare che siccome la funzione $f$ è positiva, $I_1$ ed $I_2$ esistono e sono finiti oppure uguali a $+\infty$.

*Comportamento di $I_2$.* Per $x \to +\infty$ si ha che $f(x) \sim e^{-x}$ perché

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\exp\left(\frac{1}{x} - x\right)}{e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} \exp\left(\tfrac{1}{x}\right) = \exp(0) = 1\,,$$

e quindi, per il criterio del confronto asintotico forte,

$$I_2 \approx \int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx = \Big| -e^{-x}\Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{e}\,,$$

ed in particolare $I_2$ è finito.

*Comportamento di $I_1$.* Procedendo come sopra si vede che $f(x) \sim \exp\left(\frac{1}{x}\right)$ per $x \to 0$ e quindi

$$I_1 \approx \int_0^1 \exp\left(\tfrac{1}{x}\right) dx = \int_1^{+\infty} \frac{e^t}{t^2}\,dt = +\infty\,,$$

dove nel primo passaggio ho usato il criterio del confronto asintotico forte, nel secondo ho usato il cambio di variabile $t = \frac{1}{x}$, mentre l'ultima uguaglianza segue dal fatto che l'ultimo integrale è improprio a $+\infty$ e la funzione integranda $e^t/t^2$ ha limite positivo per $t \to +\infty$ (per la precisione tende a $+\infty$).

In conclusione $I_1 = +\infty$, e quindi anche $I = +\infty$.

<u>Osservazioni</u>. (i) Per concludere che $I = +\infty$ basta dimostrare che $I_1 = +\infty$ e che $I_2$ esiste e non vale $-\infty$; la dimostrazione che $I_2$ è finito (data sopra) è superflua.

(ii) Si potrebbe pensare che l'equivalenza asintotica $\exp\left(\frac{1}{x} - x\right) \sim \exp(-x)$ per $x \to +\infty$ segue dal fatto che $\frac{1}{x} - x \sim -x$. Tuttavia questa giustificazione non è corretta perché in generale non è vero che $f_1(x) \sim f_2(x)$ implica $\exp(f_1(x)) \sim \exp(f_2(x))$. Per esempio, $-x+1 \sim -x$ per $x \to +\infty$, ma $e^{-x+1} \not\sim e^{-x}$ perché il rapporto $e^{-x+1}/e^{-x}$ vale $e$ per ogni $x$, e dunque non tende a 1.

(iii) Per dimostrare che $I_1 = +\infty$ si può anche usare il fatto che $\frac{1}{x} \to +\infty$ per $x \to 0^+$, e quindi, ricordando che $y \ll e^y$ per $y \to +\infty$,

$$\tfrac{1}{x} \ll \exp\left(\tfrac{1}{x}\right) \sim \exp\left(\tfrac{1}{x} - x\right) = f(x) \quad \text{per } x \to 0^+;$$

poiché inoltre $\int_0^1 \frac{dx}{x} = +\infty$, usando il criterio del confronto asintotico debole ottengo $I_1 = +\infty$.

PRIMA PARTE (prima variante)

1. Scrivere la formula dell'inversa $g(y)$ della funzione $f(x) := \dfrac{x+1}{x-2}$.

   SOLUZIONE. $g(y) = \dfrac{2y+1}{y-1}$.

2. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := \exp(ax^3 + x^2 + 3ax)$ è crescente.

   SOLUZIONE. Serve che la derivata di $f(x)$ sia sempre positiva (o nulla), ovvero che che il polinomio $3ax^2 + 2x + 3a$ sia sempre positivo (o nullo). Questo lo si ottiene imponendo che il discriminante sia negativo o nullo, e che il coefficiente di $x^2$ sia positivo. Facendo i conti si ottiene $a \geq \frac{1}{3}$.

3. Mettere le seguenti funzioni nell'ordine corretto rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$:
$$\underbrace{\frac{x^6 + \log x}{x^3 + x^4}}_{a}, \quad \underbrace{\frac{2x \log x}{x^3 + 1}}_{b}, \quad \underbrace{\frac{4}{x^2 + 1}}_{c}, \quad \underbrace{\frac{x^6 - 1}{1 + x^3}}_{d}.$$

   SOLUZIONE. $c \ll b \ll a \ll d$.

4. Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 4 in 0 di $f(x) := \dfrac{\exp(x^2) - 1}{1 + x^2}$.

   SOLUZIONE. $P(x) = x^2 - \frac{1}{2}x^4$.

5. Calcolare $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{(x^2+1)^5}\, dx$.

   SOLUZIONE. Utilizzando il cambio di variabile $y = x^2 + 1$ si ottiene il valore $\frac{1}{8}$.

6. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (n^2 + n^4) \sin\left(\tfrac{1}{n^a}\right)$ converge ad un numero finito.

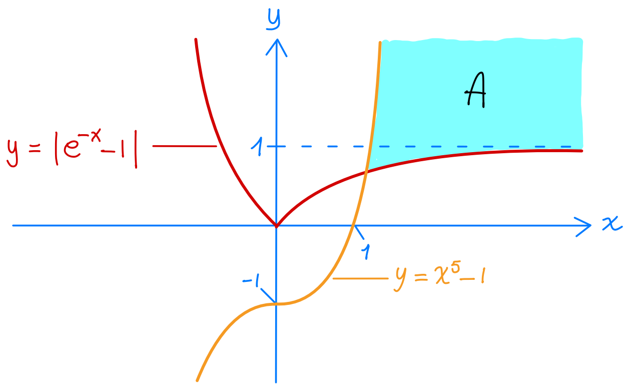
   SOLUZIONE. La serie si comporta come $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{a-4}}$ e quindi converge per $a > 5$.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = 2x + 4e^t$ che soddisfa $x(0) = 0$.

   SOLUZIONE. Si tratta di un'equazione differenziale del primo ordine *lineare*. La soluzione cercata è $x(t) = 4(e^{2t} - e^t)$.

8. Disegnare l'insieme $A$ dei punti $(x, y)$ tali che $|e^{-x} - 1| \leq y \leq x^5 - 1$.

   SOLUZIONE.



SECONDA PARTE (prima variante)

**1** Dato $a \in \mathbb{R}$, consideriamo la funzione

$$f(x) := \log(\cos(2x)) - \log(1 + ax^2)\,.$$

Trovare la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0$, facendo particolare attenzione al caso $a = -2$.

SOLUZIONE. Usando lo sviluppo $\cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + O(t^4)$ con $t = 2x$ ottengo

$$\cos(2x) = 1 - 2x^2 + O(x^4)\,,$$

usando poi lo sviluppo $\log(1 + t) = t + O(t^2)$ con $t = -2x^2 + O(x^4)$ ottengo

$$\begin{aligned}\log(\cos(2x)) &= \log(1 - 2x^2 + O(x^4)) \\ &= \big[-2x^2 + O(x^4)\big] + O((-2x^2)^2) = -2x^2 + O(x^4)\,,\end{aligned}$$

e analogamente

$$\log(1 + ax^2) = ax^2 + O(x^4)\,.$$ [1]

Mettendo insieme le ultime due equazioni ottengo $f(x) = -(2 + a)x^2 + O(x^4)$, e quindi

$$\text{p.p.}(f(x)) = -(a + 2)\,x^2 \quad \text{per } a \neq -2.$$

Per $a = -2$ so solo che $f(x) = O(x^4)$; questo non basta a determinare la parte principale di $f(x)$, ma mi dice che ha grado 4 o più. Per trovarla ripercorro i calcoli svolti sopra usando sviluppi di Taylor più precisi.
Usando lo sviluppo $\cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 + O(t^6)$ con $t = 2x$ ottengo

$$\cos(2x) = 1 - 2x^2 + \tfrac{2}{3}x^4 + O(x^6)\,,$$

usando poi lo sviluppo $\log(1 + t) = t - \frac{1}{2}t^2 + O(t^3)$ con $t = -2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + O(x^6)$ ottengo

$$\begin{aligned}\log(\cos(2x)) &= \log(1 - 2x^2 + \tfrac{2}{3}x^4 + O(x^6)) \\ &= \big[-2x^2 + \tfrac{2}{3}x^4 + O(x^6)\big] - \tfrac{1}{2}\big[-2x^2 + O(x^4)\big]^2 + O((-2x^2)^3) \\ &= -2x^2 - \tfrac{4}{3}x^4 + O(x^6)\,.\end{aligned}$$

e analogamente

$$\log(1 - 2x^2) = -2x^2 - 2x^4 + O(x^6)\,.$$

Mettendo insieme le ultime due equazioni ottengo infine $f(x) = \frac{2}{3}x^4 + O(x^6)$, e quindi

$$\text{p.p.}(f(x)) = \tfrac{2}{3}x^4 \quad \text{per } a = -2.$$

**2** Sia $A$ l'insieme dei punti $(x, y)$ tali che $x^2 \leq y \leq \sqrt{1 + x^4}$, e sia $V$ il solido ottenuto ruotando $A$ attorno all'asse $y$.

a) Tracciare un disegno approssimativo di $A$ e di $V$.

b) Dire se l'area di $A$ è finita o infinita.

c) Dire se il volume di $V$ è finito o infinito.

SOLUZIONE. a) Per disegnare $A$ devo innanzitutto disegnare il grafico della funzione

$$f(x) := \sqrt{1 + x^4} = (1 + x^4)^{1/2}\,.$$

Si vede subito che questa funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, pari, strettamente positiva, e tende a $+\infty$ per $x \to \pm\infty$. Inoltre studiando il segno della derivata

$$f'(x) = 2x^3\,(1 + x^4)^{-1/2}$$

si vede che $f(x)$ cresce per $x \geq 0$ e decresce per $x \leq 0$, e studiando il segno della derivata seconda

$$f''(x) = 2x^2(3 + x^4)\,(1 + x^4)^{-3/2}$$

si vede che $f(x)$ è convessa.

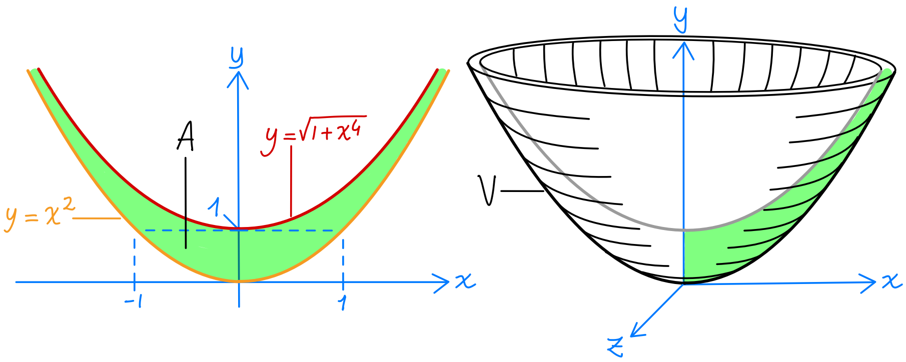
[1] Questa formula vale anche per $a = 0$, anche se in questo caso si ha, più semplicemente, $\log(1 + ax^2) = 0$.

Devo poi confrontare il grafico di $f(x)$ e quello di $x^2$. Elevando al quadrato entrambe le funzioni si vede che $f(x) > x^2$ per ogni $x$ (i grafici non si intersecano mai).
Inoltre, per $x \to \pm\infty$,

$$f(x) - x^2 = x^2 \left( \left(1 + \frac{1}{x^4}\right)^{1/2} - 1 \right) = x^2 \left( \frac{1}{2x^4} + O\Big(\frac{1}{x^8}\Big) \right) \sim \frac{1}{2x^2} \tag{1}$$

(nel primo passaggio ho raccolto $x^4$ dentro la radice, e nel secondo ho usato lo sviluppo di Taylor $(1+t)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}t + O(t^2)$ con $t = \frac{1}{x^4}$). Questo significa che i grafici di $f(x)$ e $x^2$ si avvicinano sempre di più per $x \to \pm\infty$ (sono tangenti "all'infinito").

Usando queste informazioni posso finalmente disegnare gli insiemi $A$ e $V$ (le proporzioni non sono rispettate, ed entrambe le figure sono state "tagliate" ad una certa altezza, mentre in realtà sono illimitate):




b) Siccome $f(x)$ e $x^2$ sono funzioni pari, l'insieme $A$ è simmetrico rispetto all'asse delle $y$, e quindi è L'area di $A$ è data dall'integrale improprio

$$\text{area}(A) = 2 \int_0^{+\infty} f(x) - x^2 \, dx$$

Questo integrale è improprio semplice in $+\infty$, e per via della formula (1) si comporta come l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$, che è finito. Quindi $A$ ha area finita.

c) Usando nel modo giusto la formula per il volume dei solidi di rotazione attorno all'asse $y$ ottengo che il volume di $V$ è dato da

$$\text{volume}(V) = 2\pi \int_0^{+\infty} x\big(f(x) - x^2\big)\, dx\,.$$

Questo integrale è improprio semplice in $+\infty$, e per via della formula (1) si comporta come l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx$, che vale $+\infty$. Quindi $V$ ha volume infinito.

**3** Consideriamo la funzione

$$f(x) := \int_{x+1}^{2x} \exp(t^2)\, dt\,. \tag{*}$$

a) Determinare il dominio di definizione di $f(x)$ e studiarne il segno.

b) Trovare il limite di $f(x)$ per $x \to \pm\infty$.

c) Tracciare il grafico di $f(x)$.

<u>SOLUZIONE</u>. Attenzione: come detto a lezione, non è possibile trovare una primitiva della funzione $\exp(t^2)$; la difficoltà dell'esercizio sta nel fatto che non si può quindi trovare una formula esplicita per $f(x)$.

a) La funzione $f(x)$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, infatti l'integrale in (*) ha sempre senso. Inoltre, siccome la funzione integranda $\exp(t^2)$ è strettamente positiva per ogni $t$, il valore dell'integrale è strettamente positivo quando l'estremo di integrazione superiore $2x$ è strettamente maggiore dell'estremo inferiore $x+1$, cioè quando $x > 1$. Invece l'integrale è strettamente negativo se $2x$ è strettamente minore di $x+1$, cioè se $x < 1$.
Riassumendo, $f(x) > 0$ per $x > 1$, $f(x) < 0$ per $x < 1$, e chiaramente $f(x) = 0$ per $x = 1$.

b) Osservo che $\exp(t^2) \geq 1$ e quindi, quando $2x > x+1$ (cioè quando $x > 1$), vale che

$$f(x) := \int_{x+1}^{2x} \exp(t^2)\, dt \geq \int_{x+1}^{2x} 1\, dt = x - 1\,,$$

e siccome la funzione $x-1$ tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$, lo stesso vale per la funzione $f(x)$.
Invece quando $2x < x+1$ (cioè quando $x < 1$) la disuguaglianza nella formula sopra si inverte:

$$f(x) := \int_{x+1}^{2x} \exp(t^2)\, dt = -\int_{2x}^{x+1} \exp(t^2)\, dt \leq -\int_{2x}^{x+1} 1\, dt = x - 1\,,$$

e siccome la funzione $x-1$ tende a $-\infty$ per $x \to -\infty$, lo stesso vale per la funzione $f(x)$.

c) La derivata di $f(x)$ è data da

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\exp((2x)^2) - \exp((x+1)^2) \\ &= 2\exp(4x^2) - \exp(x^2+2x+1) \\ &= \exp(4x^2 + \log 2) - \exp(x^2+2x+1)\,, \end{aligned}$$

e dunque $f'(x) \geq 0$, ovvero $f(x)$ è crescente, se

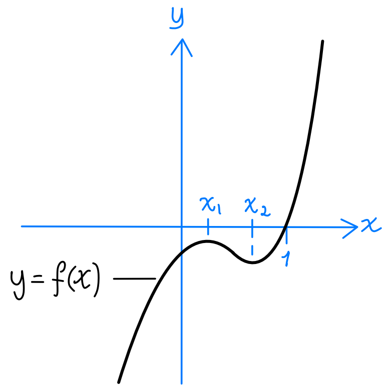
$$4x^2 + \log 2 \geq x^2 + 2x + 1$$

cioè se $x \leq x_1$ oppure $x \geq x_2$ dove

$$x_1 := \frac{1}{3}\big(1 - \sqrt{4 - 3\log 2}\big) \simeq -0{,}1286\,, \quad x_2 := \frac{1}{3}\big(1 + \sqrt{4 - 3\log 2}\big) \simeq +0{,}7953\,;$$

e invece $f'(x) \leq 0$, ovvero $f(x)$ è decrescente, se $x_1 \leq x \leq x_2$.

Sulla base di quanto visto ottengo il grafico riportato sotto (le proporzioni non sono rispettate).



PRIMA PARTE (prima variante)

1. Dire per quali $\alpha \in [0, 2\pi)$ vale l'identità $\cos(x-\alpha) = \sin\bigl(x - \frac{\pi}{6}\bigr)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
   SOLUZIONE. $\alpha = \frac{2\pi}{3}$.

2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^3 \sin x}{\exp(x^4) - 1}$ ; b) $\displaystyle\lim_{x\to(\pi/2)^+} \frac{e^x \sin x}{\cos x}$ ; c) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} 3^x \sqrt{1+x^4}$ .
   SOLUZIONE. a) 1; b) $-\infty$; c) 0.

3. Dire se esistono i valori di massimo e minimo assoluto della funzione $f(x) := \arctan(x^5 - 45\,x)$ relativamente alla semiretta $x \geq -2$ e calcolarli; se non esistono calcolare l'estremo inferiore e superiore dei valori.
   SOLUZIONE. Il massino non esiste e l'estremo superiore è $\pi/2$. Il minimo è $\arctan\bigl(-36\sqrt{3}\bigr)$.

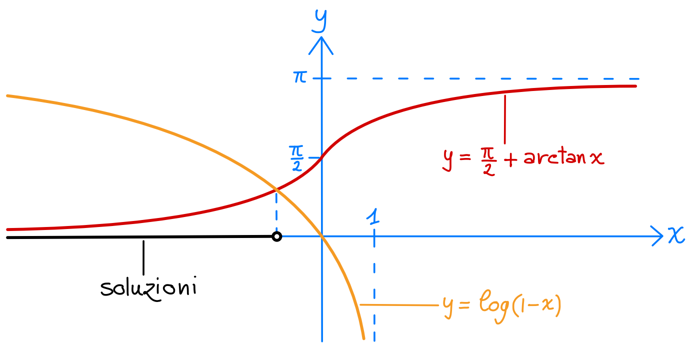
4. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ si ha che $\dfrac{e^x \log x}{x^4 + x^3} = o(x^a)$ per $x \to 0^+$.
   SOLUZIONE. $a < -3$.

5. Calcolare la distanza percorsa dall'istante $t = 0$ all'istante $t = 1$ da un punto $P$ che si muove con legge oraria $P(t) = (t^3 - 3t, 3t^2 + 4)$.
   SOLUZIONE. $d = \displaystyle\int_0^1 \bigl|\vec{v}(t)\bigr|\,dt = \int_0^1 3t^2 + 3\,dt = 4.$

6. Dire per quali $a > 0$ il seguente integrale improprio è finito: $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^4 \log\bigl(1 + \frac{1}{x^2}\bigr)}{x^{2a} + x^a}\,dx$ .
   SOLUZIONE. L'integrale si comporta come $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{2a-2}}$, e quindi è finito per $a > \frac{3}{2}$.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = \dfrac{2t \log t}{x}$ tale che $x(1) = 1$.
   SOLUZIONE. Equazione a variabili separabili: risolvendola ottengo $x^2 = 2t^2 \log t - t^2 + c$ con $c$ numero reale, ed imponendo la condizione iniziale ottengo
   $$x(t) = \sqrt{2t^2 \log t - t^2 + 2}\,.$$

8. Risolvere graficamente la disequazione $\frac{\pi}{2} + \arctan x \leq \log(1 - x)$.
   SOLUZIONE.



Seconda parte (prima variante)

$\boxed{1}$ Consideriamo la funzione

$$f(x) := e^x \left(\frac{1}{x} + 6\right).$$

a) Disegnare il grafico $y = f(x)$.

b) Per ogni $a \in \mathbb{R}$, dire quante sono le soluzioni dell'equazione $f(x) = a$.

c) Per ogni $a \in \mathbb{R}$, indichiamo con $x(a)$ la più grande delle soluzioni dell'equazione $f(x) = a$ (se ce n'è almeno una): calcolare il limite di $x(a)$ per $a \to +\infty$ e trovare una funzione elementare $g(a)$ asintoticamente equivalente a $x(a)$ per $a \to +\infty$.

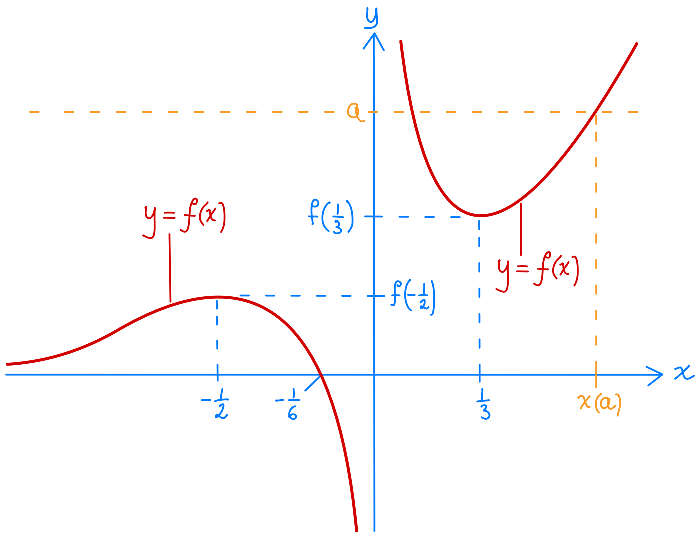
Soluzione. La funzione $f(x)$ è definita per ogni $x \neq 0$ e

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to 0^\pm} f(x) = \pm\infty\,.$$

Inoltre $f(x)$ vale 0 per $x = -\frac{1}{6}$, è positiva per $x < -\frac{1}{6}$ e per $x > 0$, ed è negativa per $-\frac{1}{6} < x < 0$. Studiando il segno della derivata

$$f'(x) = \frac{e^x}{x^2}(6x^2 + x - 1)$$

si ottiene che $f(x)$ cresce per $x \leq -\frac{1}{2}$ e per $x \geq \frac{1}{3}$, e decresce per $-\frac{1}{2} \leq x < 0$ e $0 < x \leq \frac{1}{3}$. Usando queste informazioni traccio il grafico riportato sotto (le proporzioni non sono rispettate):




b) Dal grafico risulta chiaramente che il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = a$ è

- 2 per $a \geq f\left(\frac{1}{3}\right) = 9\sqrt[3]{e} = 12{,}56 \pm 0{,}01$;
- 1 per $a = 9\sqrt[3]{e}$;
- 0 per $9\sqrt[3]{e} > a > f\left(\frac{1}{2}\right) = 8/\sqrt{e} = 4{,}85 \pm 0{,}01$;
- 1 per $a = 8/\sqrt{e}$;
- 2 per $8/\sqrt{e} > a > 0$;
- 1 per $a \leq 0$.

c) Sempre dal grafico risulta chiaro che $x(a)$ tende a $+\infty$ per $a \to +\infty$. Inoltre vale

$$a = f(x(a)) = e^{x(a)}\left(\frac{1}{x(a)} + 6\right) \sim 6\, e^{x(a)}\,.$$

(nell'ultimo passaggio ho usato che $1/x(a)$ tende a 0 e quindi è trascurabile rispetto a 6). Passando al logaritmo nell'equazione $a \sim 6\, e^{x(a)}$ ottengo

$$\log a \sim x(a) + \log 6\,.$$

(Per fare questo passaggio uso il seguente fatto, che non è stato menzionato a lezione e che quindi andrebbe dimostrato: se $f_1(x) \sim f_2(x)$ per $x \to x_0$ allora $\log(f_1(x)) \sim \log(f_2(x))$.)

Infine, poichè $\log 6$ è trascurabile rispetto a $\log a$ per $a \to +\infty$, ottengo
$$x(a) \sim \log a\,.$$

**2** Dato $a \in \mathbb{R}$, consideriamo l'equazione differenziale del primo ordine
$$\dot{x} + \big(2at + \tfrac{1}{t}\big)\, x = \exp(t^2)\,. \tag{*}$$
a) Trovare la soluzione generale di (*), facendo particolare attenzione al caso $a = -1$.

b) Dire per quali $a$ vale che *tutte* le soluzioni di (*) tendono a $+\infty$ poer $t \to +\infty$.

<u>Soluzione</u>. a) Si tratta di un'equazione differenziale del primo ordine lineare con coefficiente $2at + \frac{1}{t}$ non costante, e la risolvo moltiplicandola per
$$\exp\big(\textstyle\int 2at + \frac{1}{t}\, dt\big) = \exp(at^2 + \log t) = t\exp(at^2)\,.$$
Così facendo l'equazione diventa
$$\big(t\exp(at^2)\, x\big)' = t\exp((a+1)t^2)$$
ovvero
$$t\exp(at^2)\, x = \int t\exp((a+1)t^2)\, dt\,,$$
ovvero
$$x = \frac{1}{t}\exp(-at^2)\int t\exp((a+1)t^2)\, dt\,.$$
Osservo ora che per $a = -1$ si ha
$$\int t\exp((a+1)t^2)\, dt = \int t\, dt = \tfrac{1}{2}t^2 + c\,,$$
mentre per $a \neq -1$, usando il cambio di variabile $s = (a+1)t^2$, si ottiene
$$\begin{aligned}\int t\exp((a+1)t^2)\, dt &= \frac{1}{2a+2}\int \exp(s)\, ds\\ &= \frac{\exp(s)}{2a+2} + c = \frac{\exp((a+1)t^2)}{2a+2} + c\,.\end{aligned}$$
Pertanto la soluzione generale dell'equazione è
$$x(t) = \exp(t^2)\left(\frac{t}{2} + \frac{c}{t}\right) \quad \text{per } a = -1, \tag{1}$$
e
$$x(t) = \frac{\exp(t^2)}{(2a+2)t} + \frac{c\exp(-at^2)}{t} \quad \text{per } a \neq -1. \tag{2}$$
b) Per $a = -1$ la formula (1) mostra che
$$x(t) \sim \frac{t}{2}\exp(t^2) \quad \text{per } t \to +\infty,$$
ed in particolare
$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{t}{2}\exp(t^2) = +\infty\,.$$
Per $a > -1$ si ha $-a < 1$, per cui $\exp(-at^2) \ll \exp(t^2)$ per $t \to +\infty$, e quindi la formula (2) mostra che
$$x(t) \sim \frac{\exp(t^2)}{(2a+2)t} \quad \text{per } t \to +\infty,$$
e usando che $2a + 2 > 0$ ottengo
$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{\exp(t^2)}{(2a+2)t} = +\infty\,.$$
Infine per $a < -1$ e $c \neq 0$ la formula (2) mostra che
$$x(t) \sim c\frac{\exp(-at^2)}{t} \quad \text{per } t \to +\infty,$$

e dunque

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{c\exp(-at^2)}{t} = \begin{cases} +\infty & \text{se } c > 0, \\ -\infty & \text{se } c < 0; \end{cases}$$

in particolare non tutte le soluzioni dell'equazione tendono a $+\infty$.

Riassumendo, le soluzioni dell'equazione convergono tutte a $+\infty$ se e solo se $a \geq -1$.

**3** Dato $a > 0$, consideriamo la funzione

$$f(x) := \frac{1}{(\exp(x^a) - 1)^{a+4}}.$$

Dire dove è improprio l'integrale $I := \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$, e discuterne il comportamento.

<u>SOLUZIONE</u>. Per $x > 0$ si ha che $x^a > 0$, quindi $\exp(x^a) > 1$, e quindi $(\exp(x^a) - 1)^{a+4} > 0$; dunque la funzione $f(x)$ è ben definita, positiva e continua per tali $x$. Tuttavia per $x = 0$ si ha $(\exp(x^a) - 1)^{a+4} = 0$ e quindi la funzione non è definita in 0.

Pertanto l'integrale $I$ è improprio in 0 e $+\infty$, ed ammette solo due comportamenti: diverge a $+\infty$ oppure converge ad un numero finito positivo.

Per studiarne il comportamento lo spezzo come somma di due integrali impropri semplici che studio separatamente:

$$\int_0^{+\infty} f(x)\, dx = \underbrace{\int_0^1 f(x)\, dx}_{I_1} + \underbrace{\int_1^{+\infty} f(x)\, dx}_{I_2}.$$

Per capire il comportamento di $I_1$ studio il comportamento asintotico di $f(x)$ per $x \to 0$: usando lo sviluppo $e^t - 1 \sim t$ per $t \to 0$ con $t = x^a$ ottengo $\exp(x^a) - 1 \sim x^a$ e dunque

$$f(x) = \frac{1}{(\exp(x^a) - 1)^{a+4}} \sim \frac{1}{x^{a(a+4)}};$$

quindi

$$I_1 = \int_0^1 f(x)\, dx \approx \int_0^1 \frac{dx}{x^{a(a+4)}},$$

e pertanto è finito se e solo se $a(a+4) < 1$, vale a dire $0 < a < -2 + \sqrt{5}$.

Per capire il comportamento di $I_2$ studio il comportamento asintotico di $f(x)$ per $x \to +\infty$: usando che $e^t \gg t^b$ per $t \to +\infty$ per ogni $b > 0$, ottengo

$$\exp(x^a) - 1 \sim \exp(x^a) \gg x^{ab},$$

quindi

$$(\exp(x^a) - 1)^{a+4} \gg x^{ba(a+4)},$$

e

$$f(x) = \frac{1}{(\exp(x^a) - 1)^{a+4}} \ll \frac{1}{x^{ba(a+4)}}.$$

In particolare, prendendo $b = \frac{2}{a(a+4)}$, ottengo $f(x) \ll \frac{1}{x^2}$ e quindi l'integrale $I_2$ è finito per confronto asintotico con $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$.

Mettendo insieme i comportamenti di $I_1$ ed $I_2$ ottengo che $I$ è finito se $0 < a < -2 + \sqrt{5}$ e altrimenti $I = +\infty$.

PRIMA PARTE (prima variante)

1. Calcolare le coordinate polari dei seguenti punti (espressi in coordinate cartesiane), *scegliendo l'angolo nell'intervallo* $(-\pi, \pi]$: a) $(0, -3)$ ; b) $(-\sqrt{7}, -\sqrt{7})$ ; c) $(-2\sqrt{3}, 2)$.

   SOLUZIONE. a) $\rho = 3$, $\theta = -\frac{\pi}{2}$ ; b) $\rho = \sqrt{14}$, $\theta = -\frac{3\pi}{4}$ ; c) $\rho = 4$, $\theta = \frac{5\pi}{6}$ .

2. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := \exp(x^3 + ax^2 + 2x)$ è crescente su tutto $\mathbb{R}$.

   SOLUZIONE. La derivata $f'(x) := (3x^2+2ax+2)\exp(x^3+ax^2+2x)$ deve essere sempre positiva, ovvero il polinomio di secondo grado $3x^2+2ax+2$ deve essere sempre positivo; questo equivale a dire che il discriminante è negativo o nullo, cosa che si verifica per $-\sqrt{6} \le a \le \sqrt{6}$.

3. Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 6 in 0 di $f(x) := \sin(2x^2)\exp(3x^2)$.

   SOLUZIONE. $P(x) = 2x^2 + 6x^4 + \frac{23}{3}x^6$.

4. Calcolare la primitiva $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-2)(x+3)}$.

   SOLUZIONE. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-2)(x+3)} = \frac{1}{5}\int \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+3}\,dx = \frac{1}{5}\log|x-2| - \frac{1}{5}\log|x+3| + c\,.$

5. Calcolare il valore della serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{3^n n!}$.

   SOLUZIONE. Uso la serie di Taylor di $e^x$: $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{3^n n!} = \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1/3)^n}{n!}\right] - 1 - \frac{1}{3} = e^{1/3} - \frac{4}{3}\,.$

6. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{(1-x^2)^{2a}}\,dx$ è finito.

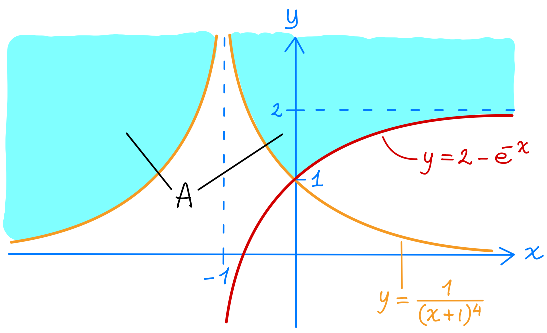
   SOLUZIONE. L'integrale è improprio semplice in 1, e con il cambio di variabile $x = 1-t$ ottengo un integrale improprio in 0:
   $$\int_0^1 \frac{\sin x}{(1-x^2)^{2a}}\,dx = \int_0^1 \frac{\sin(1-t)}{(2t-t^2)^{2a}}\,dt \approx \int_0^1 \frac{dt}{t^{2a}}\,.$$
   Pertanto l'integrale di partenza è finito per $a < \frac{1}{2}$.

7. Dire per quali $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione $x(t) = at^b$ risolve l'equazione differenziale $t^2\ddot{x} + x = t^6$.

   SOLUZIONE. $a = \frac{1}{31}$, $b = 6$.

8. Disegnare l'insieme $A$ dei punti $(x, y)$ tali che $y \ge \dfrac{1}{(x+1)^4}$ e $y \ge 2 - e^{-x}$.

   SOLUZIONE.



SECONDA PARTE (prima variante)

**1** Dire per quali valori del parametro reale $a$ l'equazione

$$\frac{x}{x+1} = ae^{x/2}$$

ammette esattamente due soluzioni.

SOLUZIONE. Riscrivo l'equazione nella forma

$$\frac{x\, e^{-x/2}}{x+1} = a\,,$$

e procedo al solito modo per determinarne il numero di soluzioni al variare del parametro $a$, cioè disegno il grafico della funzione

$$f(x) := \frac{x\, e^{-x/2}}{x+1}\,.$$

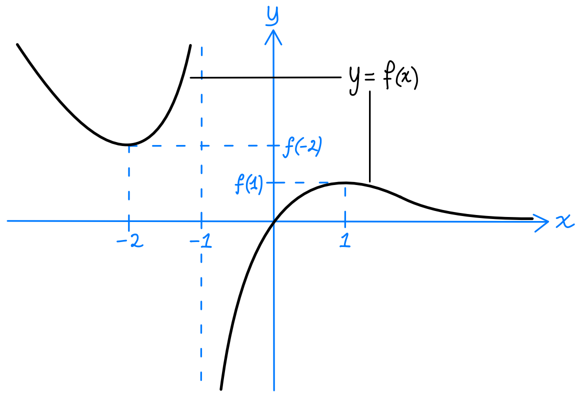
Per farlo, osservo innanzitutto che questa funzione è definita per $x \neq -1$, si annulla per $x = 0$, è positiva per $x < -1$ e $x > 0$ e negativa per $-1 < x < 0$, e valgono i seguenti limiti:

$$f(-\infty) = +\infty\,, \quad f(-1^-) = +\infty\,, \quad f(-1^+) = -\infty\,, \quad f(+\infty) = 0\,.$$

Studiando inoltre il segno della derivata

$$f'(x) = \frac{(-x^2 - x + 2)\, e^{-x/2}}{2(x+1)^2}\,,$$

0 ottengo che $f(x)$ decresce per $x \leq -2]$ e $x \geq 1$, e cresce per $-2 \leq x < -1$ e per $-1 < x \leq 1$. In particolare $x = -2$ è un punto di minimo locale, e $f(-2) = 2e \simeq 5{,}44$, mentre $x = 1$ è un punto di massimo locale, e $f(1) = \frac{1}{2\sqrt{e}} \simeq 0{,}30$.
Utilizzando queste informazioni traccio il disegno sotto:




Da questo grafico risulta chiaro che l'equazione $f(x) = a$, e quindi anche l'equazione di partenza, ammette due soluzioni solamente per $a > f(-2) = 2e$ e per $0 < a < f(1) = \frac{1}{2\sqrt{e}}$.

**2** Consideriamo le funzioni

$$f(x) := \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}\,, \quad g(x) := 1 - \frac{1}{x+2}$$

e l'insieme $A$ dei punti $(x, y)$ tali che $x > -1$ e $f(x) \leq y \leq g(x)$.

a) Disegnare i grafici di $f(x)$ e $g(x)$, e l'insieme $A$.

b) Dire se l'area di $A$ è finita oppure no.

SOLUZIONE. a) Il grafico della funzione $g(x)$ viene ottenuto traslando quello della funzione $1/x$ in alto di 1 e verso sinistra di 2.

Per disegnare il grafico di $f(x)$ osservo che questa funzione è definita per $x \neq -1$, è positiva per $x > -1$ e negativa per $x < -1$, e valgono i seguenti limiti:

$$f(-\infty) = -1\,, \quad f(-1^-) = -\infty\,, \quad f(-1^+) = +\infty\,, \quad f(+\infty) = 1\,.$$

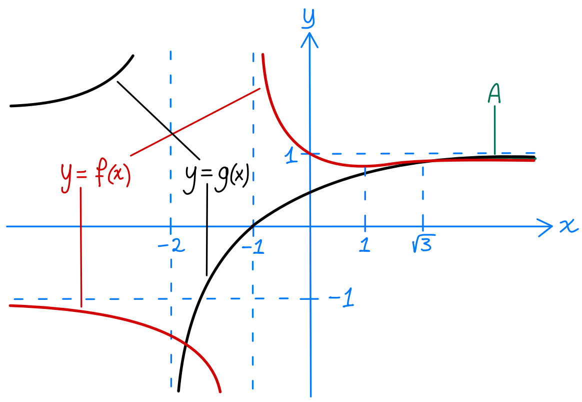
Studiando inoltre il segno della derivata

$$f'(x) = \frac{x-1}{(x+1)^2\sqrt{x^2+1}}\,,$$

ottengo che $f(x)$ decresce per $x < -1$ e per $-1 < x \leq 1$, e cresce per $x \geq 1$.
Per disegnare l'insieme $A$ mi serve inoltre risolvere la disequazione $f(x) \leq g(x)$ per $x > -1$: moltiplicando entrambi i termini della disequazione per $(x+1)(x+2)$ (quantità sempre positiva perché $x > -1$) ottengo

$$(x+2)\sqrt{x^2+1} \leq (x+1)^2\,,$$

ed elevando al quadrato, dopo le dovute semplificazioni ottengo $3 \leq x^2$, ovvero $x \geq \sqrt{3}$.
Utilizzando queste informazioni traccio il disegno sotto (le proporzioni non sono completamente rispettate):




b) Per quanto visto al punto a), l'area di $A$ è data dall'integrale

$$\text{area}(A) = \int_{\sqrt{3}}^{+\infty} g(x) - f(x)\,dx\,, \tag{1}$$

che è improprio semplice in $+\infty$.
Per determinare il comportamento di questo integrale cerco la parte principale di $g(x) - f(x)$ per $x \to +\infty$. Sapere che entrambe le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ tendono a 1 per $x \to +\infty$ (ovvero hanno la stessa parte principale–vale a dire 1) non è basta; cerco quindi di sviluppi più precisi:

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}} &= \big(1+\tfrac{1}{x}\big)^{-1}\big(1+\tfrac{1}{x^2}\big)^{1/2} \\ &= \big(1-\tfrac{1}{x}+O\big(\tfrac{1}{x^2}\big)\big)\big(1+O\big(\tfrac{1}{x^2}\big)\big) \\ &= 1-\tfrac{1}{x}+O\big(\tfrac{1}{x^2}\big) \end{aligned} \tag{2}$$

(nel secondo passaggio ho raccolto $x$ sia al numeratore che al denominatore, nel terzo ho riscritto l'espressione in modo diverso, nel quarto ho usato lo sviluppo $(1+t)^{-1} = 1 - t + O(t^2)$ con $t = \frac{1}{x}$ per il primo fattore e lo sviluppo $(1+t)^{1/2} = 1 + O(t)$ con $t = \frac{1}{x^2}$ per il secondo).
Analogamente

$$\begin{aligned} g(x) = 1 - \frac{1}{x+2} = 1 - \frac{1}{x\big(1+\frac{2}{x}\big)} &= 1 - \tfrac{1}{x}\big(1+\tfrac{2}{x}\big)^{-1} \\ &= 1 - \tfrac{1}{x}\big(1+O\big(\tfrac{1}{x}\big)\big) = 1 + O\big(\tfrac{1}{x^2}\big) \end{aligned} \tag{3}$$

(nel secondo passaggio ho raccolto $x$ al denominatore, nel terzo ho riscritto l'espressione in modo diverso, nel quarto ho usato lo sviluppo $(1+t)^{-1} = 1 - t + O(t^2)$ con $t = \frac{2}{x}$).
Utilizzando (2) e (3) ottengo

$$g(x) - f(x) = \tfrac{1}{x} + O\big(\tfrac{1}{x^2}\big) \sim \tfrac{1}{x} \quad \text{per } x \to +\infty,$$

quindi l'integrale improprio in (1) diverge a $+\infty$ per il criterio del confronto asintotitco, e dunque l'area di $A$ è infinita.

**3** Consideriamo la funzione $f(x) := \log(2e^x + 1)$, e indichiamo con $g(x)$ la parte principale di $f(x)$ per $x \to +\infty$.

a) Trovare $g(x)$.

b) Calcolare il limite di $f(x) - g(x)$ per $x \to +\infty$.

c) Trovare $a, b, c \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) = ax + b + ce^{-x} + O\big(e^{-2x}\big)$ per $x \to +\infty$.

<u>SOLUZIONE</u>. Rispondo direttamente al punto c): osservo che

$$f(x) = \log(2e^x + 1) = \log\Big(2e^x\big(1 + \tfrac{1}{2}e^{-x}\big)\Big) = \log(e^x) + \log 2 + \log\big(1 + \tfrac{1}{2}e^{-x}\big)$$

(nel secondo passaggio ho raccolto $2e^x$ nell'argomento del logaritmo, nel terzo ho usato una nota proprietà del logaritmo).
Usando poi che $\log(e^x) = x$ e lo sviluppo di Taylor $\log(1 + t) = t + O(t^2)$ con $t = \frac{1}{2}e^{-x}$ (posso farlo perché $t \to 0$ quando $x \to +\infty$), ottengo infine

$$f(x) = x + \log 2 + \tfrac{1}{2}e^{-x} + O\big(e^{-2x}\big) \quad \text{per } x \to +\infty. \tag{4}$$

a) Da (4) segue immediatamente che la parte principale di $f(x)$ per $x \to +\infty$ è $x$.

b) Da (4) segue anche che

$$f(x) - g(x) = f(x) - x = \log 2 + \tfrac{1}{2}e^{-x} + O\big(e^{-2x}\big) \to \log 2 \quad \text{per } x \to +\infty.$$

PRIMA PARTE (prima variante)

1. Risolvere la disequazione $2\cos(\pi x) \geq \sqrt{2}$ per $-2 \leq x \leq -1$.
   SOLUZIONE. $-2 \leq x \leq -\frac{7}{4}$.

2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni, facendo le dovute semplificazioni:
   a) $\arcsin\left(\sqrt{1-x}\right)$ ; b) $\dfrac{3^{3x-1}}{9^{x-2}}$ ; c) $\log\left(\dfrac{x^2}{1-x^3}\right)$ .
   SOLUZIONE. a) $\dfrac{-1}{2\sqrt{x(1-x)}}$ ; b) $\log 3 \cdot 3^{x+3}$ ; c) $\dfrac{2}{x} + \dfrac{3x^2}{1-x^3} = \dfrac{2+x^3}{x(1-x^3)}$ .

3. Mettere le seguenti funzioni nel corretto ordine rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to 0^+$:
   $$\underbrace{\frac{1}{x^2+x^3}}_{a}\ ,\quad \underbrace{xe^x}_{b}\ ,\quad \underbrace{x\sin x}_{c}\ ,\quad \underbrace{\frac{1+\log x}{x^2}}_{d}\ .$$
   SOLUZIONE. $c \ll b \ll a \ll d$.

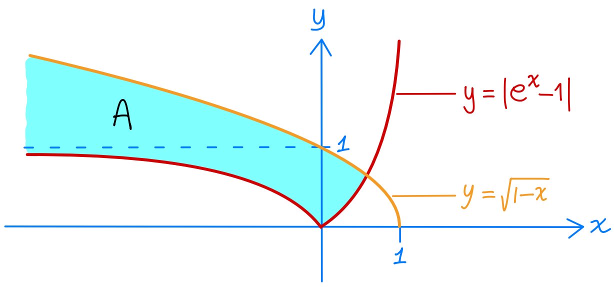
4. Dire se esistono i valori massimi e minimi della funzione $f(x) := x^2 e^{-x}$ per $x \leq 2$, e in caso affermativo dire quanto valgono.
   SOLUZIONE. Il valore massimo non esiste; il valore minimo è $f(0) = 0$.

5. Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) := \dfrac{\cos(x^2)\log(1+x^3)}{e^{x^2}-1}$ .
   SOLUZIONE. $x$.

6. Dire per quali $a > 0$ è finito l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\log(1+x^{-2a})}{1+x^a}\,dx$ .
   SOLUZIONE. L'integrale si comporta come $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3a}}$ e quindi è finito per $a > \frac{1}{3}$.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = \dfrac{x}{\sqrt[3]{t+2}}$ tale che $x(-1) = 1$.
   SOLUZIONE. Equazione a variabili separabili; la soluzione è $x(t) = \exp\left(\frac{3}{2}(t+2)^{2/3} - \frac{3}{2}\right)$

8. Disegnare l'insieme $A$ dei punti $(x, y)$ tali che $|e^x - 1| \leq y \leq \sqrt{1-x}$.
   SOLUZIONE.



## Seconda parte

**1** Dato il parametro $a \in \mathbb{R}$ consideriamo l'equazione differenziale

$$\ddot{x} - 2a\dot{x} + (a-2)^2 x = 2e^t \,. \tag{*}$$

a) Risolvere (*) per $a \neq 1; 5$.

b) Risolvere (*) per $a = 5$.

c) Risolvere (*) per $a = 1$.

<u>Soluzione</u>. L'equazione (*) è lineare, a coefficienti costanti, e non omogenea. Com'è noto, la soluzione generale di tale equazione è della forma

$$x(t) = x_{\text{om}}(t) + \tilde{x}(t)$$

dove $x_{\text{om}}$ è la soluzione generale dell'equazione omogenea $\ddot{x} - 2a\dot{x} + (a-2)^2 x = 0$, mentre $\tilde{x}$ è una particolare soluzione dell'equazione (*).

Per prima cosa trovo $x_{\text{om}}$. Le soluzioni dell'equazione caratteristica $\lambda^2 - 2a\lambda + (a-2)^2 = 0$ sono

$$\lambda_{1,2} = a \pm 2\sqrt{a-1}\,,$$

e quindi la formula per $x_{\text{om}}$ dipende dal segno di $a-1$ (che è poi il segno del discriminante):

$$x_{\text{om}}(t) = \begin{cases} c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} & \text{se } a > 1, \\ (c_1 + c_2 t)e^t & \text{se } a = 1, \\ e^{at}\big(c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t)\big) & \text{se } a < 1, \end{cases}$$

dove $c_1, c_2$ sono numeri reali arbitrari, e $\omega := \sqrt{1-a}$ (per $a < 1$).

Passo ora al calcolo di $\tilde{x}$. Per farlo devo prima capire per quali $a$ la funzione $e^t$ risolve l'equazione omogenea, vale a dire per quali $a$ il numero 1 risolve l'equazione caratteristica: sostituendo 1 a $\lambda$ in detta equazione ottengo $a^2 - 6a + 5 = 0$, equazione che è soddisfatta per $a = 1$ e $a = 5$. Considero quindi tre casi, come suggerito dal testo stesso dell'esercizio.

a) $a \neq 1; 5$. In questo caso cerco una soluzione particolare della forma $\tilde{x}(t) = ce^t$. Sostituendo questa espressione nell'equazione (*) ottengo l'identità $c(a^2 - 6a + 5)e^t = 2e^t$, che è verificata per ogni $t$ se $c(a^2 - 6a + 5) = 2$, ovvero se $c = \frac{2}{a^2-6a+5}$, e la soluzione particolare cercata è

$$\tilde{x}(t) = \tfrac{2}{a^2-6a+5} e^t \quad \text{per } a \neq 1\ 5.$$

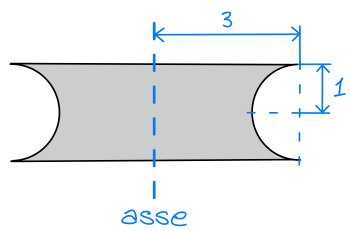
b) $a = 5$. In questo caso cerco una soluzione particolare della forma $\tilde{x}(t) = cte^t$, Procedendo come prima ottengo $c = -\frac{1}{4}$, e quindi

$$\tilde{x}(t) = -\tfrac{1}{4} te^t \quad \text{per } a = 5.$$

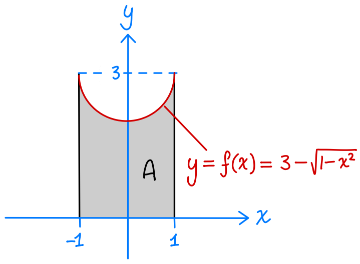
c) $a = 1$. In questo caso cerco una soluzione particolare della forma $\tilde{x}(t) = ct^2 e^t$, Procedendo come prima ottengo $c = 1$, e quindi

$$\tilde{x}(t) = t^2 e^t \quad \text{per } a = 1.$$

**2** Calcolare il volume della ruota $R$ la cui sezione (rispetto ad un piano passante per l'asse) è riportata nel disegno sotto.




<u>Soluzione</u>. Ridisegnando la sezione di $R$ come nella figura sotto, si vede che il solido $R$ è dato dalla rotazione della figura piana $A$ attorno all'asse delle $x$.




In particolare la semicirconferenza inferiore di centro $(0, 3)$ e raggio 1 coincide con il grafico della funzione $f(x) = 3 - \sqrt{1 - x^2}$. Pertanto il volume di $R$ è dato da

$$\begin{aligned} \text{volume}(R) &= \pi \int_{-1}^{1} (f(x))^2 \, dx \\ &= \pi \int_{-1}^{1} \left(3 - \sqrt{1 - x^2}\right)^2 dx \\ &= \pi \int_{-1}^{1} 10 - x^2 - 6\sqrt{1 - x^2} \, dx \\ &= \pi \left| 10\,x - \tfrac{1}{3}x^3 \right|_{-1}^{1} - 6\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2} \, dx = \tfrac{58}{3}\pi - 3\pi^2 \end{aligned}$$

(nell'ultimo passaggio ho usato che l'integrale $\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2} \, dx$ rappresenta l'area del semicerchio di raggio 1 e vale quindi $\pi/2$).

**3** Consideriamo la funzione $f(x) := \dfrac{1}{1 + 4x^2}$.

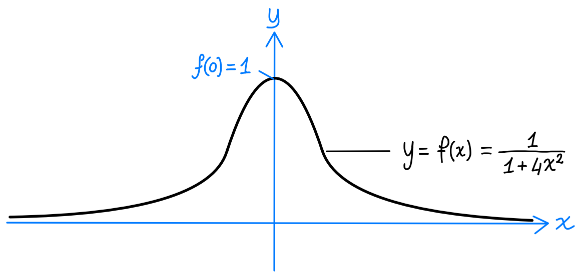
a) Tracciare un disegno approssimativo del grafico di $f$.

b) Trovare i punti del grafico di $f$ che sono più vicini all'origine.

<u>SOLUZIONE</u>. a) La funzione $f(x)$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, sempre positiva, e tende a 0 per $x \to \pm\infty$. Studiando inoltre il segno della derivata

$$f'(x) = \frac{-8x}{(1 + 4x^2)^2}$$

ottengo che $f(x)$ cresce per $x \leq 0$ e decresce per $x \geq 0$; in particolare 0 è il punto di massimo assoluto. Usando queste informazioni traccio il grafico riportato qui sotto.




b) Dato $x \in \mathbb{R}$, il punto del grafico di $f$ di ascissa $x$ è $P_x = (x, f(x))$ e la distanza di $P_x$ dall'origine è

$$d(x) = \sqrt{x^2 + (f(x))^2}\,.$$

Devo quindi trovare i punti di minimo assoluto della funzione $d(x)$ tra tutti gli $x \in \mathbb{R}$. Per farlo utilizzo la solita procedura vista a lezione. Osservo per cominciare che

$$d(\pm\infty) = +\infty\,,$$

e che la derivata

$$d'(x) = \frac{2x + 2f(x)\,f'(x)}{\sqrt{x^2 + (f(x))^2}} = \frac{2x\left(1 - \frac{8}{(1+4x^2)^3}\right)}{\sqrt{x^2 + (f(x))^2}}$$

è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, e si annulla per $x = 0$ e per

$$1 - \frac{8}{(1+4x^2)^3} \;\Leftrightarrow\; (1+4x^2)^3 = 8 \;\Leftrightarrow\; 1+4x^2 = 2 \;\Leftrightarrow\; x = \pm\tfrac{1}{2}\,.$$

Osservo quindi che

$$f(0) = 1\,, \quad f\big(\pm\tfrac{1}{2}\big) = \tfrac{\sqrt{2}}{2}\,,$$

e ne deduco che i punti di minimo assoluto di $d$ sono $x = \pm\frac{1}{2}$. Di conseguenza i punti del grafico di $f$ più vicini all'origine sono

$$P_{\pm\frac{1}{2}} = \big(\pm\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\big)\,.$$

PRIMA PARTE (prima variante)

1. Determinare l'insieme di definizione della funzione $f(x) := \dfrac{1}{1-\sqrt{e^x - 1}}$.

   SOLUZIONE. Deve valere $e^x - 1 \geq 0$ e $1 - \sqrt{e^x - 1} \neq 0$, vale a dire $x \geq 0$ e $x \neq \log 2$.

2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\log(1+3x)}{\exp(x^2)-1}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{e^x+1}{\sin(\pi x)}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\log(\log x)}{\log x}$.

   SOLUZIONE. a) 3; b) $-\infty$; c) 0.

3. Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 6 in 0 della funzione $f(x) := 2\sin(3x^2)\sqrt{1+2x^4}$.

   SOLUZIONE. $P(x) = 6x^2 - 3x^6$.

4. Calcolare la velocità vettore e la velocità scalare di un punto nel piano che si muove con legge oraria: $x(t) = 1 + e^t \cos t$; $y(t) = -2 + e^t \sin t$.

   SOLUZIONE. $\vec{v}(y) = \big(e^t(\cos t - \sin t),\, e^t(\cos t + \sin t)\big)$; $\big|\vec{v}(y)\big| = \sqrt{2}\, e^t$.

5. Calcolare $\displaystyle\int_0^{1/3} \sqrt[3]{1-3x}\, dx$.

   SOLUZIONE. Usando il cambio di variabile $t = 1 - 3x$ ottengo
   $$\int_0^{1/3} \sqrt[3]{1-3x}\, dx = \int_1^0 t^{1/3}\left(-\tfrac{1}{3}\right) dt = \Big|\, \tfrac{1}{4} t^{4/3} \Big|_0^1 = \frac{1}{4}.$$

6. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\ddot{x} - 4x = 8$ che soddisfa $x(0) = \dot{x}(0) = 0$.

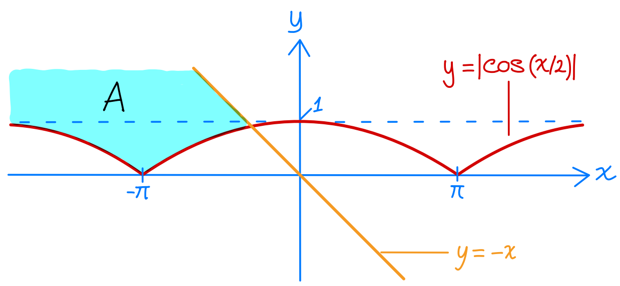
   SOLUZIONE. Equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, non omogenea: la soluzione generale è $x(t) = -2 + c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t}$; la soluzione cercata è $x(t) = -2 + e^{2t} + e^{-2t}$.

7. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{a^x + 1}{3^x + 2}\, dx$ converge.

   SOLUZIONE. L'integrale si comporta come $\int_1^{+\infty} (a/3)^x\, dx$ e converge per $a < 3$.

8. Disegnare l'insieme $A$ dei punti $(x, y)$ tali che $|\cos(x/2)| \leq y \leq -x$.

   SOLUZIONE.



SECONDA PARTE

**1** a) Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) := \exp\bigl(1 - \sqrt{1+3x^2}\bigr) - 1$.

b) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) + ax^2$.

c) Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) + g(x)$ con $g(x) := \exp\bigl(\frac{3}{2}x^2\bigr) - 1$

<u>SOLUZIONE</u>. Affronto direttamente il punto b) da cui poi ottengo la risposta al punto a).

b) Per rispondere devo sviluppare la funzione $f(x)$ ad un'ordine superiore al 2.
Usando lo sviluppo $\sqrt{1+t} = (1+t)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + O(t^3)$ con $t = 3x^2$ ottengo

$$\sqrt{1+3x^2} = 1 + \tfrac{3}{2}x^2 - \tfrac{9}{8}x^4 + O(x^6)\,,$$

e quindi

$$\exp\bigl(1 - \sqrt{1+3x^2}\bigr) = \exp\bigl(-\tfrac{3}{2}x^2 + \tfrac{9}{8}x^4 + O(x^6)\bigr)\,.$$

Usando ora lo sviluppo $\exp(t) = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + O(t^3)$ con $t = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{8}x^4 + O(x^6)$ ottengo

$$\begin{aligned}\exp\bigl(1 - \sqrt{1+3x^2}\bigr) &= 1 + t + \tfrac{1}{2}t^2 + O(t^3)\\ &= 1 + \bigl(-\tfrac{3}{2}x^2 + \tfrac{9}{8}x^4 + O(x^6)\bigr) + \tfrac{1}{2}\bigl(-\tfrac{3}{2}x^2 + O(x^4)\bigr)^2 + O(x^6)\\ &= 1 - \tfrac{3}{2}x^2 + \tfrac{9}{4}x^4 + O(x^6)\,,\end{aligned}$$

e infine

$$f(x) + ax^2 = \exp\bigl(1 - \sqrt{1+3x^2}\bigr) - 1 + ax^2 = \bigl(a - \tfrac{3}{2}\bigr)x^2 + \tfrac{9}{4}x^4 + O(x^6)\,, \tag{1}$$

da cui segue che

$$\text{p.p.}\bigl(f(x) + ax^2\bigr) = \begin{cases}\bigl(a - \frac{3}{2}\bigr)x^2 & \text{se } a \neq \frac{3}{2},\\ \frac{9}{4}x^4 & \text{se } a = \frac{3}{2}.\end{cases}$$

a) In particolare per $a = 0$ ottengo $\text{p.p.}(f(x)) = -\frac{3}{2}x^2$.

c) Siccome $\text{p.p.}(\exp(t) - 1) = t$, allora la parte principale di $g(x)$ è $\frac{3}{2}x^2$, che sommata alla parte principale di $f(x)$ dà 0. Per trovare la parte principale di $f(x) + g(x)$ devo quindi sviluppare $g(x)$ a un'ordine maggiore di 2.
Usando lo sviluppo $\exp(t) = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + O(t^3)$ con $t = \frac{3}{2}x^2$ ottengo

$$g(x) = \exp\bigl(\tfrac{3}{2}x^2\bigr) - 1 = \tfrac{3}{2}x^2 + \tfrac{9}{8}x^4 + O(x^6)\,,$$

e quindi, usando la formula (1) con $a = 0$,

$$f(x) + g(x) = \tfrac{27}{8}x^4 + O(x^6)\,,$$

da cui segue infine che $\text{p.p.}\bigl(f(x) + g(x)\bigr) = \frac{27}{8}x^4$.

**2** Consideriamo l'insieme $A$ dato dai punti $(x, y)$ tali $f(x) \le y \le g(x)$, dove

$$f(x) := \sqrt[5]{x^4 + 4}\,, \quad g(x) := \sqrt[5]{x^4 + x^2}\,.$$

Disegnare l'insieme $A$ e dire se ha area finita o meno.

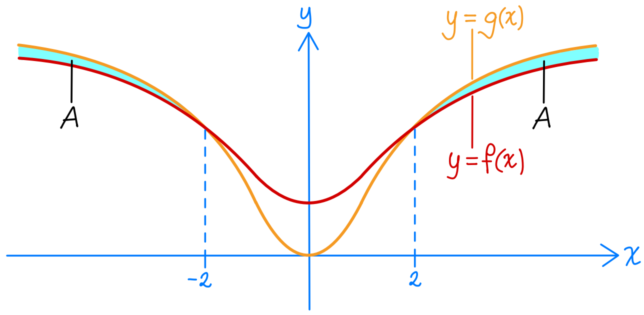
<u>SOLUZIONE</u>. Le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ sono entrambe definite per ogni $x \in \mathbb{R}$, pari, e tendono a $+\infty$ per $x \to \pm\infty$, e per la precisione sono asintoticamente equivalenti a $|x|^{4/5}$.
Studiando inoltre il segno della delle derivate

$$f'(x) = \tfrac{4}{5}(x^4 + 4)^{-4/5}x^3\,, \quad g'(x) = \tfrac{2}{5}(x^4 + 4)^{-4/5}(2x^2 + 1)x\,,$$

si vede infine che sia $f(x)$ che $g(x)$ sono crescenti per $x \ge 0$ e decrescenti per $x \le 0$.

Per disegnare $A$ ho inoltre bisogno di vedere per quali $x$ vale che $f(x) \ge g(x)$. Elevando alla potenza quinta questa disequazione ottengo $x^4 + 4 \le x^4 + x^2$, ovvero $2 \le x^2$, che è soddisfatta per $x \ge 2$ e per $x \le -2$.

Sulla base di quanto detto ottengo il disegno sottostante:




Usando il fatto che $A$ è simmetrico rispetto all'asse delle $y$ ottengo

$$\text{area}(A) = 2\int_2^{+\infty} g(x) - f(x)\, dx\,. \tag{2}$$

Questo integrale è improprio semplice in $+\infty$, e la funzione integranda è positiva.
Per determinarne il comportamento cerco la parte principale di $f(x)$ e di $g(x)$ per $x \to +\infty$:

$$\begin{aligned} f(x) = \big(x^4+4\big)^{1/5} &= x^{4/5}\big(1+4x^{-4}\big)^{1/5} \\ &= x^{4/5}\big(1+\tfrac{4}{5}x^{-4}+O(x^{-8})\big) = x^{4/5}+\tfrac{4}{5}x^{-16/5}+O(x^{-36/5}) \end{aligned}$$

(nel terzo passaggio ho usato lo sviluppo di Taylor $(1+t)^{1/5} = 1+\frac{1}{5}t+O(t^2)$ con $t = 4x^{-4}$; posso farlo perché $t \to 0$ quando $x \to +\infty$).
Analogamente

$$\begin{aligned} g(x) = \big(x^4+x^2\big)^{1/5} &= x^{4/5}\big(1+x^{-2}\big)^{1/5} \\ &= x^{4/5}\big(1+\tfrac{1}{5}x^{-2}+O(x^{-4})\big) = x^{4/5}+\tfrac{1}{5}x^{-6/5}+O(x^{-16/5})\,, \end{aligned}$$

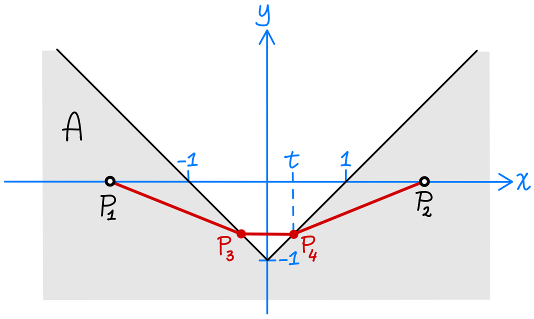
e mettendo insieme le ultime due formule ottengo infine

$$g(x) - f(x) \sim \tfrac{1}{5}x^{-6/5} \quad \text{per } x \to +\infty.$$

Pertanto l'integrale improprio in (2) si comporta come $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{6/5}}\, dx$, che è finito perché $\frac{6}{5} > 1$.
In particolare l'area di $A$ è finita.

$\boxed{3}$ Si vuole costruire una strada che congiunge due paesi rappresentati dai punti $P_1 := (-2, 0)$ e $P_2 := (2, 0)$ del piano cartesiano. Nel farlo, bisogna tenere conto che all'interno della zona $A$ rappresentata dai punti del piano $(x, y)$ tali che $y \le |x| - 1$, il costo unitario della strada è la metà che all'esterno. Trovare il percorso meno costoso che congiunge i due paesi (si può dare per buono che tale percorso è simmetrico rispetto all'asse delle $y$).

<u>SOLUZIONE</u>. Siccome il percorso più breve che collega due punti del piano è un segmento, i percorsi che collegano $P_1$ e $P_2$ da considerare sono solo le spezzate con vertici sul bordo della zona $A$.
Tra questi, quelli simmetrici rispetto all'asse delle $y$ sono fatti come il percorso in rosso nella figura sotto, ed in particolare sono parametrizzati dall'ascissa $t$ del punto $P_4$.




Calcolo ora il costo di tale percorso, presupponendo che il costo unitario all'interno di $A$ sia 1 e quello all'esterno sia 2 (nulla cambia se invece considero i costi $c$ e $2c$). Chiaramente la lunghezza del segmento che congiunge $P_3$ e $P_4$ è

$$\overline{P_3P_4} = 2t\,,$$

mentre tenendo conto che $P_4 = (t, t-1)$ ottengo

$$\overline{P_1P_3} = \overline{P_4P_2} = \sqrt{(2-t)^2 + (t-1)^2} = \sqrt{2t^2 - 6t + 5}$$

Pertanto il costo del percorso è

$$f(t) := 4t + 2\sqrt{2t^2 - 6t + 5}\,.$$

Si tratta ora di trovare il punto di minimo assoluto di $f(t)$ al variare di $t \geq 0$.
Per farlo, come prima cosa risolvo l'equazione $f'(t) = 0$: partendo dalla formula

$$f'(t) = 4 + \frac{4t - 6}{\sqrt{2t^2 - 6t + 5}}\,,$$

dopo alcuni passaggi ottengo l'equazione di secondo grado $4t^2 - 12\,t + 11 = 0$, che non ha soluzioni perché il discriminante è negativo; quindi l'equazione $f'(t) = 0$ non ha soluzioni.
Tenendo conto che $f(+\infty) = +\infty$, ne deduco che il valore minimo di $f(t)$ viene raggiunto per $t = 0$. Dunque il percorso meno costoso è la spezzata di vertici $P_1$, $P_2$ e $P_3 = P_4 = (0, -1)$, ed è tutto contenuto all'interno di $A$.

PRIMA PARTE (prima variante)

1. Trovare l'insieme di definizione della funzione $f(x) := \dfrac{1}{\log(4-x^2)}$.

   SOLUZIONE. Deve essere $4 - x^2 > 0$ e $\log(4-x^2) \neq 0$, cioè $-2 < x < 2$ e $x \neq \pm\sqrt{3}$.

2. Trovare i valori massimi e minimi di $f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$ relativamente all'intervallo $1 < x \leq 4$. In caso non esistano, specificare gli estremi superiori e inferiori dei valori.

   SOLUZIONE. Il valore massimo non esiste e l'estremo superiore dei valori è $+\infty$; il valore minimo è $f(3) = 6$,

3. Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 4 in 0 di $f(x) := (1 + 3x^4)\exp(2x^2)$.

   SOLUZIONE. $P(x) = 1 + 2x^2 + 5x^4$.

4. Dire per quali $a > 0$ vale che $xe^{2x} + 2^x = O(e^{ax})$ per $x \to +\infty$.

   SOLUZIONE. $a > 2$.

5. Calcolare $\displaystyle\int_{-\infty}^{2} 2^{2x}\,dx$.

   SOLUZIONE. $\dfrac{8}{\log 2}$.

6. Dire dove è improprio il seguente integrale, e per quali $a > 0$ risulta finito: $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(x^2+x^4)^a}$.

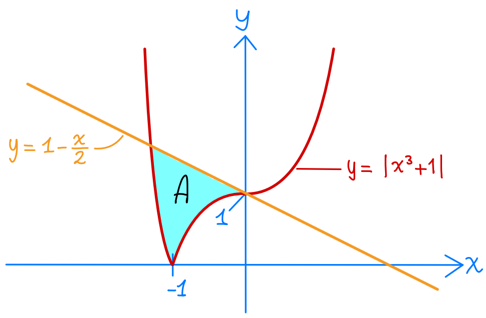
   SOLUZIONE. L'integrale è improprio in 0 e usando il fatto che è pari si ottiene
   $$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(x^2+x^4)^a} = 2\int_{0}^{1} \frac{dx}{(x^2+x^4)^a} \approx \int_{0}^{1} \frac{dx}{x^{2a}},$$
   e dunque è finito per $a < \frac{1}{2}$.

7. Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale $\dot{x} + 2tx = 6t$.

   SOLUZIONE. Equazione lineare del primo ordine: la soluzione generale è $x(t) = 3 + ce^{-t^2}$.

8. Disegnare l'insieme $A$ dei punti $(x, y)$ tali che $|x^3 + 1| \leq y \leq 1 - \dfrac{x}{2}$.

   SOLUZIONE.



Seconda parte (prima variante)

**1** Dato $a > 0$ consideriamo l'equazione differenziale

$$\ddot{x} - 2a\dot{x} + 4x = 8t^2 \,. \tag{*}$$

a) Trovare la soluzione generale di (*) per ogni $a > 0$.

b) Per quali $a > 0$ esiste almeno una soluzione $x$ di (*) tale che $x(t) \gg e^{4t}$ per $t \to +\infty$?

Soluzione. a) Al solito, uso il fatto che la soluzione di (*) si scrive come

$$x(t) = x_{\mathrm{om}}(t) + \tilde{x}(t)$$

dove $x_{\mathrm{om}}$ è la soluzione generale dell'equazione omogenea $\ddot{x} - 2a\dot{x} + 4x = 0$ mentre $\tilde{x}$ è una soluzione particolare di (*).

*Risoluzione dell'equazione omogenea.* L'equazione caratteristica associata all'equazione omogenea è $\lambda^2 - 2a\lambda + 4 = 0$, ed ha come discriminante $\Delta := a^2 - 4$ e come soluzioni

$$\lambda_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2 - 4}\,.$$

Distinguo dunque tre casi, corrispondenti al segno del discriminante $\Delta$:

- per $0 < a < 2$ si ha $\Delta < 0$ e $\lambda_{1,2} = a \pm \omega i$ con $\omega := \sqrt{-\Delta} = \sqrt{4 - a^2}$;
- per $a = 2$ si ha $\Delta = 0$ e $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$;
- per $a > 2$ si ha $\Delta > 0$ e quindi $\lambda_{1,2}$ sono reali e distinte.

Pertanto la soluzione dell'equazione omogenea è

$$x_{\mathrm{om}}(t) = \begin{cases} e^{at}(c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)) & \text{per } 0 < a < 2, \\ e^{2t}(c_1 + c_2 t) & \text{per } a = 2, \\ c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} & \text{per } a > 2, \end{cases} \tag{1}$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

*Calcolo della soluzione particolare.* Siccome il termine noto $8t^2$ è un polinomio di secondo grado, cerco la soluzione particolare tra i polinomi di secondo grado, cioè tra le funzioni della forma

$$\tilde{x}(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 \,.$$

Sostituendo questa espressione nell'equazione (*) ottengo la seguente identità di polinomi

$$(2b_2 - 2ab_1 + 4b_0) + (-4ab_2 + 4b_1)t + 4b_2 t^2 = 8t^2 \tag{2}$$

che è verificata se i coefficienti $b_0, b_1, b_2$ soddisfano il sistema

$$\begin{cases} 4b_2 = 8 \\ -4ab_2 + 4b_1 = 0 \\ 2b_2 - 2ab_1 + 4b_0 = 0 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} b_2 = 2 \\ b_1 = 2a \\ b_0 = a^2 - 1 \end{cases} \tag{3}$$

e dunque la soluzione particolare $\tilde{x}$ è data

$$\tilde{x}(t) = 2t^2 + 2at + a^2 - 1\,. \tag{4}$$

b) Per $a \le 2$ non ci sono soluzioni $x(t)$ di (*) tali che $x(t) \gg e^{4t}$. Questo segue dal fatto che per ogni soluzione vale

$$x(t) = o(e^{4t})\,. \tag{5}$$

(Infatti la formula (1) implica $x_{\mathrm{om}}(t) = O(e^{at}) = o(e^{4t})$ per $a < 2$, e $x_{\mathrm{om}}(t) = O(te^{2t}) = o(e^{4t})$ per $a = 2$, mentre la formula (4) implica $\tilde{x}(t) = O(t^2) = o(e^{4t})$ per ogni $a$.)

Resta da vedere se per $a > 2$ esiste $x(t)$ tale che $x(t) \gg e^{4t}$.

Indico con $\lambda_1$ la più grande delle due soluzioni dell'equazione caratteristica.

Se $\lambda_1 \le 4$ allora per ogni soluzione $x(t)$ vale

$$x(t) = O(e^{4t})$$

(la dimostrazione è la stessa di sopra) e quindi la risposta è negativa.
Se invece $\lambda_1 > 4$ allora la soluzione ottenuta ponendo $c_1 = 1$ e $c_2 = 0$ nella formula per $x_{\mathrm{om}}$, vale a dire

$$x(t) = e^{\lambda_1 t} + \tilde{x}(t)\,,$$

soddisfa $x(t) \gg e^{4t}$ (e in effetti lo stesso vale per ogni soluzione con $c_1 \neq 0$).
Resta da determinare per quali $a > 2$ vale che $\lambda_1 > 4$, cioè

$$a + \sqrt{a^2 - 4} > 4\,.$$

Risolvendo questa disequazione si ottiene $a > \frac{5}{2}$.

**2** Discutere al variare di $a > 0$ il comportamento dell'integrale improprio

$$I := \int_{-1}^{1} \frac{dx}{(1 + \cos(\pi x))^a}\,.$$

<u>SOLUZIONE</u>. L'integrale è pari e improprio in $\pm 1$, e quindi

$$I = 2 \int_0^1 \frac{dx}{(1 + \cos(\pi x))^a}\,.$$

L'integrale a destra dell'uguale è improprio semplice in 1, e usando il cambio di variabile $x = 1-t$ mi riconduco ad un integrale improprio semplice in 0:

$$I = 2 \int_0^1 \frac{dt}{(1 + \cos(\pi - \pi t))^a} = 2 \int_0^1 \frac{dt}{(1 - \cos(\pi t))^a}\,.$$

Usando il fatto che

$$1 - \cos(\pi t) = 1 - \left[1 - \tfrac{1}{2}(\pi t)^2 + O\big((\pi t)^4\big)\right] \sim \tfrac{\pi^2}{2} t^2\,,$$

ottengo infine che

$$I \approx \int_0^1 \frac{dt}{t^{2a}}\,,$$

ed in particolare $I$ è finito se e solo se $a < \frac{1}{2}$.

**3** Consideriamo la funzione $f(x)$ data da

$$f(x) := \int_0^{\sqrt{x}} \frac{3t^2(1 - t^4)}{t^4 + 1}\, dt\,.$$

a) Calcolare la derivata di $f(x)$.
b) Trovare la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0^+$ e $x \to +\infty$.
b) Disegnare il grafico di $f(x)$.
[*L'integrale che definisce $f(x)$ non può essere calcolato esplicitamente (o perlomeno non è facile farlo); l'esercizio va quindi affrontato senza un'espressione esplicita per $f(x)$.*]

<u>SOLUZIONE</u>. a) Per una formula vista a lezione, $f'(x) = \frac{3t^2(1-t^4)}{t^4+1}(\sqrt{x})'$ con $t := \sqrt{x}$, ovvero

$$f'(x) := \frac{3\sqrt{x}(1 - x^2)}{2(x^2 + 1)}\,. \tag{6}$$

b) Dire che la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0^+$ è $mx^a$ equivale a dire che

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{mx^a} = 1\,,$$

ovvero che il limite

$$m = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x^a}$$

esiste ed è diverso da zero.
Siccome $f(x)$ tende a 0 per $x \to 0^+$, posso calcolare questo limite usando il teorema di de L'Hôpital e il fatto che $f'(x) \sim \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}$ per $x \to 0^+$:

$$m = \lim_{x \to 0^+} \frac{f'(x)}{a x^{a-1}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{3}{2a} x^{\frac{3}{2} - a} = \begin{cases} 0 & \text{se } a < \frac{3}{2}, \\ \frac{3}{2a} = 1 & \text{se } a = \frac{3}{2}, \\ +\infty & \text{se } a > \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Dunque il limite è finito solo se $a = \frac{3}{2}$, e in tal caso vale 1. Ne deduco che

$$\text{p.p.}(f(x)) = x^{\frac{3}{2}} \quad \text{per } x \to 0^+.$$

Analogamente, per trovare la parte principale di $f(x)$ per $x \to +\infty$ considero il seguente limite (che ho calcolato usando il teorema di de L'Hôpital e il fatto che $f'(x) \sim -\frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}$):

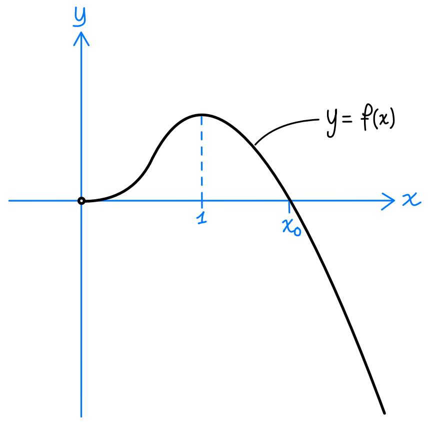
$$m = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x^a} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{a x^{a-1}} = \lim_{x \to +\infty} -\frac{3}{2a} x^{\frac{3}{2} - a} = \begin{cases} -\infty & \text{se } a < \frac{3}{2}, \\ -\frac{3}{2a} = -1 & \text{se } a = \frac{3}{2}, \\ 0 & \text{se } a > \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Ne deduco che

$$\text{p.p.}(f(x)) = -x^{\frac{3}{2}} \quad \text{per } x \to +\infty.$$

c) La funzione $f(x)$ è definita per $x \geq 0$ (deve infatti essere definito l'estremo di integrazione $\sqrt{x}$ nella formula che definisce $f(x)$).
Studiando il segno della derivata data in (6) ottengo che $f(x)$ è crescente per $0 \leq x \leq 1$ e decrescente per $x \geq 1$ (in particolare $x = 1$ è il punto di massimo assoluto).

Usando queste informazioni e le parti principali ottenute al punto b) traccio il disegno qui sotto.




OSSERVAZIONI. (i) Senza calcolare l'integrale che definisce $f$ non è possibile determinare il valore di $f(1)$, e tantomeno il punto $x_0$ in cui $f$ si annulla.

(ii) La parte principale di $f(x)$ per $x \to 0^+$ può essere ottenuta anche sostituendo alla funzione integranda la sua parte principale per $t \to 0$:

$$f(x) := \int_0^{\sqrt{x}} \frac{3t^2(1 - t^4)}{t^4 + 1} \, dt \sim \int_0^{\sqrt{x}} 3t^2 \, dt = \Big| \, t^3 \, \Big|_0^{\sqrt{x}} = x^{\frac{3}{2}} \, .$$

Questa sostituzione è corretta, ma andrebbe giustificata, e il modo più semplice per farlo è usare il Teorema di de L'Hôpital come fatto sopra.

Allo stesso modo si può ottenere la parte principale di $f(x)$ per $x \to +\infty$. In questo caso la sostituzione è legittima solo se $f(x)$ ha limite *infinito* per $x \to +\infty$ (il fatto che non sia sempre vera rende a maggior ragione necessaria una giustificazione).