Versione: 20 settembre 2021

Università di Pisa
Corso di laurea in Ingegneria Gestionale

prove scritte dell'esame di

Analisi Matematica I (158AA), a.a. 2020-21

Testi

Giovanni Alberti
Dipartimento di Matematica
Università di Pisa
largo Pontecorvo 5
56127 Pisa
http://pagine.dm.unipi.it/alberti

Gli scritti d'esame per il corso di Analisi Matematica I per Ingegneria Gestionale si compongono di due parti: una prima parte con otto domande relativamente semplici a cui si deve dare solo la risposta, ed una seconda con tre problemi a cui si deve invece dare una soluzione articolata in dettaglio. Il tempo a disposizione è di un'ora per la prima parte e di due ore per la seconda. Per ottenere la sufficienza sono solitamente richieste almeno cinque risposte corrette nella prima parte, ed un problema completamente risolto nella seconda.
Questa raccolta contiene i testi degli scritti di tutti gli appelli dell'a.a. 2020-21, incluse le prove in itinere. Degli scritti di cui sono state preparate più varianti qui viene riportata solo la prima.

Programma del corso [versione: 20 dicembre 2020]. Sono riportati in corsivo gli argomenti non fondamentali.

1. Funzioni e grafici
   - Richiamo delle nozioni di base di trigonometria. Coordinate polari di un punto nel piano.
   - Funzioni elementari: funzioni lineari, potenze, esponenziali, logaritmo (in base e), funzioni trigonometriche (seno, coseno, tangente), funzioni trigonometriche inverse.
   - Funzioni: dominio, codominio, immagine, grafico; funzione inversa; funzioni pari e dispari.
   - Operazioni sui grafici di funzioni. Risoluzione "grafica" di equazioni e disequazioni.

2. Limiti di funzioni e continuità
   - Limiti di funzioni; calcolo dei limiti elementari; forme indeterminate.
   - Funzioni continue.

3. Derivate
   - Derivata di una funzione. Significato geometrico come pendenza della retta tangente al grafico. Altre applicazioni del concetto di derivata: velocità (scalare e vettoriale) e accelerazione di un punto in movimento.
   - Derivate delle funzioni elementari e regole per il calcolo delle derivate.
   - Funzioni asintoticamente equivalenti (vicino ad un punto assegnato). Trascurabilità di una funzione rispetto ad un altra. Notazione di Landau ("o piccolo" e "o grande"). Parte principale di una funzione all'infinito e in zero. Principio di sostituzione nel calcolo dei limiti e delle parti principali.
   - Teorema di de l'Hôpital. Confronto tra i comportamenti asintotici di esponenziali, potenze e logaritmi all'infinito e in zero.
   - Valore massimo e minimo di una funzione; punti di massimo e di minimo (assoluti e locali); estremo superiore ed inferiore dei valori di una funzione. Esistenza del punti di minimo e di massimo per una funzione continua su un intervallo chiuso (teorema di Weierstrass, senza dimostrazione). Individuazione dei valori e dei punti di massimo e di minimo di una funzione definita su un'unione finita di intervalli (aperti o chiusi, limitati e non).
   - Teoremi di Rolle, Lagrange e Cauchy e dimostrazione (parziale) del teorema di de L'Hôpital.
   - Sviluppo di Taylor (in zero) di una funzione ed espressione del resto come "o grande" e nella forma di Lagrange. Sviluppi di Taylor di alcune funzioni fondamentali. Formula del binomio di Newton. Uso degli sviluppi di Taylor per il calcolo dei limiti e delle parti principali.
   - Funzioni crescenti e decrescenti; caratterizzazione in termini di segno della derivata. Funzioni convesse e concave; caratterizzazioni in termini di segno della derivata seconda. Applicazioni al disegno del grafico di una funzione.

4. Elementi di analisi astratta
   - *Numeri interi, razionali e reali.*
   - *Estremo superiore ed inferiore di un insieme qualunque di numeri reali. Esistenza dell'estremo inferiore e superiore (completezza dei numeri reali).*
   - Teorema di esistenza degli zeri. Algoritmo di bisezione per la determinazione dello zero di una funzione.

5. Integrali

- Definizione di integrale (definito) di una funzione su un intervallo in termini di area. Primitiva di una funzione e teorema fondamentale del calcolo integrale.
- Calcolo delle primitive (integrali indefiniti) e degli integrali.
- Approssimazione dell'integrale tramite somme finite. La distanza percorsa da un punto in movimento come integrale del modulo della velocità. Parametrizzazione di una curva e calcolo della lunghezza.
- Calcolo delle aree delle figure piane. Calcolo dei volumi delle figure solide, e in particolare dei solidi di rotazione.

6. Integrali impropri
    - Integrali impropri semplici: definizione e possibili comportamenti.
    - Criterio del confronto e del confronto asintotico (per funzioni positive); criterio della convergenza assoluta (per funzioni a segno variabile).
    - Integrali impropri non semplici.

7. Serie numeriche e serie di potenze
    - *Successioni e limiti di successioni. Collegamento con i limiti di funzioni.*
    - Serie numeriche: definizione e possibili comportamenti. La serie geometrica.
    - Criterio del confronto con l'integrale. La serie armonica generalizzata.
    - Criteri per determinare il comportamento di una serie: del confronto, del confronto asintotico, della convergenza assoluta, della radice e del rapporto.
    - Serie di potenze, e raggio di convergenza. Serie di Taylor. Coincidenza della serie di Taylor con la funzione per alcune funzioni elementari. Espressione del numero e come serie.
    - *Definizione di esponenziale complesso e giustificazione della formula* $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.

8. Equazioni differenziali
    - Equazioni differenziali del primo ordine: definizione e fatti generali. Risoluzione delle equazioni lineari e delle equazioni a variabili separabili.
    - Equazioni differenziali del secondo ordine: definizione e fatti generali. Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti, omogenee e non omogenee. Risoluzione delle equazioni a coefficienti costanti omogenee, e ricerca della soluzione particolare per quelle non omogenee per alcune classi di termini noti.
    - *Esempi di equazioni differenziali tratti dalla fisica: equazione di decadimento, equazione dell'oscillatore armonico e dell'oscillatore armonico smorzato.*

T E S T I

PRIMA PARTE, AULE A-D (prima variante)

1. Determinare l'insieme di definizione della funzione $f(x) := \sqrt{\log 7 - \log(x-3)} + \dfrac{1}{x^2+16}$.

2. Calcolare le derivate di: a) $\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$, b) $\log\left(\dfrac{7}{\exp(3x^2-4)}\right)$, c) $\arcsin(1-x^4)$.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x+\log(1+x)}{2x+\sin x}$, b) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{x^4+\cos x}{x^5-3}$, c) $\displaystyle\lim_{x\to \pi^-} \frac{e^x}{\sin x}$.

4. Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) := \dfrac{\sin(x^2-x^4)}{x^3-\log(1+x^3)}$.

5. Dire se esistono, e in caso affermativo calcolare, i punti di massimo e minimo assoluti della funzione $f(x) := x^3 - 3x^2$ relativamente alla semiretta $x \leq 3$.

6. Per quali $a \in \mathbb{R}$ si ha che $\dfrac{x^2-x^5}{1+\log x} = o(x^a)$ per $x \to +\infty$.

7. Trovare i punti x in cui la tangente al grafico di $f(x) := \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ ha pendenza 1/2.

8. Risolvere graficamente la disequazione $e^{-x} \geq -\dfrac{1}{x}$.

PRIMA PARTE, AULE E-H (prima variante)

1. Trovare le soluzioni $x \in [0, \pi/3]$ della disequazione $\tan(3x) \leq \sqrt{3}$.

2. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la seguente funzione è continua $f(x) := \begin{cases} a\cos x + \sin x & \text{se } x \leq 0, \\ a^2\sqrt{x+4} & \text{se } x > 0. \end{cases}$.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1-3^x}{x2^x+1}$, b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2 - \sin x}{e^x - 1}$, c) $\lim_{x\to+\infty} \cos(2^{-x})$.

4. Scrivere il polinomio di Taylor (in 0) di ordine 4 della funzione $f(x) := \cos(x^3 + x)$.

5. Dire se esistono, e in caso affermativo calcolare, i punti di massimo e minimo assolutidella funzione $f(x) := -x^3 + 6x^2$ relativamente alla semiretta $x \leq 2$.

6. Scrivere dominio, immagine e inversa della funzione $f(x) := \log_3(x+1)$.

7. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := \frac{a}{6}x^3 + \frac{a}{4}x^2 + x$ risulta essere crescente su tutto $\mathbb{R}$.

8. Disegnare il grafico della funzione $y = 2|\sin x| - 1$.

PRIMA PARTE, AULE I-M (prima variante)

1. Calcolare le coordinate polari dei seguenti punti espressi in coordinare cartesiane, scegliendo l'angolo α nell'intervallo $(-\pi, \pi]$: a) $(0, -2)$; b) $(-1, 0)$; c) $(-\sqrt{3}, 1)$.

2. Determinare l'immagine della funzione $f(x) := 2\sin(\pi/6 - 3x) + 2$.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim_{x\to 0^+} x^2(e^x + \log x)$, b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\exp(x^2)}{\sin^3 x}$, c) $\lim_{x\to +\infty} x^{-\log x}$.

4. Riordinare le funzioni che seguono in modo da ottenere un'affermazione corretta per $x \to +\infty$:
$$4^{-x} \quad \ll \quad (1-x^2)\,2^x \quad \ll \quad \frac{2^x+3}{3^x} \quad \ll \quad (1+x)\,2^x$$

5. Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) := 1 + 3x^2 - \sqrt{1+2x^2}$.

6. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x) := 2\sin x + \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$ nel punto $x = \dfrac{\pi}{4}$.

7. Dire in quali intervalli la funzione $f(x) := (x^2 - 2)\exp(x^2)$ è convessa.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) nel piano tali che $1 \le y \le 2$ e $y \le \dfrac{1}{(x-1)^4}$.

SECONDA PARTE (prima variante)

1. Dire per quali $a \geq 0$ è vero che
$$\exp(x^2) \geq a\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}. \tag{*}$$

2. Dato $a \in \mathbb{R}$ considero la funzione
$$f(x) := (x + 3a)^a + (x - 1)^a - 2x^a \,.$$
Trovare la parte principale di $f(x)$ per $x \to +\infty$ nei seguenti casi:
a) $a \neq 0, \frac{1}{3}$;
b) $a = \frac{1}{3}$.

3. Dato $a > 0$ considero la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) := (x^2 + a)\, e^{ax}$.
a) Determinare l'immagine di f.
b) Ponendo il codominio di f uguale all'immagine, dire per quali a esiste l'inversa $f^{-1}(y)$.
c) Per a come al punto b) trovare una funzione $g(y)$ data da una formula esplicita e asintoticamente equivalente a $f^{-1}(y)$ per $y \to +\infty$.
d) Per a come al punto b) trovare una funzione $h(y)$ data da una formula esplicita tale che $f^{-1}(y) - h(y)$ tende a 0 per $y \to +\infty$.

Prima parte (prima variante)

1. Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim_{x\to-\infty} x^3 2^x$, b) $\lim_{x\to 2^+} \dfrac{x^2-5x}{x-2}$, c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\log(1+x^4)}{\cos(x^2)-1}$.
2. Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 4 in 0 di $f(x) := (2+2x^4)\exp(x^2)$.
3. Il punto P si muove con legge oraria $P = (t\cos t,\, t\sin t)$; calcolare il *modulo* della velocità.
4. Calcolare $\displaystyle\int_0^\pi x^2 \sin x\, dx$.
5. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2+x^4}{(1-\cos x)^a}\, dx$ converge ad un numero finito.
6. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{3^n+n^4}$.
7. Determinare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = 3t^2(x^2+1)$ che soddisfa $x(0) = 1$.
8. Disegnare l'insieme A dei punti (x,y) nel piano tali che $|e^x - 1| \le y \le 2 - x^2$.

Seconda parte (prima variante)

1. Sia A l'insieme dei punti (x, y) nel piano tali che $x \geq 0$ e $x^2 \leq y \leq 8\sqrt{x}$ e sia V il solido ottenuto facendo ruotare A attorno all'asse delle y.

   a) Disegnare A e calcolarne l'area.

   b) Disegnare V e calcolarne il volume.

2. Dato $a \in \mathbb{R}$ consideriamo l'equazione differenziale
$$\ddot{x} - 2a\dot{x} + (a^2 - a + 1)x = 1 + e^{3t} \tag{*}$$

   a) Trovare la soluzione generale di (*) per $a \neq 2, 5$.

   b) Trovare la soluzione generale di (*) per $a = 2, 5$.

   c) Per ogni $a > 1$ dire quante sono le soluzioni $x(t)$ di (*) tali che $x(t) = O(e^{3t})$ per $t \to +\infty$.

3. Data una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e positiva, per ogni $x \in \mathbb{R}$ indico con B_x l'insieme dei punti del piano compresi tra l'asse delle x e il grafico di f e con ascissa minore o uguale a x. Considero quindi la seguente proprietà:
$$\text{area}(B_x) = f(x) \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}. \tag{P}$$

   a) Trovare una funzione f che soddisfa (P).

   b) Trovare tutte le funzioni f che soddisfano (P). [*Suggerimento: considerare la funzione* $F(x) :=$ *area*(B_x) *e scrivere la condizione (P) in termini di* F *e della sua derivata.*]

PRIMA PARTE (prima variante)

1. Per ciascuno dei seguenti punti aggiungere le coordinate mancanti, polari o cartesiane (per quelle polari l'angolo α va preso in $[0, 2\pi)$):
$$P_1 \begin{cases} x = 0 & y = -2 \\ r = & \alpha = \end{cases}, \qquad P_2 \begin{cases} x = & y = \\ r = \sqrt{2} & \alpha = \frac{3\pi}{4} \end{cases}, \qquad P_3 \begin{cases} x = -\sqrt{3} & y = -3 \\ r = & \alpha = \end{cases}.$$

2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1+x^4}}{\sin^4 x}$, b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \cos(x\, 2^{-x})$, c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{9^x}{(1+2^x)^3}$.

3. Trovare i punti di massimo e di minimo di $f(x) := \dfrac{x}{(x-1)^2}$, specificando se non esistono.

4. Calcolare la primitiva $\displaystyle\int 4x^3 \exp(x^2)\, dx$.

5. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 + n^4}{(1+n^2)^a}$ converge ad un numero finito.

6. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $x(t) := \exp(at^2)$ risolve l'equazione differenziale $\dot{x}^2 - t^2 x^2 = 0$.

7. Determinare la soluzione dell'equazione $\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = 0$ tale che $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 2$.

8. Risolvere graficamente la disequazione $|\log(x+3)| \geq \dfrac{1}{(x+2)^2}$.

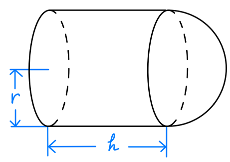
SECONDA PARTE (prima variante)

1. Consideriamo la funzione
$$f(x) := \frac{xe^{8x}}{3x+2}\,.$$
   a) Disegnare il grafico di f.

   b) Discutere al variare di $a \in \mathbb{R}$ il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = a$.

   c) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ sia $x(a)$ la più piccola delle soluzioni dell'equazione $f(x) = a$ (ammesso che ne esista almeno una): determinare il dominio della funzione $x(a)$, i punti di discontinuità, ed i limiti per $a \to 0^+$ e $a \to 0^-$.

2. Devo costruire un serbatoio di volume π (non specifico l'unità di misura) con la forma di un cilindro con attaccata una semisfera, come nel disegno accanto.



   a) Se voglio che il serbatoio abbia la superficie più piccola possibile, che misure devo prendere?

   b) È possibile fare in modo che la superficie del serbatoio sia pari a 1000?

3. Dato $a > 0$ consideriamo l'integrale improprio $I := \displaystyle\int_0^\pi \frac{1}{(\sin x)^a} - \frac{1}{x^{3/2}}\,dx$.

   a) Dire in quali punti Iè improprio.

   b) Determinare la parte principale della funzione integranda $f(x) := \frac{1}{(\sin x)^a} - \frac{1}{x}$ per $x \to 0$.

   c) Discutere il comportamento di I.

PRIMA PARTE, GRUPPO A (prima variante)

1. Determinare l'insieme di definizione della funzione $f(x) := \log\big(\sin(2x) - \frac{1}{2}\big)$.

2. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := \exp(x^3 + ax^2 + x)$ è crescente su tutto $\mathbb{R}$.

3. Mettere le seguenti funzioni nel giusto ordine rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$:
$$\underbrace{x^{10} - 2^x}_{a}\,, \quad \underbrace{\frac{1}{1+\log x}}_{b}\,, \quad \underbrace{\frac{2^x \log x}{1+1/x}}_{c}\,, \quad \underbrace{\frac{1}{x+x^2}}_{d}\,.$$

4. Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 6 in 0 della funzione $f(x) := (3 - 2x^4)\,\log(1 + 2x^2)$.

5. Il punto P si muovo con legge oraria $P = (2t+2, 1-\cos t, \sin t)$. Calcolare la distanza d percorsa tra l'istante $t = 0$ e $t = 4$.

6. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(n^{-a}) - 1}{1 + \sqrt{n}}$ converge ad un numero finito.

7. Risolvere l'equazione differenziale $\dot{x} = (9x^2 + 1)\cos t$.

8. Risolvere graficamente la disequazione $e^{-x} \leq \arctan(|x| - 1)$.

Prima parte, gruppo B (prima variante)

1. Trovare le soluzioni della disequazione $2\cos(2x) \geq -\sqrt{2}$ nell'intervallo $0 \leq x \leq \pi$.
2. Trovare l'inversa della funzione $y = \dfrac{3x+1}{2-x}$.
3. Determinare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) := \dfrac{\exp(x^2)}{1-x^2} - 1$.
4. Mettere le seguenti funzioni nel giusto ordine rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to 0$:
$$\underbrace{\log x}_{a}\ ,\quad \underbrace{x^2 \log x}_{b}\ ,\quad \underbrace{\frac{\log(1+2x^2)}{e^x}}_{c}\ ,\quad \underbrace{\frac{x+\log x}{\sin x}}_{d}\ .$$
5. Calcolare $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{4+x^2}dx$
6. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^a}{(1-x)^{2a}}dx$ è finito.
7. Risolvere l'equazione differenziale $\dot{x} + x\cos t = 2t\exp(-\sin t)$.
8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $y \geq x + 1$ e $y \geq |\log(1-x)|$.

Seconda parte (prima variante)

1. Dato $a \in \mathbb{R}$ consideriamo la funzione
$$f(x) := (\cos x)^a - \exp(-2x^2)\,.$$
Calcolare la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0$, cominciando se opportuno dal caso $a \neq 4$.

2. Consideriamo la funzione
$$f(x) := \int_0^{x^2} t - \frac{2t^9}{t^8+1}\,dt\,.$$
a) Scrivere la derivata di $f(x)$.
b) Disegnare il grafico di $f(x)$.
c) Trovare la parte principale di $f(x)$ per $x \to +\infty$.

3. Dato $a > 0$, considero l'insieme A dei punti (x,y) tali che $x > 1$ e $x^{3/2} \leq y \leq f(x)$ dove
$$f(x) := \frac{(x^3+1)^{a+1/2}}{(x^3-1)^a}\,.$$
a) Disegnare l'insieme A.
b) Dire per quali a l'area di A è finita.

PRIMA PARTE, GRUPPO A (prima variante)

1. Calcolare l'area del triangolo T delimitato dagli assi e dalla retta tangente al grafico della funzione e^{-x} nel punto di ascissa $x = 1$.

2. Determinare l'insieme di definizione della funzione $f(x) := \sqrt{\log(4^x - 1)}$.

3. Scrivere il polinomio di Taylor in 0 all'ordine 4 di $f(x) := \exp(2x^2)\cos(2x)$.

4. Dire per quali a vale che $x^2 \log(2 + e^{-x}) = o(x^a)$ per $x \to +\infty$.

5. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{a^x}{1 + x^2}\, dx$ è finito.

6. Dire per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1 + \sqrt{n!}}$ converge ad un numero finito.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = \dfrac{1}{x(4 + t^2)}$ tale che $x(2) = 1$.

8. Sia $f(x) := \left|\dfrac{1}{x^2} - 1\right|$. Risolvere graficamente la disequazione $f(x) \le f(\frac{1}{2}x)$.
   [*Nel disegno indicare i punti* $x = \pm 1$.]

PRIMA PARTE, GRUPPO B (prima variante)

1. Dire per quali $\alpha \in [0, 2\pi)$ e $r > 0$ vale l'identità $\sin x - \sqrt{3}\cos x = r\sin(x + \alpha)$.

2. Mettere le seguenti funzioni nel giusto ordine rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$:
$$\underbrace{\frac{1}{x} + 2\log x}_{a}\ ,\quad \underbrace{\frac{6}{2^x}}_{b}\ ,\quad \underbrace{\frac{\log x}{\log(\log x)}}_{c}\ ,\quad \underbrace{\frac{2^x(x+1)}{4^x + x}}_{d}\ .$$

3. Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) := \dfrac{\log(1 + x^4) - x^4}{\exp(x^2)}$.

4. Data la funzione $f(x) := \displaystyle\int_0^{x^2} \frac{dt}{2 + \cos t}$, calcolare $f'(\sqrt{\pi})$.

5. Dire per quali $a > 0$ l'area compresa tra gli assi e il grafico di $f(x) := \dfrac{1}{1 + a^x}$ è finita.

6. Calcolare il valore della serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} 2^n x^n$ (per gli x per cui converge).

7. Trovare una soluzione particolare dell'equazione differenziale $\ddot{x} - \dot{x} + x = t^2$

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $-\dfrac{1}{x-1} \le y \le \sqrt{1 - x}$.
[*Nel disegno indicare i punti* $x = \pm 1$.]

SECONDA PARTE (prima variante)

1. Dato a reale e *positivo*, consideriamo l'equazione differenziale
$$\ddot{x} + 4a\dot{x} + (a^4 + 4)x = e^t + e^{-2\sqrt{2}t} \tag{*}$$
a) Risolvere (*) per ogni $a \neq \sqrt{2}$.
b) Risolvere (*) per $a = \sqrt{2}$.
c) Per $a = \sqrt{2}$, trovare la soluzione di (*) che soddisfa $x(0) = \dot{x}(0) = 0$.

2. Dato a reale e *positivo*, consideriamo la funzione
$$f(x) := \frac{1}{x(x+1)^a - x^{a+1}} \,,$$
e indichiamo con A la figura piana costituita dai punti (x, y) tali che $x \geq 1$ e $0 \leq y \leq f(x)$, e con V il solido ottenuto ruotando A attorno all'asse verticale di equazione $x = 1$.
a) Per $a = 2$, disegnare A e V e calcolare l'area di A.
b) Dire per quali a l'area di A è finita.
c) Dire per quali a il volume di V è finito.

3. Dato a reale e *positivo*, consideriamo la serie
$$S(a) := \sum_{n=4}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{a^n + 1} \,.$$
a) Discutere il comportamento di questa serie al variare di a.
b) Calcolare $S(4)$ con errore inferiore a 10^{-4}.

PRIMA PARTE (prima variante)

1. Determinare l'insieme di definizione della funzione $f(x) := \log\bigl(x - \sqrt{x+2}\bigr)$.

2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(1/x)}{\arctan x}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\log x}}{\log(\log x)}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^4\, e^x}{x^2 + \log(1-x^2)}$.

3. Dire in quali intervalli la funzione $f(x) := \exp(-2x^2 + 4x + 2)$ è concava.

4. Usando il fatto che $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-t^2)\, dt = \sqrt{\pi}$, calcolare $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\bigl(-9(x+3)^2\bigr)\, dx$.

5. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\log\bigl(1 + \frac{1}{x^a}\bigr)}{x^a + x^{2a}}\, dx$ è finito.

6. Calcolare il valore della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n} - 1}{2^n}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = \dfrac{2te^x}{1+t^2}$ che soddisfa $x(0) = 0$.

8. Risolvere graficamente la disequazione $\arctan(1-x) \leq (x+1)^{1/3}$.

SECONDA PARTE

1. Consideriamo la famiglia di funzioni $f(x) := x^4 - 15x^2 + ax + b$, con $a, b \in \mathbb{R}$.

   a) Trovare a, b in modo tale che il grafico della funzione $f(x)$ sia tangente nel punto $x = 1$ alla retta di equazione $y = -26\,x + 52$.

   b) Disegnare la funzione trovata al punto a) ristretta all'intervallo $[0, \frac{3}{2}]$.

   c) Considerare tutti i rettangoli R con assi paralleli agli assi coordinati, un vertice nell'origine, ed il vertice opposto sul grafico della funzione f trovata al punto a) ristretta all'intervallo I; tra questi rettangoli trovare quello di area massima.

2. a) Scrivere lo sviluppo di Taylor all'ordine 3 in 0 della funzione $\tan x$.

   b) Per ogni $a > 0$ trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) := \tan(x^a) - \tan(\sin x)$.[1]

3. Sia S un quarto di un cerchio di raggio 1, sia R il raggio che divide S in due, e sia R' la retta ortogonale a R che passa per il centro del cerchio.

   a) Disegnare S, R ed R'.

   b) Calcolare il volume del solido V ottenuto facendo ruotare S attorno al raggio R.

   c) Calcolare il volume del solido V' ottenuto facendo ruotare S attorno alla retta R'.

[1] La funzione $f(x)$ è definita per $x \geq 0$.

PRIMA PARTE (prima variante)

1. Consideriamo la funzione $f(x) := \dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}$. Trovare la formula della funzione inversa $f^{-1}(y)$.

2. Trovare i *valori* massimi e minimi della funzione $f(x) := \dfrac{x^2 - 28}{(x+1)^4}$, e se non esistono gli estremi inferiori e superiori dei valori.

3. Mettere le seguenti funzioni nell'ordine corretto rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$:
$$\underbrace{\sqrt{\frac{x^7}{x^2+1}}}_{a}, \quad \underbrace{\frac{2^x+1}{8^x+1}}_{b}, \quad \underbrace{\frac{1}{6^x+3}}_{c}, \quad \underbrace{x^2 \log(1+e^x)}_{d}.$$

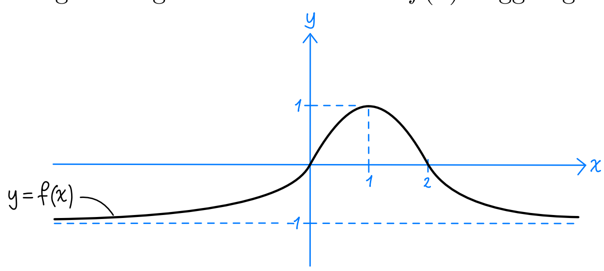
4. Trovare il polinomio di Taylor di ordine 6 (in 0) della funzione $f(x) := \dfrac{1+x^3}{\sqrt{1+4x^3}}$.

5. Calcolare velocità e accelerazione di un punto con legge oraria $P = \big(\exp(t^2),\, t^3 + 1\big)$.

6. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{-n}}{n^{2a}(1+n)}$ converge a un numero finito.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} + 2tx = \exp(t - t^2)$.

8. Nella figura sotto è disegnato il grafico della funzione $f(x)$. Aggiungere il grafico di $2\,f(|x|)$.



SECONDA PARTE

1. Per ogni $a > 0$, trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale
$$a\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 8t + e^{-2t}\,. \tag{*}$$
[*Fare attenzione al caso* $a = 1$.]

2. Una ditta deve organizzare la spedizione di 100 scatoloni uguali ad un certo destinatario. Per farlo si serve di due compagnie di spedizione: la compagnia A offre furgoni che possono trasportare 5 scatole per volta, ad un prezzo di 200 euro a furgone, mentre la compagnia B offre furgoni che possono trasportare 10 scatole per volta ad un prezzo base di 200 euro a furgone, a cui però va aggiunto un sovrapprezzo complessivo pari a $15\,n^2$ euro, dove n è il numero totale di furgoni affittati.
Quanti furgoni conviene affittare dalla compagnia A e quanti dalla compagnia B?

3. a) Determinare l'insieme di definizione della funzione $f(x) := x^{\log x} - 1$, e disegnarne il grafico.
b) Dire dov'è improprio l'integrale
$$I := \int_1^{+\infty} \frac{dx}{f(x)}$$
e studiarne il comportamento.

Prima parte

1. Trovare le soluzioni della disequazione $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \geq -1$ nell'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

2. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := (x+a)\exp(x^2)$ è crescente su tutto $\mathbb{R}$.

3. Scrivere lo sviluppo di Taylor di ordine 3 (in zero) della funzione $f(x) := e^{-2x}\log(1+x)$.

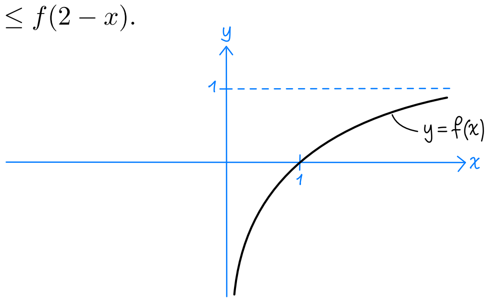
4. Calcolare il valore dell'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\,\exp(1-2x^2)\,dx$.

5. Dire per quali $a > 0$ è finito l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(1-x^2)^{2a}}$.

6. Calcolare il valore della serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{2^n}$ per gli x per cui converge.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = xe^t$ tale che $x(0) = -1$.

8. Nella figura sotto è riportato il grafico della funzione $f(x)$. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $f(|x|) \leq y \leq f(2-x)$.



SECONDA PARTE

1. Sia A l'insieme dei punti (x, y) con $0 \leq x \leq 2\pi$ compresi tra la retta di equazione $y = 1$ e il grafico della funzione $2 \cos x$, e sia V il solido ottenuto ruotando A attorno alla retta $y = 1$.

   a) Disegnare l'insieme A e calcolarne l'area.

   b) Disegnare l'insieme V e calcolarne il volume.

2. a) Dire se è vero che $x^4 + 8 \geq \frac{1}{4}(x + 1)^4$ per ogni $x \geq 0$.

   b) Trovare i numeri $m > 0$ per cui vale che $x^4 + 8 \geq m(x + 1)^4$ per ogni $x \geq 0$.

   c) Trovare i numeri $M > 0$ per cui vale che $x^4 + 8 \leq M(x + 1)^4$ per ogni $x \geq 0$.

3. Consideriamo $f(x) := x^2 e^x$. Dire quali punti P del grafico di f sono "visibili direttamente dall'origine O", cioè il segmento che congiunge P e O interseca il grafico di f solo negli estremi.

PRIMA PARTE

1. Scrivere le coordinate polari dei seguenti punti del piano (espressi in coordinate cartesiane) scegliendo l'angolo α in $(-\pi, \pi]$: $P_1 = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$; $P_2 = (5, -5\sqrt{3})$; $P_3 = (0, -2)$.

2. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) := \log(1/x)$ nel punto di ascissa $x = 1/\sqrt[3]{e}$.

3. Dire per quali $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione
$$f(x) := \begin{cases} ax^2 + b & \text{per } x < 0 \\ \exp(x^2) & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$$
è continua e derivabile.

4. Scrivere la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) := x + \log(1 - x + x^2)$.

5. Calcolare $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-3x}}$.

6. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^{-n} + n^3}{n^{2a}(1+n)}$ converge ad un numero finito.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = x^3 \sin t$ tale che $x(0) = 1$.

8. Sia $f(x) := \left|\dfrac{1}{x^2} - 1\right|$. Risolvere graficamente la disequazione $f(x) \leq f(2x)$.

SECONDA PARTE

1. Dato $a > 0$ consideriamo l'equazione differenziale
$$\ddot{x} - 2a\dot{x} + 4x = 8t\,. \tag{*}$$
   a) Trovare la soluzione generale di (*).
   b) Per quali a esiste almeno una soluzione x di (*) tale che $x(t) \gg e^{4t}$ per $t \to +\infty$?

2. a) Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) := 1 - \sqrt[3]{\cos x}$.
   b) Per ogni $a \in \mathbb{R}$, trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) + ax^2$.

3. a) Trovare lo sviluppo di Taylor al primo ordine in 0 della funzione $\arctan x$.
   b) Dimostrare che la funzione $g(x) := x - \log(1 + x)$ è strettamente positiva per ogni $x > 0$.
   c) Dato $a \in \mathbb{R}$, dire dove è improprio l'integrale
$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(1/x)}{(g(x))^a}\, dx\,,$$
   e discuterne il comportamento.