Versione: 20 settembre 2021

Università di Pisa
Corso di laurea in Ingegneria Gestionale

prove scritte dell'esame di

Analisi Matematica I (158AA), a.a. 2020-21

Testi e soluzioni

Giovanni Alberti
Dipartimento di Matematica
Università di Pisa
largo Pontecorvo 5
56127 Pisa
http://pagine.dm.unipi.it/alberti

Gli scritti d'esame per il corso di Analisi Matematica I per Ingegneria Gestionale si compongono di due parti: una prima parte con otto domande relativamente semplici a cui si deve dare solo la risposta, ed una seconda con tre problemi a cui si deve invece dare una soluzione articolata in dettaglio. Il tempo a disposizione è di un'ora per la prima parte e di due ore per la seconda. Per ottenere la sufficienza sono solitamente richieste almeno cinque risposte corrette nella prima parte, ed un problema completamente risolto nella seconda.
Questa raccolta contiene i testi e le soluzioni degli scritti di tutti gli appelli dell'a.a. 2020-21, incluse le prove in itinere. Degli scritti di cui sono state preparate più varianti qui viene riportata solo la prima.

Programma del corso [versione: 20 dicembre 2020]. Sono riportati in corsivo gli argomenti non fondamentali.

1. Funzioni e grafici
   - Richiamo delle nozioni di base di trigonometria. Coordinate polari di un punto nel piano.
   - Funzioni elementari: funzioni lineari, potenze, esponenziali, logaritmo (in base e), funzioni trigonometriche (seno, coseno, tangente), funzioni trigonometriche inverse.
   - Funzioni: dominio, codominio, immagine, grafico; funzione inversa; funzioni pari e dispari.
   - Operazioni sui grafici di funzioni. Risoluzione "grafica" di equazioni e disequazioni.
2. Limiti di funzioni e continuità
   - Limiti di funzioni; calcolo dei limiti elementari; forme indeterminate.
   - Funzioni continue.
3. Derivate
   - Derivata di una funzione. Significato geometrico come pendenza della retta tangente al grafico. Altre applicazioni del concetto di derivata: velocità (scalare e vettoriale) e accelerazione di un punto in movimento.
   - Derivate delle funzioni elementari e regole per il calcolo delle derivate.
   - Funzioni asintoticamente equivalenti (vicino ad un punto assegnato). Trascurabilità di una funzione rispetto ad un altra. Notazione di Landau ("o piccolo" e "o grande"). Parte principale di una funzione all'infinito e in zero. Principio di sostituzione nel calcolo dei limiti e delle parti principali.
   - Teorema di de l'Hôpital. Confronto tra i comportamenti asintotici di esponenziali, potenze e logaritmi all'infinito e in zero.
   - Valore massimo e minimo di una funzione; punti di massimo e di minimo (assoluti e locali); estremo superiore ed inferiore dei valori di una funzione. Esistenza del punti di minimo e di massimo per una funzione continua su un intervallo chiuso (teorema di Weierstrass, senza dimostrazione). Individuazione dei valori e dei punti di massimo e di minimo di una funzione definita su un'unione finita di intervalli (aperti o chiusi, limitati e non).
   - Teoremi di Rolle, Lagrange e Cauchy e dimostrazione (parziale) del teorema di de L'Hôpital.
   - Sviluppo di Taylor (in zero) di una funzione ed espressione del resto come "o grande" e nella forma di Lagrange. Sviluppi di Taylor di alcune funzioni fondamentali. Formula del binomio di Newton. Uso degli sviluppi di Taylor per il calcolo dei limiti e delle parti principali.
   - Funzioni crescenti e decrescenti; caratterizzazione in termini di segno della derivata. Funzioni convesse e concave; caratterizzazioni in termini di segno della derivata seconda. Applicazioni al disegno del grafico di una funzione.
4. Elementi di analisi astratta
   - *Numeri interi, razionali e reali.*
   - *Estremo superiore ed inferiore di un insieme qualunque di numeri reali. Esistenza dell'estremo inferiore e superiore (completezza dei numeri reali).*
   - Teorema di esistenza degli zeri. Algoritmo di bisezione per la determinazione dello zero di una funzione.

5. Integrali
   - Definizione di integrale (definito) di una funzione su un intervallo in termini di area. Primitiva di una funzione e teorema fondamentale del calcolo integrale.
   - Calcolo delle primitive (integrali indefiniti) e degli integrali.
   - Approssimazione dell'integrale tramite somme finite. La distanza percorsa da un punto in movimento come integrale del modulo della velocità. Parametrizzazione di una curva e calcolo della lunghezza.
   - Calcolo delle aree delle figure piane. Calcolo dei volumi delle figure solide, e in particolare dei solidi di rotazione.

6. Integrali impropri
   - Integrali impropri semplici: definizione e possibili comportamenti.
   - Criterio del confronto e del confronto asintotico (per funzioni positive); criterio della convergenza assoluta (per funzioni a segno variabile).
   - Integrali impropri non semplici.

7. Serie numeriche e serie di potenze
   - *Successioni e limiti di successioni. Collegamento con i limiti di funzioni.*
   - Serie numeriche: definizione e possibili comportamenti. La serie geometrica.
   - Criterio del confronto con l'integrale. La serie armonica generalizzata.
   - Criteri per determinare il comportamento di una serie: del confronto, del confronto asintotico, della convergenza assoluta, della radice e del rapporto.
   - Serie di potenze, e raggio di convergenza. Serie di Taylor. Coincidenza della serie di Taylor con la funzione per alcune funzioni elementari. Espressione del numero e come serie.
   - *Definizione di esponenziale complesso e giustificazione della formula* $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.

8. Equazioni differenziali
   - Equazioni differenziali del primo ordine: definizione e fatti generali. Risoluzione delle equazioni lineari e delle equazioni a variabili separabili.
   - Equazioni differenziali del secondo ordine: definizione e fatti generali. Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti, omogenee e non omogenee. Risoluzione delle equazioni a coefficienti costanti omogenee, e ricerca della soluzione particolare per quelle non omogenee per alcune classi di termini noti.
   - *Esempi di equazioni differenziali tratti dalla fisica: equazione di decadimento, equazione dell'oscillatore armonico e dell'oscillatore armonico smorzato.*

TESTI E SOLUZIONI

Prima parte, aule A-D (prima variante)

1. Determinare l'insieme di definizione della funzione $f(x) := \sqrt{\log 7 - \log(x-3)} + \dfrac{1}{x^2+16}$.

   Soluzione. $3 < x \leq 10$.

2. Calcolare le derivate di: a) $\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$, b) $\log\left(\dfrac{7}{\exp(3x^2-4)}\right)$, c) $\arcsin(1-x^4)$.

   Soluzione. a) $\dfrac{4x}{(x^2+1)^2}$, b) $-6x$, c) $\dfrac{-4x}{\sqrt{2-x^4}}$.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x+\log(1+x)}{2x+\sin x}$, b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x^4+\cos x}{x^5-3}$, c) $\displaystyle\lim_{x\to\pi^-} \frac{e^x}{\sin x}$.

   Soluzione. a) $2/3$, b) 0 , c) $+\infty$.

4. Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) := \dfrac{\sin(x^2-x^4)}{x^3-\log(1+x^3)}$.

   Soluzione. $2/x^4$.

5. Dire se esistono, e in caso affermativo calcolare, i punti di massimo e minimo assoluti della funzione $f(x) := x^3 - 3x^2$ relativamente alla semiretta $x \leq 3$.

   Soluzione. Punti di massimo: 0 e 3; punti di minimo: non esistono.

6. Per quali $a \in \mathbb{R}$ si ha che $\dfrac{x^2-x^5}{1+\log x} = o(x^a)$ per $x \to +\infty$.

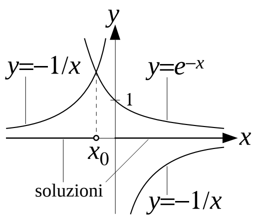
   Soluzione. $a \geq 5$.

7. Trovare i punti x in cui la tangente al grafico di $f(x) := \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ ha pendenza $1/2$.

   Soluzione. $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

8. Risolvere graficamente la disequazione $e^{-x} \geq -\dfrac{1}{x}$.

   Soluzione.



PRIMA PARTE, AULE E-H (prima variante)

1. Trovare le soluzioni $x \in [0, \pi/3]$ della disequazione $\tan(3x) \leq \sqrt{3}$.
   SOLUZIONE. $x \in [0, \pi/9] \cup (\pi/6, \pi/3]$.

2. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la seguente funzione è continua $f(x) := \begin{cases} a\cos x + \sin x & \text{se } x \leq 0, \\ a^2\sqrt{x+4} & \text{se } x > 0. \end{cases}$.

   SOLUZIONE. $a = 0,\ \dfrac{1}{2}$.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1-3^x}{x2^x+1}$, b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \sin x}{e^x - 1}$, c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \cos(2^{-x})$.
   SOLUZIONE. a) $-\infty$, b) -1 , c) 1.

4. Scrivere il polinomio di Taylor (in 0) di ordine 4 della funzione $f(x) := \cos(x^3 + x)$.
   SOLUZIONE. $1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{23}{24}x^4$.

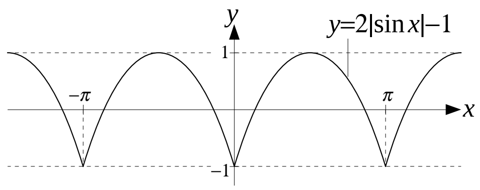
5. Dire se esistono, e in caso affermativo calcolare, i punti di massimo e minimo assolutidella funzione $f(x) := -x^3 + 6x^2$ relativamente alla semiretta $x \leq 2$.

   SOLUZIONE. Punti di massimo: non esistono; punto di minimo: 0.

6. Scrivere dominio, immagine e inversa della funzione $f(x) := \log_3(x+1)$.
   SOLUZIONE. Dominio: $(-1, +\infty)$; immagine: $\mathbb{R}$; inversa: $f^{-1}(y) = 3^y - 1$.

7. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := \frac{a}{6}x^3 + \frac{a}{4}x^2 + x$ risulta essere crescente su tutto $\mathbb{R}$.
   SOLUZIONE. $0 \leq a \leq 8$.

8. Disegnare il grafico della funzione $y = 2|\sin x| - 1$.
   SOLUZIONE.



PRIMA PARTE, AULE I-M (prima variante)

1. Calcolare le coordinate polari dei seguenti punti espressi in coordinare cartesiane, scegliendo l'angolo α nell'intervallo $(-\pi, \pi]$: a) $(0, -2)$; b) $(-1, 0)$; c) $(-\sqrt{3}, 1)$.

   SOLUZIONE. a) $r = 2$, $\alpha = -\dfrac{\pi}{2}$; b) $r = 1$, $\alpha = \pi$; c) $r = 2$, $\alpha = \dfrac{5\pi}{6}$.

2. Determinare l'immagine della funzione $f(x) := 2\sin(\pi/6 - 3x) + 2$.

   SOLUZIONE. $[0, 4]$.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^2(e^x + \log x)$, b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 - \exp(x^2)}{\sin^3 x}$, c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{-\log x}$.

   SOLUZIONE. a) 0 , b) non esiste , c) 0.

4. Riordinare le funzioni che seguono in modo da ottenere un'affermazione corretta per $x \to +\infty$:

$$4^{-x} \quad \ll \quad (1 - x^2)\, 2^x \quad \ll \quad \frac{2^x + 3}{3^x} \quad \ll \quad (1 + x)\, 2^x$$

   SOLUZIONE. $4^{-x} \ll \dfrac{2^x + 3}{3^x} \ll (1 + x)\, 2^x \ll (1 - x^2)\, 2^x$.

5. Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) := 1 + 3x^2 - \sqrt{1 + 2x^2}$.

   SOLUZIONE. $2x^2$.

6. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x) := 2\sin x + \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$ nel punto $x = \dfrac{\pi}{4}$.

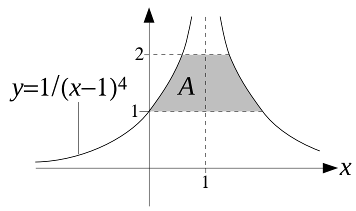
   SOLUZIONE. $y = \sqrt{2}x + \sqrt{2}$.

7. Dire in quali intervalli la funzione $f(x) := (x^2 - 2)\exp(x^2)$ è convessa.

   SOLUZIONE. $\big(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\big]$ e $\big[\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\big)$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) nel piano tali che $1 \le y \le 2$ e $y \le \dfrac{1}{(x-1)^4}$.

   SOLUZIONE.



SECONDA PARTE (prima variante)

1 Dire per quali $a \geq 0$ è vero che

$$\exp(x^2) \geq a\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}. \tag{*}$$

SOLUZIONE. Osservo che la disequazione (*) è sempre verificata per $x = 3/2$, cioè quando si annulla il termine di destra. Per gli altri x riscrivo questa disequazione (*) come

$$\underbrace{\left(x - \frac{3}{2}\right)^{-2} \exp(x^2)}_{f(x)} \geq a \quad \text{per ogni } x \neq 3/2,$$

e chiaramente questa disequazione vale se solo se $\min f(x) \geq a$ (se il minimo non esiste va sostituito con l'estremo inferiore dei valori).

Calcolo ora il valore minimo di $f(x)$. Osservo per cominciare che $f(x)$ è ben definita e derivabile per ogni $x \in \mathbb{R}$ tranne $x = \frac{3}{2}$, vale a dire sull'unione degli intervalli $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$ e $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$, e che la derivata

$$f'(x) = (2x^2 - 3x - 2)\left(x - \frac{3}{2}\right)^{-3} \exp(x^2)$$

si annulla per $x = -\frac{1}{2}$ e $x = 2$. Come visto a lezione, per trovare il valore minimo di $f(x)$ (o l'estremo inferiore) confronto i valori di f in questi due punti con i limiti agli estremi degli intervalli di definizione

$$f\left(-\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{4}\, e^{1/4} \simeq 0{,}32\,, \ \ f(2) = 4e^4 \simeq 218{,}4\,, \ \ \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty\,, \ \ \lim_{x \to 3/2} f(x) = +\infty\,.$$

Così facendo ottengo che

$$\min f(x) = f\left(-\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{4}\, e^{1/4}\,,$$

e dunque (*) è vera se e solo se $a \leq \frac{1}{4}\, e^{1/4}$.

OSSERVAZIONI. In alternativa il valore minimo di f può essere trovato studiando il segno della derivata ed individuando gli intervalli di monotonia della funzione: in questo caso si trova che f decresce negli intervalli $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$ e $\left(\frac{3}{2}, 2\right]$, e cresce in $\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ e in $[2, +\infty)$: queste informazioni bastano a dire che $f(-\frac{1}{2})$ è il valore minimo di f nella semiretta $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$, e che $f(2)$ è il valore minimo di f nella semiretta $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$; e confrontando questi due valori si ottiene infine che il minimo è $f\left(-\frac{1}{2}\right)$.

2 Dato $a \in \mathbb{R}$ considero la funzione

$$f(x) := (x + 3a)^a + (x - 1)^a - 2x^a\,.$$

Trovare la parte principale di $f(x)$ per $x \to +\infty$ nei seguenti casi:

a) $a \neq 0, \frac{1}{3}$;

b) $a = \frac{1}{3}$.

SOLUZIONE. Siccome $\text{p.p.}((x+3a)^a) = x^a$ e $\text{p.p.}((x-1)^a) = x^a$ per $x \to +\infty$, le parti principali dei tre addendi che formano $f(x)$ si cancellano e devo quindi utilizzare uno sviluppo più preciso dei primi due addendi.

Raccogliendo x all'interno di ciascuna delle parentesi ottengo

$$f(x) = (x + 3a)^a + (x - 1)^a - 2x^a = x^a \left[\left(1 + \frac{3a}{x}\right)^a + \left(1 - \frac{1}{x}\right)^a - 2\right]. \tag{1}$$

Siccome $3a/x$ e $-1/x$ tendono a 0 per $x \to +\infty$ posso applicare ai primi due addendi tra le parentesi quadre lo sviluppo di Taylor

$$(1 + t)^a = 1 + at + \frac{a(a-1)}{2}t^2 + O(t^3)\,. \tag{2}$$

(Ho scelto lo sviluppo all'ordine 2 in vista del punto b); per il punto a) basta infatti lo sviluppo all'ordine 1.)
In particolare ponendo $t = 3a/x$ in (2) ottengo

$$\left(1 + \frac{3a}{x}\right)^a = 1 + \frac{3a^2}{x} + \frac{9a^3(a-1)}{2x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right),$$

e ponendo $t = -1/x$ ottengo

$$\left(1 - \frac{1}{x}\right)^a = 1 - \frac{a}{x} + \frac{a(a-1)}{2x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

Usando queste ultime due formule la (1) diventa

$$f(x) = a(3a-1)\, x^{a-1} + \frac{a(a-1)(9a^2+1)}{2}\, x^{a-2} + O(x^{a-3})\,. \tag{3}$$

Posso ora rispondere alle due domande dell'esercizio:

a) per $a \neq 0, \frac{1}{3}$ il primo termine nello sviluppo (3) non si annulla e quindi

$$\text{p.p.}(f(x)) = a(3a-1)\, x^{a-1}\,;$$

b) per $a = \frac{1}{3}$ il primo termine nello sviluppo (3) si annulla e resta il secondo:

$$\text{p.p.}(f(x)) = -\tfrac{2}{9}\, x^{-5/3}\,.$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ Dato $a > 0$ considero la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) := (x^2 + a)\, e^{ax}$.

a) Determinare l'immagine di f.

b) Ponendo il codominio di f uguale all'immagine, dire per quali a esiste l'inversa $f^{-1}(y)$.

c) Per a come al punto b) trovare una funzione $g(y)$ data da una formula esplicita e asintoticamente equivalente a $f^{-1}(y)$ per $y \to +\infty$.

d) Per a come al punto b) trovare una funzione $h(y)$ data da una formula esplicita tale che $f^{-1}(y) - h(y)$ tende a 0 per $y \to +\infty$.

SOLUZIONE. a) La funzione $f(x)$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ e strettamente positiva, e quindi l'immagine è contenuta in $(0, +\infty)$; inoltre

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0\,, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty\,,$$

e quindi l'immagine di $f(x)$ deve essere tutto $(0, +\infty)$.

b) Siccome ho imposto che il codominio di f coincide con l'immagine, f è automaticamente surgettiva e quindi la funzione inversa esiste se (e solo se) f è iniettiva. Studio quindi il segno della derivata

$$f'(x) = \underbrace{(ax^2 + 2x + a^2)}_{p(x)}\, e^{ax}\,.$$

Osservo che tale segno coincide con quelle del polinomio di secondo grado p, che ha discriminante $\Delta = 4(1 - a^3)$. Si presentano quindi tre casi:

- se $0 < a < 1$ allora $\Delta > 0$ e p ha due radici distinte x_1 e x_2; quindi f è strettamente crescente negli intervalli $(-\infty, x_1)$ e $(x_2, +\infty)$, ed è strettamente decrescente in $(x_1, x_2])$, e questo pertanto f e disegnando il grafico si vede che f non è iniettiva e dunque l'inversa non esiste;
- se $a = 1$ allora $\Delta = 0$ e p ha un'unica radice x_1 ed è positivo altrove; quindi f è strettamente crescente sia nell'intervallo $(-\infty, x_1)$ che in $(x_1, +\infty)$, e quindi è strettamente crescente anche su tutto $\mathbb{R}$; in particolare f è iniettiva e l'inversa esiste;
- se $a > 1$ allora $\Delta < 0$ e p è sempre strettamente positivo; quindi f è strettamente crescente su $\mathbb{R}$ ed in particolare è iniettiva e l'inversa esiste.

Riassumendo: l'inversa f^{-1} esiste per $a \geq 1$ e non esiste per $0 < a < 1$.

c) Nel resto dell'esercizio le variabili x e y sono collegate dalla relazione $y = f(x)$, o equivalentemente $x = f^{-1}(y)$; in particolare $y \to +\infty$ quando $x \to +\infty$ e viceversa.
Riscrivo la relazione $y = f(x)$ come

$$y = e^{ax}\, x^2 \left(1 + \frac{a}{x^2}\right);$$

passando al logaritmo ottengo

$$\log y = ax + 2\log x + \log\left(1 + \frac{a}{x^2}\right) \tag{4}$$

e siccome per $x \to +\infty$ la funzione a destra dell'uguale è asintoticamente equivalente ad ax, ho che

$$\tfrac{1}{a}\log y \sim x \tag{5}$$

per $x \to +\infty$ e quindi anche per $y \to +\infty$, e siccome $x = f^{-1}(y)$ questa formula equivale a

$$f^{-1}(y) \sim \tfrac{1}{a}\log y \quad \text{per } y \to +\infty.$$

La funzione cercata è quindi

$$g(y) := \tfrac{1}{a}\log y\,.$$

d) Riscrivo la relazione (5) come

$$\frac{\log y}{ax} \to 1$$

per $y \to +\infty$, e passando al logaritmo ottengo

$$\log\log y - \log a - \log x \to 0 \tag{6}$$

Inoltre posso riscrivere l'equazione (4) come

$$ax - \log y + 2\log x = -\log\left(1 + \frac{a}{x^2}\right)$$

e sommando ad entrambi i termini l'espressione $2(\log\log y - \log a - \log x)$ ottengo

$$ax - \log y + 2\log\log y - 2\log a = 2(\log\log y - \log a - \log x) - \log\left(1 + \frac{a}{x^2}\right). \tag{7}$$

Usando la (6) si vede subito che il termine di sinistra di questa uguaglianza tende a 0 per $y \to +\infty$, e quindi anche il termine di destra tende a 0:

$$ax - \log y + 2\log\log y - 2\log a \to 0\,;$$

dividendo per a e usando che $x = f^{-1}(y)$ ottengo infine che

$$f^{-1}(y) - \tfrac{1}{a}\big[\log y - 2\log\log y + 2\log a\big] \to 0\,.$$

La funzione cercata è quindi

$$h(y) := \tfrac{1}{a}\big[\log y - 2\log\log y + 2\log a\big]\,.$$

PRIMA PARTE (prima variante)

1. Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim_{x\to-\infty} x^3 2^x$, b) $\lim_{x\to 2^+} \dfrac{x^2-5x}{x-2}$, c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\log(1+x^4)}{\cos(x^2)-1}$.

   SOLUZIONE. a) 0 , b) $-\infty$, c) -2.

2. Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 4 in 0 di $f(x) := (2+2x^4)\exp(x^2)$.

   SOLUZIONE. Usando lo sviluppo di Taylor $e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + O(t^3)$ con $t = x^2$ ottengo
   $$f(x) = (2+2x^4)\big(1 + x^2 + \tfrac{1}{2}x^4 + O(x^6)\big) = 2 + 2x^2 + 3x^4 + O(x^6)\,,$$
   e quindi $P_4(x) = 2 + 2x^2 + 3x^4$.

3. Il punto P si muove con legge oraria $P = (t\cos t,\, t\sin t)$; calcolare il *modulo* della velocità.

   SOLUZIONE. La velocità di P è $\vec{v} = (\cos t - t\sin t,\, \sin t + t\cos t)$; il modulo è $|\vec{v}| = \sqrt{1+t^2}$.

4. Calcolare $\displaystyle\int_0^\pi x^2 \sin x\, dx$.

   SOLUZIONE. Integrando due volte per parti si ottiene $\displaystyle\int_0^\pi x^2\sin x\,dx = \pi^2 - 4$.

5. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2+x^4}{(1-\cos x)^a}\,dx$ converge ad un numero finito.

   SOLUZIONE. L'integrale è improprio in 0 e usando il fatto che $x^2 + x^4 \sim x^2$ e $1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$ per $x \to 0$ si ottiene che
   $$\int_0^1 \frac{x^2+x^4}{(1-\cos x)^a}\,dx \approx \int_0^1 \frac{dx}{x^{2a-2}}\,,$$
   e quindi l'integrale di partenza converge per $2a-2 < 1$, vale a dire $a < 3/2$.

6. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{3^n+n^4}$.

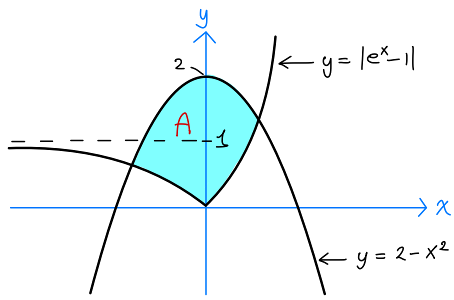
   SOLUZIONE. I coefficienti sono $a_n := \frac{1}{3^n+n^4} \sim 3^{-n}$ e applicando il criterio della radice per le serie di potenze si ottiene $R = 3$.

7. Determinare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = 3t^2(x^2+1)$ che soddisfa $x(0) = 1$.

   SOLUZIONE. Si tratta di un'equazione a variabili separabili:
   $$\frac{\dot{x}}{1+x^2} = 3t^2\,, \qquad \int \frac{dx}{1+x^2} = \int 3t^2\,dt\,, \qquad \arctan x = t^3 + c\,;$$
   inoltre la condizione iniziale è soddisfatta per $c = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ e quindi $x = \tan\big(t^3 + \frac{\pi}{4}\big)$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x,y) nel piano tali che $|e^x - 1| \le y \le 2 - x^2$.

   SOLUZIONE.



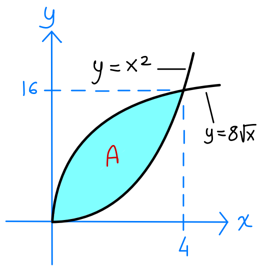
SECONDA PARTE (prima variante)

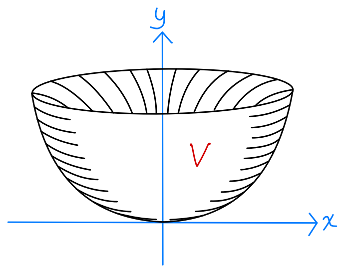
1 Sia A l'insieme dei punti (x, y) nel piano tali che $x \geq 0$ e $x^2 \leq y \leq 8\sqrt{x}$ e sia V il solido ottenuto facendo ruotare A attorno all'asse delle y.

a) Disegnare A e calcolarne l'area.

b) Disegnare V e calcolarne il volume.

<u>SOLUZIONE</u>. a) x^2 e $8\sqrt{x}$ sono funzioni elementari ben note i cui grafici si intersecano, oltre che nell'origine, nel punto P la cui ascissa x che soddisfa l'equazione $x^2 = 8\sqrt{x}$, cioè $x^{3/2} = 8$, cioè $x = 8^{2/3} = 4$. L'insieme A è disegnato nella figura sotto (dove le proporzioni non sono rispettate):



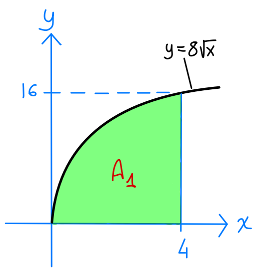


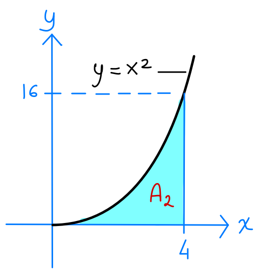
L'area di A è data dall'integrale per x compreso tra 0 e 4 della lunghezza $\ell(x)$ della sezione verticale A_x; chiaramente $\ell(x) = 8\sqrt{x} - x^2$, e quindi

$$\operatorname{area}(A) = \int_0^4 \ell(x)\, dx = \int_0^4 8\sqrt{x} - x^2\, dx = \left| \frac{16\, x^{3/2}}{3} - \frac{x^2}{3} \right|_0^4 = \frac{64}{3}\,.$$

b) Il solido V è disegnato nella figura sopra. Per calcolarne il volume considero gli insiemi

$$A_1 := \big\{(x, y) \colon 0 \leq x \leq 4\,,\ 0 \leq y \leq 8\sqrt{x}\big\}\,,$$
$$A_2 := \big\{(x, y) \colon 0 \leq x \leq 4\,,\ 0 \leq y \leq x^2\big\}\,,$$





ed osservo che A si ottiene sottraendo A_2 da A_1. Indicando con V_1 e V_2 i solidi ottenuti ruotando gli insiemi A_1 ed A_2 (rispettivamente) attorno all'asse y, osservo che V si ottiene sottraendo V_2 da V_1 e quindi, calcolando i volumi di V_1 e V_2 con la seconda formula per i volumi dei solidi di rotazione,

$$\begin{aligned} \operatorname{volume}(V) &= \operatorname{volume}(V_1) - \operatorname{volume}(V_2) \\ &= 2\pi \int_0^4 8x^{3/2}\, dx - 2\pi \int_0^4 x^3\, dr = 2\pi \left| \frac{16\, x^{5/2}}{5} \right|_0^4 - 2\pi \left| \frac{x^4}{4} \right|_0^4 = \frac{384\,\pi}{5}\,. \end{aligned}$$

<u>OSSERVAZIONI</u>. Prima soluzione alternativa di b). Come visto a lezione, il volume di V è dato anche dall'integrale per r che varia da 0 a 4 dell'area della sezione cilindrica V_r, vale a dire l'insieme dei punti di V che distano r dall'asse delle y. Siccome V_r è la superficie laterale di un cilindro di raggio di base r e altezza $\ell(r) = 8\sqrt{r} - r^2$, la sua area è

$$a(r) = 2\pi r\, \ell(r) = 2\pi\big(8r^{3/2} - r^3\big)\,,$$

e quindi

$$\text{volume}(V) = \int_0^4 a(r)\,dr = 2\pi \int_0^4 8r^{3/2} - r^3\,dr = 2\pi \left| \frac{16\,r^{5/2}}{5} - \frac{r^4}{4} \right|_0^4 = \frac{384\,\pi}{5}\,.$$

Seconda soluzione alternativa di b). Il volume di V è anche dato dall'integrale per y che varia da 0 a 16 dell'area della sezione orizzontale di V ad altezza y. Osservo che questa sezione è una corona circolare con raggio esterno $r_e = \sqrt{y}$ (funzione inversa di x^2) e raggio interno $r_i = \frac{1}{64}y^2$ (funzione inversa di $8\sqrt{x}$) e quindi l'area è data da

$$a(y) = \pi r_e^2 - \pi r_i^2 = \pi\big(y - \tfrac{1}{2^{12}}y^4\big)\,,$$

e quindi

$$\text{volume}(V) = \int_0^{16} a(y)\,dy = \pi \int_0^{16} y - \tfrac{1}{2^{12}}y^4\,dy = \pi \left| \tfrac{1}{2}y^2 - \tfrac{1}{5\cdot 2^{12}}y^5 \right|_0^{2^4} = \frac{384\,\pi}{5}\,.$$

$\boxed{2}$ Dato $a \in \mathbb{R}$ consideriamo l'equazione differenziale

$$\ddot{x} - 2a\dot{x} + (a^2 - a + 1)x = 1 + e^{3t} \tag{*}$$

a) Trovare la soluzione generale di (*) per $a \neq 2,\ 5$.

b) Trovare la soluzione generale di (*) per $a = 2,\ 5$.

c) Per ogni $a > 1$ dire quante sono le soluzioni $x(t)$ di (*) tali che $x(t) = O(e^{3t})$ per $t \to +\infty$.

<u>SOLUZIONE</u>. a), b) Com'è noto dalla teoria delle equazioni differenziali lineari del secondo ordine, la soluzione generale di (*) è data da

$$x(t) = x_{\text{om}}(t) + x_1(t) + x_2(t)$$

dove

(i) x_{om} è la soluzione generale dell'equazione omogenea $\ddot{x} - 2a\dot{x} + (a^2 - a + 1)x = 0$,

(ii) x_1 è una soluzione particolare di $\ddot{x} - 2a\dot{x} + (a^2 - a + 1)x = 1$,

(iii) x_2 è una soluzione particolare di $\ddot{x} - 2a\dot{x} + (a^2 - a + 1)x = e^{3t}$.

Calcolo di x_{om}. L'equazione caratteristica dell'equazione omogenea è

$$\lambda^2 - 2a\lambda + a^2 - a + 1 = 0 \tag{1}$$

e le soluzioni sono

$$\lambda_{1,2} = a \pm \sqrt{a-1}\,.$$

Abbiamo quindi diversi casi:

- $a > 1$: le soluzioni λ_1, λ_2 sono reali e distinte e
$$x_{\text{om}}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R};$$
$a = 1$: le soluzioni λ_1, λ_2 sono reali e coincidenti, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, e
$$x_{\text{om}}(t) = e^t(c_1 + c_2 t) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$
- $a < 1$: le soluzioni λ_1, λ_2 sono complesse coniugate, e posto $\omega := \sqrt{1-a}$ vale che
$$x_{\text{om}}(t) = e^{at}\big(c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t)\big) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Calcolo della soluzione particolare x_1. Poiché il termine noto è la funzione costante 1, cerco una soluzione particolare della forma x_1 = costante, ed ottengo

$$x_1 = \frac{1}{a^2 - a + 1}$$

(notare che il denominatore $a^2 - a + 1$ non si annulla mai).

Calcolo della soluzione particolare x_2. Il termine noto è e^{3t}; per vedere per quali a l'esponente 3 risolve l'equazione caratteristica, sostituisco 3 al posto di λ nella (1) ed ottengo

$$a^2 - 7a + 10 = 0\,,$$

ovvero $a = 2,\ 5$. Distinguo ora tre casi:

- $a \neq 2, 5$: cerco una soluzione della forma $x_2 = ce^{3t}$; sostituendo questa espressione nell'equazione in (iii) ottengo l'identità $c(a^2 - 7a + 10)e^{3t} = e^{3t}$ che è soddisfatta per $c = \frac{1}{a^2-7a+10}$, e dunque
$$x_2(t) = \tfrac{1}{a^2-7a+10}e^{3t} \quad \text{per } a \neq 2, 5.$$
- $a = 2$: in questo caso 3 è una delle due soluzioni dell'equazione caratteristica e quindi cerco una soluzione della forma $x_2 = cte^{3t}$; sostituendo questa espressione nell'equazione in (iii) ottengo l'identità $2ce^{3t} = e^{3t}$ che è soddisfatta per $c = \frac{1}{2}$, e dunque
$$x_2(t) = \tfrac{1}{2}te^{3t} \quad \text{per } a = 2.$$
- $a = 5$: come nel caso precedente cerco una soluzione della forma $x_2 = cte^{3t}$ e sostituendo questa espressione nell'equazione in (iii) ottengo $c = -\frac{1}{4}$, e dunque
$$x_2(t) = -\tfrac{1}{4}te^{3t} \quad \text{per } a = 5.$$

c) *Caso* $a = 2$. La soluzione di (*) è
$$x(t) = c_1e^{3t} + c_2e^t + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2}te^{3t}\,,$$
quindi per $t \to +\infty$ si ha che $x(t) \sim \frac{1}{2}te^{3t}$ e dunque x non è mai $O(e^{3t})$.

Caso $a = 5$. La soluzione di (*) è
$$x(t) = c_1e^{7t} + c_2e^{3t} + \tfrac{1}{21} - \tfrac{1}{4}te^{3t}\,,$$
quindi per $t \to +\infty$ vale che $x(t) \sim c_1e^{7t}$ se $c_1 \neq 0$, e $x(t) \sim -\frac{1}{4}te^{3t}$ se $c_1 = 0$; in entrambi i casi x non è $O(e^{3t})$.

Caso $a > 1$ *e* $a \neq 2, 5$. La soluzione di (*) è
$$x(t) = \underbrace{c_1e^{\lambda_1 t} + c_2e^{\lambda_2 t}}_{x_{\text{om}}} + \underbrace{\tfrac{1}{a^2-a+1} + \tfrac{1}{a^2-7a+10}e^{3t}}_{x_1 + x_2}$$
e siccome $x_1 + x_2 = O(e^{3t})$ per $t \to +\infty$, la domanda diventa: *quante soluzioni* x_{om} *sono* (e^{3t})*?* Si vede subito che $x_{\text{om}} = O(e^{3t})$ per $c_1 = c_2 = 0$; resta da vedere se ce ne sono altre, e quante sono. Detta λ_2 la più piccola della due soluzioni di (1), cioè $\lambda_2 = a - \sqrt{a-1}$, si presentano due casi:

- se $\lambda_2 > 3$ allora $x_{\text{om}}(t) = O(e^{3t})$ solo se $c_1 = c_2 = 0$;
- se $\lambda_2 \leq 3$ allora $x_{\text{om}}(t) = O(e^{3t})$ per $c_1 = 0$ e c_2 qualunque, e queste soluzioni sono infinite.

Osservo infine che la condizione $\lambda_2 > 3$ si traduce nella disequazione $a - \sqrt{a-1} > 3$, e risolvendola ottengo $a > 5$.

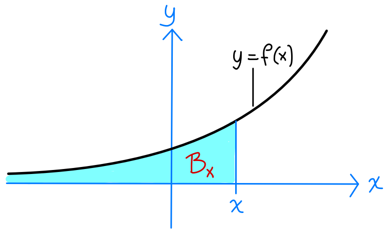
Riassumendo, il numero delle soluzioni x di (*) che soddisfano $x(t) = O(e^{3t})$ è
$$\begin{cases} 0 & \text{se } a = 2,\, 5, \\ 1 & \text{se } a > 5, \\ \text{infinito} & \text{se } 1 < a < 5 \text{ e } a \neq 2. \end{cases}$$

3 Data una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e positiva, per ogni $x \in \mathbb{R}$ indico con B_x l'insieme dei punti del piano compresi tra l'asse delle x e il grafico di f e con ascissa minore o uguale a x. Considero quindi la seguente proprietà:
$$\text{area}(B_x) = f(x) \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}. \tag{P}$$

a) Trovare una funzione f che soddisfa (P).

b) Trovare tutte le funzioni f che soddisfano (P). [*Suggerimento: considerare la funzione* $F(x) :=$ area(B_x) *e scrivere la condizione (P) in termini di* F *e della sua derivata.*]

SOLUZIONE. Svolgo direttamente il punto b).



Siccome l'insieme B_x è quello dato nella figura sopra, l'area di B_x, che indico appunto con $F(x)$, è data da

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt\,; \tag{2}$$

dunque per il teorema fondamentale del calcolo integrale vale che

$$F'(x) = f(x)\,, \tag{3}$$

e pertanto la condizione (P) equivale a

$$F'(x) = F(x)\,.$$

Questo significa che F risolve l'equazione differenziale del primo ordine $\dot{y} = y$.[1] Scrivendo questa equazione nella forma $\dot{y} - y = 0$ si vede che è lineare, omogenea e con coefficienti costanti, e che l'equazione caratteristica è $\lambda - 1 = 0$. Quindi $\lambda = 1$ e le soluzioni dell'equazione sono $y = ce^x$ con $c \in \mathbb{R}$.
Pertanto $F(x)$ deve essere della forma $F(x) = ce^x$, da cui segue che $f = F'$ deve essere della forma $f(x) = ce^x$; inoltre la costante c soddisfa $c \geq 0$ perchè per ipotesi f è positiva.

Per concludere dobbiamo verificare che effettivamente tutte le funzioni $f(x) = ce^x$ con $c \geq 0$ soddisfano la proprietà (P),[2] ma questo è un semplice calcolo:

$$\text{area}(B_x) = \int_{-\infty}^{x} ce^t\,dt = \Big|ce^t\Big|_{-\infty}^{x} = ce^x\,.$$

<u>OSSERVAZIONI</u>. A prima vista la verifica che le funzioni del tipo $f(x) = ce^x$ soddisfano la proprietà (P) non sembra essere necessaria. Per capire che in realtà lo è pensate alla variante del problema in cui si considera solo $x \geq 0$ e B_x è l'insieme dei punti compresi tra il grafico di f e l'asse delle x, con ascissa compresa tra 0 e x (invece che minore di x). Procedendo come sopra si ottiene di nuovo che f deve essere della forma $f(x) = ce^x$, ma poi si scopre che la proprietà (P) vale solo se $c = 0$.

[1] Uso la lettera y per l'incognita perché la lettera x indica la variabile indipendente.

[2] In effetti il ragionamento fatto in precedenza dimostra che se f soddisfa (P) allora f è della forma $f(x) = ce^x$, ma non che tutte le f di questa forma soddisfano (P). Il punto delicato è il seguente: l'equazione (2) implica l'equazione (3) ma in generale non vale il viceversa.

PRIMA PARTE (prima variante)

1. Per ciascuno dei seguenti punti aggiungere le coordinate mancanti, polari o cartesiane (per quelle polari l'angolo α va preso in $[0, 2\pi)$):
$$P_1 \begin{cases} x = 0 & y = -2 \\ r = & \alpha = \end{cases}, \qquad P_2 \begin{cases} x = & y = \\ r = \sqrt{2} & \alpha = \frac{3\pi}{4} \end{cases}, \qquad P_3 \begin{cases} x = -\sqrt{3} & y = -3 \\ r = & \alpha = \end{cases}.$$

   SOLUZIONE. P_1: $r = 2$, $\alpha = \frac{3\pi}{2}$; P_2: $x = -1$, $y = 1$; P_3: $r = 2\sqrt{3}$, $\alpha = \frac{4\pi}{3}$.

2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1+x^4}}{\sin^4 x}$, b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \cos(x\, 2^{-x})$, c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{9^x}{(1+2^x)^3}$.

   SOLUZIONE. a) $-1/2$, b) 1 , c) $+\infty$.

3. Trovare i punti di massimo e di minimo di $f(x) := \dfrac{x}{(x-1)^2}$, specificando se non esistono.

   SOLUZIONE. L'unico punto di minimo è -1 e non esistono punti di massimo.

4. Calcolare la primitiva $\displaystyle\int 4x^3 \exp(x^2)\, dx$.

   SOLUZIONE. Utilizzando il cambio di variabile $y = x^2$ e poi integrando per parti si ottiene
$$\begin{aligned} \int 4x^3 \exp(x^2)\, dx &= \int 2y\, e^y\, dy = 2y\, e^y - \int 2e^y\, dy \\ &= (2y-2)\, e^y + c = (2x^2 - 2)\, \exp(x^2) + c\,. \end{aligned}$$

5. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 + n^4}{(1+n^2)^a}$ converge ad un numero finito.

   SOLUZIONE. Per $n \to +\infty$ si ha che $2n^2 + n^4 \sim n^4$ e $(1+n^2)^a \sim n^{2a}$, e quindi, per il secondo criterio del confronto asintotico,
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 + n^4}{(1+n^2)^a} \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2a-4}}\,.$$
   Pertanto la serie converge ad un numero finito se e solo se $2a - 4 > 1$, cioè $a > \frac{5}{2}$.

6. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $x(t) := \exp(at^2)$ risolve l'equazione differenziale $\dot{x}^2 - t^2 x^2 = 0$.

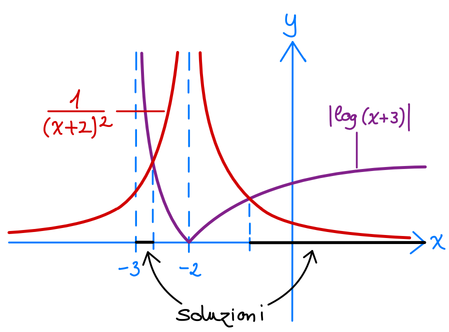
   SOLUZIONE. Per $x = \exp(at^2)$ l'equazione diventa $(4a^2 - 1)\, t^2 \exp(2at^2) = 0$, ed è verificata per ogni t se e solo se $4a^2 - 1 = 0$, vale a dire $a = \pm\frac{1}{2}$.

7. Determinare la soluzione dell'equazione $\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = 0$ tale che $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 2$.

   SOLUZIONE. La soluzione generale dell'equazione è $x(t) = e^{2t}(c_1 + c_2 t)$; imponendo le condizioni iniziali ottengo $x(t) = 2te^{2t}$.

8. Risolvere graficamente la disequazione $|\log(x+3)| \geq \dfrac{1}{(x+2)^2}$.

   SOLUZIONE.



Seconda parte (prima variante)

$\boxed{1}$ Consideriamo la funzione

$$f(x) := \frac{xe^{8x}}{3x+2}\,.$$

a) Disegnare il grafico di f.

b) Discutere al variare di $a \in \mathbb{R}$ il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = a$.

c) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ sia $x(a)$ la più piccola delle soluzioni dell'equazione $f(x) = a$ (ammesso che ne esista almeno una): determinare il dominio della funzione $x(a)$, i punti di discontinuità, ed i limiti per $a \to 0^+$ e $a \to 0^-$.

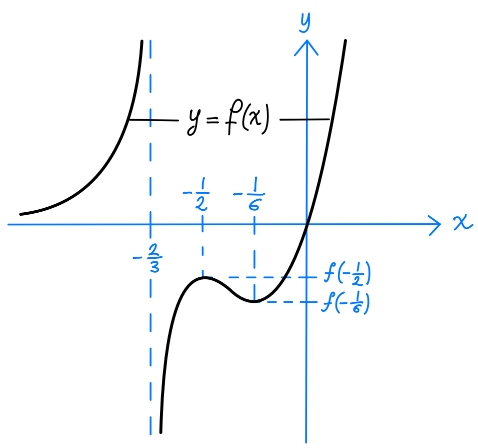
Soluzione. a) La funzione $f(x)$ è definita per ogni $x \neq -\frac{2}{3}$, vale 0 per $x = 0$, è positiva per $x > 0$ e $x < -\frac{2}{3}$, negativa per $-\frac{2}{3} < x < 0$. I limiti significativi sono:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to(-\frac{2}{3})^{\pm}} f(x) = \mp\infty\,.$$

Studiando il segno della derivata

$$f'(x) = \frac{e^{8x}}{(3x+2)^2}(24\,x^2 + 16\,x + 2)$$

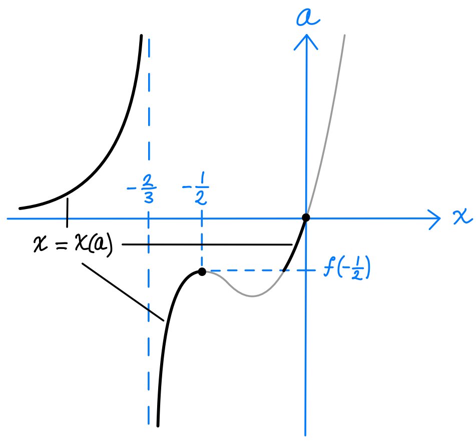
si vede che la funzione cresce negli intervalli $x < -\frac{2}{3}$, $-\frac{2}{3} < x \leq -\frac{1}{2}$, $x \geq -\frac{1}{6}$, e decresce nell'intervallo $-\frac{1}{2} \leq x \leq -\frac{1}{6}$ (in particolare $x = -\frac{1}{2}$ è un punto di massimo locale e $x = -\frac{1}{6}$ è un punto di minimo locale).
Usando queste informazioni traccio il disegno del grafico qui sotto (le proporzioni non sono rispettate).



b) Detto $N(a)$ il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = a$, partendo dal grafico dato sopra ottengo che:

$$N(a) = \begin{cases} 1 & \text{per } a < f\big(-\frac{1}{6}\big) = -\frac{1}{9}e^{-4/3} \simeq -0{,}029; \\ 2 & \text{per } a = f\big(-\frac{1}{6}\big) \text{ (una delle due soluzioni è } -\frac{1}{6}); \\ 3 & \text{per } f\big(-\frac{1}{6}\big) < a < f\big(-\frac{1}{2}\big) = -e^{-4} \simeq -0{,}018; \\ 2 & \text{per } a = f\big(-\frac{1}{2}\big) \text{ (una delle due soluzioni è } -\frac{1}{6}); \\ 1 & \text{per } f\big(-\frac{1}{2}\big) \leq a \leq 0; \\ 1 & \text{per } a = 0 \text{ (la soluzione è 0)}; \\ 2 & \text{per } a > 0. \end{cases}$$

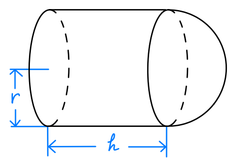
c) Lo schema al punto b) dice l'equazione $f(x) = a$ ammette almeno una soluzione per ogni $a \in \mathbb{R}$, e questo significa che la funzione $x(a)$ è definita per ogni $a \in \mathbb{R}$. Partendo dal grafico di f ottengo quella della funzione $x(a)$ qui sotto (ho messo la variabile indipendente a al posto della y nell'asse verticale, lasciando la variabile dipendente x sull'asse orizzontale; di nuovo, le proporzioni non sono rispettate).



In particolare si vede che $x(a)$ è discontinua per $a = 0$ e $a = f\big(-\frac{1}{2}\big)$, e che

$$\lim_{a\to 0^+} x(a) = -\infty\,, \qquad \lim_{a\to 0^-} x(a) = x(0) = 0\,.$$

2 Devo costruire un serbatoio di volume π (non specifico l'unità di misura) con la forma di un cilindro con attaccata una semisfera, come nel disegno accanto.



a) Se voglio che il serbatoio abbia la superficie più piccola possibile, che misure devo prendere?

b) È possibile fare in modo che la superficie del serbatoio sia pari a 1000?

Soluzione. a) Indico con r il raggio di base del cilindro e con h l'altezza.
Il volume del serbatoio è dato dalla somma del volume del cilindro, $\pi r^2 h$, e del volume della semisfera, $\frac{2}{3}\pi r^3$, e imponendo che tale somma sia π ottengo

$$\pi r^2 h + \tfrac{2}{3}\pi r^3 = \pi\,,$$

da cui ricavo

$$h = \frac{1}{r^2} - \frac{2r}{3} = r\Big(\frac{1}{r^3} - \frac{2}{3}\Big)\,. \tag{1}$$

Inoltre la superficie S del serbatoio è data dalla somma dell'area di base del cilindro πr^2, della sua superficie laterale $2\pi r h$, e dalla superficie della semisfera $2\pi r^2$, ovvero

$$S = 3\pi r^2 + 2\pi r h\,,$$

e utilizzando la formula (1) ottengo

$$S = \frac{5\pi r^2}{3} + \frac{2\pi}{r} = \frac{\pi}{r}\Big(\frac{5}{3}r^3 + 2\Big)\,.$$

Voglio ora trovare il minimo della funzione $S = S(r)$ fra tutti i valori ammissibili di r, vale a dire tutti gli $r > 0$ per cui $h \geq 0$; risolvendo la disequazione $h = \frac{1}{r^2} - \frac{2r}{3} \geq 0$ ottengo che l'insieme degli r ammissibili è

$$0 < r \leq r_0 := \sqrt[3]{\tfrac{3}{2}} \simeq 1{,}14\,.$$

Osservo ora che la derivata $S'(r) = \frac{10\pi r}{3} - \frac{2\pi}{r^2}$ si annulla in

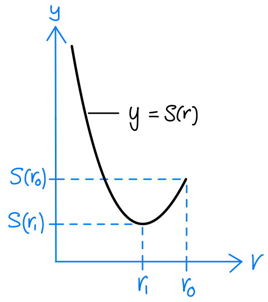
$$r_1 := \sqrt[3]{\tfrac{3}{5}} \simeq 0{,}84\,,$$

e confrontando il valore di $S(r)$ per $r = r_1$ con i valori/limiti agli estremi dell'intervallo degli r ammissibili, vale a dire

$$S(r_1) = \pi\sqrt[3]{45} =\simeq 11{,}17\,, \quad S(r_2) = \pi\sqrt[3]{\tfrac{243}{4}} \simeq 12{,}35\,, \quad S(0^+) = +\infty\,, \tag{2}$$

ottengo che r_1 è il punto di minimo assoluto di S; in tal caso l'altezza è h è uguale a r_1.

b) Studiando il segno della derivata ottengo che $S(r)$ decresce nell'intervallo $0 < r \leq r_1$ e cresce nell'intervallo $r_1 \leq r \leq r_0$; usando queste informazioni e i valori in (2) ottengo il disegno del grafico di S riportato sotto (le proporzioni non sono rispettate):



Quindi che l'immagine di S è la semiretta $[S(r_1), +\infty)$ e siccome $S(r_1) \simeq 11{,}17$ è minore di 1000, esiste r per cui l'area del contenitore vale 1000.

3 Dato $a > 0$ consideriamo l'integrale improprio $I := \displaystyle\int_0^\pi \frac{1}{(\sin x)^a} - \frac{1}{x^{3/2}}\,dx$.

a) Dire in quali punti Iè improprio.

b) Determinare la parte principale della funzione integranda $f(x) := \frac{1}{(\sin x)^a} - \frac{1}{x}$ per $x \to 0$.

c) Discutere il comportamento di I.

<u>SOLUZIONE</u>. a) Affinché $f(x)$ sia definita è necessario che x e $\sin x$ siano strettamente positivi (le potenze al denominatore siano ben definite, e diverse da zero). Da questa osservazione segue che $f(x)$ non è definita per $x = 0$ e $x = \pi$, ed è definita e continua per $x \in (0, \pi)$. Quindi l'integrale è improprio in 0 e π.

b) Siccome $\sin x \sim x$ per $x \to 0$, ho che $(\sin x)^{-a} \sim x^{-a}$ e quindi

$$\text{p.p.}(f(x)) = \text{p.p.}\big((\sin x)^{-a} - x^{-3/2}\big) = \begin{cases} -x^{-3/2} & \text{per } a < \frac{3}{2}, \\ x^{-a} & \text{per } a > \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Per $a = \frac{3}{2}$ la parte principale di $(\sin x)^{-a}$ si cancella con $x^{3/2}$ e serve quindi uno sviluppo più preciso di $(\sin x)^{-a}$.
Usando lo sviluppo di Taylor $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + O(x^5)$ ottengo

$$(\sin x)^{-3/2} = \big(x - \tfrac{1}{6}x^3 + O(x^5)\big)^{-3/2} = x^{-3/2}\big(1 - \tfrac{1}{6}x^2 + O(x^4)\big)^{-3/2};$$

usando poi lo sviluppo di Taylor $(1+t)^b = 1 + bt + O(t^2)$ con $b := -\frac{3}{2}$ e $t := -\frac{1}{6}x^2 + O(x^4)$ ottengo

$$\begin{aligned} (\sin x)^{-3/2} &= x^{-3/2}(1+t)^{-3/2} \\ &= x^{-3/2}\big(1 - \tfrac{3}{2}t + O(t^2)\big) \\ &= x^{-3/2}\big(1 + \tfrac{1}{4}x^2 + O(x^4)\big) = x^{-3/2} + \tfrac{1}{4}x^{1/2} + O(x^{5/2})\big). \end{aligned}$$

Quindi $f(x) = \frac{1}{4}x^{1/2} + O(x^{5/2})$, da cui segue che

$$\text{p.p.}(f(x)) = \tfrac{1}{4}x^{1/2} \quad \text{per } a = \tfrac{3}{2}.$$

c) Siccome l'integrale è improprio in 0 e π, per studiarne il comportamento devo scomporlo come somma di due integrali impropri semplici, il primo improprio in 0 e il secondo improprio in π:

$$I = \int_0^\pi f(x)\,dx = \underbrace{\int_0^1 f(x)\,dx}_{I_1} + \underbrace{\int_1^\pi f(x)\,dx}_{I_2}.$$

Grazie al secondo criterio del confronto asintotico e a quanto fatto al punto b) ottengo che

- per $a < \frac{3}{2}$, I_1 si comporta come $\int_0^1 -\frac{1}{x^{3/2}}\,dx$ e quindi diverge a $-\infty$,
- per $a = \frac{3}{2}$, I_1 si comporta come $\int_0^1 x^{1/2}\,dx$ (che non è improprio) e quindi converge,
- per $a > \frac{3}{2}$, I_1 si comporta come $\int_0^1 \frac{1}{x^a}\,dx$ e quindi diverge a $+\infty$.

Per studiare il comportamento di I_2 osservo innanzitutto che per $x \to \pi$ la parte principale di $f(x)$ è $(\sin x)^{-a}$, e usando il cambio di variabile $x = \pi - t$ e l'identità $\sin(\pi - t) = \sin t$ ottengo

$$I_2 \approx \int_1^{\pi} (\sin x)^{-a}\, dx = \int_0^{\pi-1} (\sin t)^{-a}\, dt \approx \int_0^{\pi-1} \frac{1}{t^a}\, dt$$

e quindi

- per $a < 1$, I_2 converge,
- per $a \geq 1$, I_2 diverge a $+\infty$.

Mettendo insieme i comportamenti di I_1 ed I_2 ottengo infine che

- per $a < 1$, I_1 diverge a $-\infty$ e I_2 converge, quindi I diverge a $-\infty$,
- per $1 \leq a < \frac{3}{2}$, I_1 diverge a $-\infty$ e I_2 diverge a $+\infty$, quindi I non esiste,
- per $a \geq \frac{3}{2}$, I_1 diverge a $+\infty$ oppure converge e I_2 diverge a $+\infty$, quindi I diverge a $+\infty$.

Prima parte, gruppo A (prima variante)

1. Determinare l'insieme di definizione della funzione $f(x) := \log\big(\sin(2x) - \frac{1}{2}\big)$.
   Soluzione. Deve essere $\sin(2x) > \frac{1}{2}$ vale a dire $\frac{\pi}{12} + k\pi < x < \frac{5\pi}{12} + k\pi$ con k intero.

2. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := \exp(x^3 + ax^2 + x)$ è crescente su tutto $\mathbb{R}$.
   Soluzione. Deve essere $f'(x) = \exp(\cdots)\,(3x^2+2ax+1) \geq 0$ per ogni x, ovvero il discriminante Δ di $3x^2 + 2ax + 1$ deve soddisfare $\Delta \leq 0$, cosa che si verifica per $-\sqrt{3} \leq a \leq \sqrt{3}$.

3. Mettere le seguenti funzioni nel giusto ordine rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$:
$$\underbrace{x^{10} - 2^x}_{a}\,, \quad \underbrace{\frac{1}{1+\log x}}_{b}\,, \quad \underbrace{\frac{2^x \log x}{1+1/x}}_{c}\,, \quad \underbrace{\frac{1}{x+x^2}}_{d}\,.$$
   Soluzione. $d \ll b \ll a \ll c$.

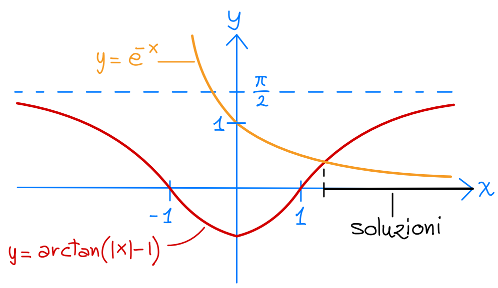
4. Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 6 in 0 della funzione $f(x) := (3 - 2x^4)\log(1 + 2x^2)$.
   Soluzione. Usando lo sviluppo di Taylor $\log(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 + O(t^4)$ con $t = 2x^2$ ottengo
$$f(x) = (3 - 2x^4)\big(2x^2 - 2x^4 + \tfrac{8}{3}x^6 + O(x^8)\big) = 6x^2 - 6x^4 + 4x^6 + O(x^8)\,,$$
   e quindi $P_6(x) = 6x^2 - 6x^4 + 4x^6$.

5. Il punto P si muovo con legge oraria $P = (2t+2, 1-\cos t, \sin t)$. Calcolare la distanza d percorsa tra l'istante $t = 0$ e $t = 4$.
   Soluzione. La velocità di P è $\vec{v} = (2, \sin t, \cos t)$, quindi $|\vec{v}| = \sqrt{5}$ e $d = \displaystyle\int_0^4 |\vec{v}|\,dt = 4\sqrt{5}$.

6. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(n^{-a}) - 1}{1+\sqrt{n}}$ converge ad un numero finito.
   Soluzione. Usando lo sviluppo $e^t - 1 \sim t$ per $t \to 0$ con $t = n^{-a}$ ottengo
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(n^{-a}) - 1}{1+\sqrt{n}} \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{a+1/2}}\,,$$
   e quindi la serie converge per $a > \frac{1}{2}$.

7. Risolvere l'equazione differenziale $\dot{x} = (9x^2 + 1)\cos t$.
   Soluzione. Equazione a variabili separabili: in forma integrale diventa $\int \frac{1}{9x^2+1}\,dx = \int \cos t\,dt$, vale a dire $\arctan(3x) = 3\sin t + c$, e infine $x = \frac{1}{3}\tan(3\sin t + c)$ con $c \in \mathbb{R}$.

8. Risolvere graficamente la disequazione $e^{-x} \leq \arctan(|x| - 1)$.
   Soluzione.



PRIMA PARTE, GRUPPO B (prima variante)

1. Trovare le soluzioni della disequazione $2\cos(2x) \geq -\sqrt{2}$ nell'intervallo $0 \leq x \leq \pi$.
   SOLUZIONE. Le soluzioni sono $0 \leq x \leq \frac{3\pi}{8}$ e $\frac{5\pi}{8} \leq x \leq \pi$.

2. Trovare l'inversa della funzione $y = \dfrac{3x+1}{2-x}$.
   SOLUZIONE. Esplicitando x nella relazione $y = \dfrac{3x+1}{2-x}$ ottengo $x = \dfrac{2y-1}{y+3}$.

3. Determinare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) := \dfrac{\exp(x^2)}{1-x^2} - 1$.
   SOLUZIONE. Usando gli sviluppi $e^t = 1 + t + O(t^2)$ con $t = x^2$ e $(1+t)^{-1} = 1 - t + O(t^2)$ con $t = -x^2$ ottengo
$$\begin{aligned} f(x) &= \exp(x^2)\,(1-x^2)^{-1} - 1 \\ &= \big(1 + x^2 + O(x^4)\big)\big(1 + x^2 + O(x^4)\big) - 1 = 2x^2 + O(x^4) \sim 2x^2\,. \end{aligned}$$

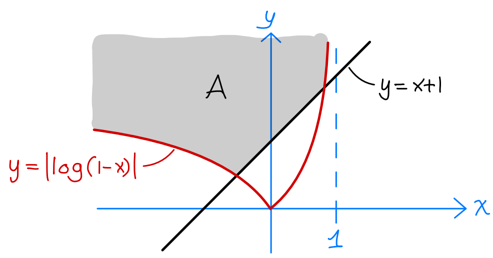
4. Mettere le seguenti funzioni nel giusto ordine rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to 0$:
$$\underbrace{\log x}_{a}\,, \quad \underbrace{x^2 \log x}_{b}\,, \quad \underbrace{\frac{\log(1+2x^2)}{e^x}}_{c}\,, \quad \underbrace{\frac{x + \log x}{\sin x}}_{d}\,.$$
   SOLUZIONE. $c \ll b \ll a \ll d$.

5. Calcolare $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{4+x^2}\,dx$
   SOLUZIONE. Usando il cambio di variabile $x = 2y$ ottengo
$$\int_0^2 \frac{1}{4+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+y^2}\,dy = \frac{1}{2}\arctan(1) = \frac{\pi}{8}\,.$$

6. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^a}{(1-x)^{2a}}\,dx$ è finito.
   SOLUZIONE. L'integrale è improprio in 1, e usando il cambio di variabile $x = 1 - y$ ottengo
$$\int_0^1 \frac{x^a}{(1-x)^{2a}}\,dx \approx \int_0^1 \frac{1}{(1-x)^{2a}}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{y^{2a}}\,dy$$
   e quindi l'integrale è finito per $a < \frac{1}{2}$.

7. Risolvere l'equazione differenziale $\dot{x} + x\cos t = 2t\exp(-\sin t)$.
   SOLUZIONE. Equazione lineare del primo ordine: $x = (t^2 + c)\exp(-\sin t)$ con $c \in \mathbb{R}$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $y \geq x + 1$ e $y \geq |\log(1-x)|$.
   SOLUZIONE.



SECONDA PARTE (prima variante)

1 Dato $a \in \mathbb{R}$ consideriamo la funzione

$$f(x) := (\cos x)^a - \exp(-2x^2)\,.$$

Calcolare la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0$, cominciando se opportuno dal caso $a \neq 4$.

SOLUZIONE. Entrambi gli addendi della funzione valgono 1 per $x = 0$ e quindi la funzione tende a 0. Per trovare la parte principale uso lo sviluppo $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + O(x^4)$ e lo sviluppo $e^t = 1 + t + O(t^2)$ con $t = -2x^2$, e ottengo

$$\begin{aligned} f(x) &= \big(1 - \tfrac{1}{2}x^2 + O(x^4)\big)^a - \big(1 + t + O(t^2)\big) \\ &= \big(1 - \tfrac{1}{2}x^2 + O(x^4)\big)^a - 1 + 2x^2 + O(x^4) \end{aligned}$$

(nel secondo passaggio ho usato che $O(t^2) = O(x^4)$).
Per il primo addendo uso adesso lo sviluppo $(1+t)^a = 1 + at + O(t^2)$ con $t = -\frac{1}{2}x^2 + O(x^4)$ e ottengo

$$f(x) = at + O(t^2) + 2x^2 + O(x^4) = \big(2 - \tfrac{1}{2}a\big)\, x^2 + O(x^4) \tag{1}$$

(nel secondo passaggio ho usato che $O(t^2) = O(x^4)$ perchè $t = O(x^2)$). Pertanto

$$\text{p.p.}(f(x)) = \big(2 - \tfrac{1}{2}a\big)\, x^2 \quad \text{per } a \neq 4.$$

Per $a = 4$ la (1) diventa $f(x) = O(x^4)$ e non basta a determinare la parte principale di f. Servono quindi sviluppi di ordine superiore a 4: usando $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + O(x^6)$ e $e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + O(t^3)$ con $t = -2x^2$ ottengo

$$f(x) = \big(1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^4 + O(x^6)\big)^4 - 1 + 2x^2 - 2x^4 + O(x^6)\,,$$

usando quindi lo sviluppo $(1+t)^4 = 1 + 4t + 6t^2 + O(t^3)$ con $t = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + O(x^6)$ ottengo

$$\begin{aligned} f(x) &= 4t + 6t^2 + O(t^3) + 2x^2 - 2x^4 + O(x^6) \\ &= -2x^2 + \tfrac{1}{6}x^4 + O(x^6) + 6\big(-\tfrac{1}{2}x^2 + O(x^4)\big)^2 + 2x^2 - 2x^4 = -\tfrac{1}{3}x^4 + O(x^6) \end{aligned}$$

e quindi

$$\text{p.p.}(f(x)) = -\tfrac{1}{3}x^4 \quad \text{per } a = 4.$$

2 Consideriamo la funzione

$$f(x) := \int_0^{x^2} t - \frac{2t^9}{t^8+1}\, dt\,.$$

a) Scrivere la derivata di $f(x)$.

b) Disegnare il grafico di $f(x)$.

c) Trovare la parte principale di $f(x)$ per $x \to +\infty$.

SOLUZIONE. a) Indico con g la funzione da integrare nella definizione di f, vale a dire

$$g(t) := t - \frac{2t^9}{t^8+1} = \frac{t(1-t^8)}{t^8+1}\,.$$

Per una formula vista a lezione, la derivata di f è

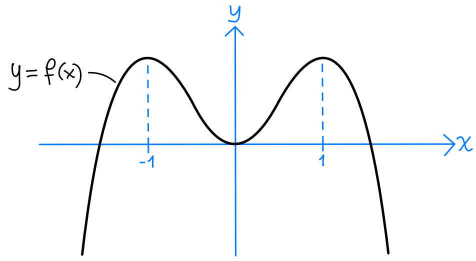
$$f'(x) = g(x^2)\,(x^2)' = \frac{2x^3(1-x^{16})}{x^{16}+1}\,. \tag{2}$$

b) L'insieme di definizione di f è tutto $\mathbb{R}$ perché l'integrale che definisce $f(x)$ è un integrale in senso proprio per ogni $x \in \mathbb{R}$. Inoltre la funzione f è chiaramente pari (sostituendo x con $-x$ l'estremo di integrazione x^2 non cambia) e quindi basta studiarla per $x \geq 0$.
Osservo che a meno di non trovare una formula esplicita per la primitiva di g, cosa che sembra complicata, non è possibile studiare il segno di f.
Per $t \to +\infty$ vale che $g(t) \sim -t$, quindi $\lim g(t) = -\infty$ e siccome $-\infty$ è negativo ottengo che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \int_0^{+\infty} g(t)\, dt = -\infty\,.$$

Osservo adesso che il segno di $f'(x)$ dipende solo dal segno del fattore $1 - x^{16}$, che è positivo per $x^{16} \leq 1$, vale a dire $0 \leq x \leq 1$. Dunque $f(x)$ cresce nell'intervallo $0 \leq x \leq 1$ e decresce nella semiretta $x \geq 1$; in particolare 1 è il punto di massimo assoluto (ma in mancanza di una primitiva di g non posso calcolare esplicitamente il valore massimo $f(1)$), mentre 0 è un punto di minimo locale; inoltre $f(0) = 0$ perché per $x = 0$ gli estremi di integrazione nella definizione di $f(x)$ coincidono.

Sulla base di queste informazioni traccio il disegno sotto (le proporzioni non sono rispettate):



c) Il fatto che $g(t) \sim -t$ per $t \to +\infty$ suggerisce che, per $x \to +\infty$,

$$f(x) = \int_0^{x^2} g(t)\,dt \sim \int_0^{x^2} -t\,dt = -\tfrac{1}{2}x^4 \quad \Rightarrow \quad \text{p.p.}(f(x)) = -\tfrac{1}{2}x^4\,.$$

Dimostro rigorosamente questa formula usando il teorema di de L'Hôpital e la formula per f' data in (2):

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{-x^4/2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{-2x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-x^{16}}{-1-x^{16}} = 1\,.$$

<u>Osservazioni</u>. Osservo che la derivata seconda di $f(x)$ è

$$f''(x) = \frac{2x^2(3 - 16\,x^{16} - 3\,x^{32})}{(x^{16}+1)^2}$$

e studiandone il segno per $x \geq 0$ ottengo che f è convessa nell'intervallo $0 \leq x \leq x_0$ e concava nella semiretta $x \geq x_0$, dove

$$x_0 := \sqrt[16]{\frac{\sqrt{265} - 16}{3}} \simeq 0{,}86\,.$$

$\boxed{3}$ Dato $a > 0$, considero l'insieme A dei punti (x, y) tali che $x > 1$ e $x^{3/2} \leq y \leq f(x)$ dove

$$f(x) := \frac{(x^3+1)^{a+1/2}}{(x^3-1)^a}\,.$$

a) Disegnare l'insieme A.

b) Dire per quali a l'area di A è finita.

<u>Soluzione</u>. a) Osservo innanzitutto che la funzione $f(x)$ è definita solo per $x > 1$. Infatti le potenze coinvolte hanno esponente reale e positivo, e quindi le basi devono essere positive: dunque deve essere $x^3 + 1 \geq 0$, cioè $x \geq -1$, e $x^3 - 1 > 0$ (non è ammissibile avere 0 al denominatore), cioè $x > 1$. Inoltre

$$f(x) > x^{3/2} \quad \text{per ogni } x > 1, \tag{3}$$

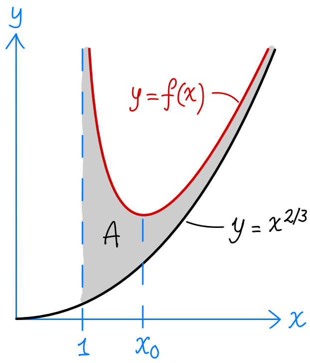
infatti il numeratore della frazione che dà $f(x)$ soddisfa $(x^3+1)^{a+1/2} > (x^3)^{a+1/2} = x^{3a+3/2}$, mentre il denominatore soddisfa $(x^3-1)^a < (x^3)^a = x^{3a}$.

Osservo poi che la funzione $f(x)$ è sempre positiva e tende a $+\infty$ sia per $x \to +\infty$ che per $x \to 1^+$. Studiando inoltre il segno della derivata

$$f'(x) = \frac{3}{2}(x^3+1)^{a-1/2}(x^3-1)^{-a-1}x^2(x^3 - 4a - 1)$$

ottengo che $f(x)$ è decrescente per $1 < x \leq x_0$ e crescente per $x \geq x_0 := \sqrt[3]{4a+1}$; in particolare x_0 è il punto di minimo assoluto di $f(x)$ per $x > 1$.

Usando il grafico della funzione elementare $x^{3/2}$, che è noto, le informazioni date sopra a proposito del grafico di $f(x)$ e la disuguaglianza (3) ottengo il disegno di A riportato sotto (le proporzioni non sono rispettate):



b) L'area di A è data da

$$\text{area}(A) = \int_1^{+\infty} \underbrace{f(x) - x^{3/2}}_{g(x)} \, dx \, .$$

Osservo adesso che questo integrale è improprio sia a $+\infty$ che in 1 (ricordo che $f(x)$ non è definita per $x = 1$) e vale $+\infty$ oppure un numero finito e positivo perché l'integranda $g(x)$ è positiva. Per capire quando è finito lo spezzo come somma di due integrali impropri semplici,

$$\text{area}(A) = \underbrace{\int_1^2 g(x)\, dx}_{I_1} + \underbrace{\int_2^{+\infty} g(x)\, dx}_{I_2} \, ,$$

e quindi l'area di A è finita quando I_1 e I_2 sono entrambi finiti.

Per studiare il comportamento di I_1 osservo che, per $x \to 1$,

$$g(x) = \frac{(x^3+1)^{a+1/2}}{(x^2+x+1)^a (x-1)^a} - x^{3/2} \sim \frac{2^{a+1/2}}{3^a (x-1)^a}$$

(nel secondo passaggio ho usato la scomposizione $x^3 - 1 = (x^2+x+1)(x-1)$, nel terzo ho usato il fatto che $x^3 + 1 \to 2$ e $x^2 + x + 1 \to 3$).

Usando ora il secondo criterio del confronto asintotico ottengo

$$I_1 = \int_1^2 g(x)\, dx \approx \int_1^2 \frac{1}{(x-1)^a}\, dx = \int_0^1 \frac{1}{y^a}\, dy$$

(nel secondo passaggio ho usato il cambio di variabile $x = y + 1$, in modo da ricondurmi ad un integrale improprio in 0) e dunque

$$I_1 < +\infty \quad \text{per } a < 1.$$

Per studiare il comportamento di I_2 trovo la parte principale di $g(x)$ per $x \to +\infty$:

$$\begin{aligned} g(x) &= (x^3+1)^{a+1/2}(x^3-1)^{-a} - x^{3/2} \\ &= x^{3/2}\big(1+x^{-3}\big)^{a+1/2}\big(1-x^{-3}\big)^{-a} - x^{3/2} \\ &= x^{3/2}\Big(1 + \big(a+\tfrac{1}{2}\big)x^{-3} + O\big(x^{-6}\big)\Big)\Big(1 + ax^{-3} + O\big(x^{-6}\big)\Big) - x^{3/2} \\ &\sim \big(2a + \tfrac{1}{2}\big)x^{-3/2} \end{aligned}$$

(nel secondo passaggio ho raccolto x^3 nelle basi $x^3 + 1$ e $x^3 - 1$, e nel terzo ho usato due volte lo sviluppo $(1+t)^b = 1 + bt + O(t^2)$).

Quindi, per il secondo criterio del confronto asintotico,

$$I_2 = \int_2^{+\infty} g(x)\, dx \approx \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}}\, dx < +\infty \quad \text{per ogni } a.$$

Concludo infine che A ha area finita se e solo se $a < 1$.

Prima parte, gruppo A (prima variante)

1. Calcolare l'area del triangolo T delimitato dagli assi e dalla retta tangente al grafico della funzione e^{-x} nel punto di ascissa $x = 1$.
   Soluzione. La retta tangente è $y = \frac{1}{e}(2 - x)$, l'altezza e la base di T sono $\frac{2}{e}$ e 2, l'area è $\frac{2}{e}$.

2. Determinare l'insieme di definizione della funzione $f(x) := \sqrt{\log(4^x - 1)}$.
   Soluzione. Deve essere $4^x - 1 \geq 1$, vale a dire $x \geq \frac{1}{2}$.

3. Scrivere il polinomio di Taylor in 0 all'ordine 4 di $f(x) := \exp(2x^2)\cos(2x)$.
   Soluzione. $P_4(x) := 1 - \frac{4}{3}x^4$.

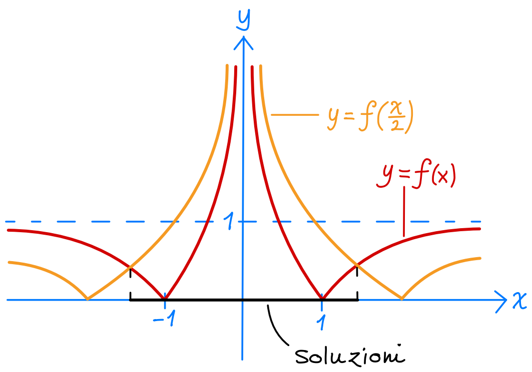
4. Dire per quali a vale che $x^2 \log(2 + e^{-x}) = o(x^a)$ per $x \to +\infty$.
   Soluzione. $a > 2$.

5. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^\infty \frac{a^x}{1+x^2}\,dx$ è finito.
   Soluzione. $0 < a \leq 1$.

6. Dire per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1+\sqrt{n!}}$ converge ad un numero finito.
   Soluzione. Applicando il criterio del rapporto per le serie di potenze si ottiene
   $$L := \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{n!}{(n+1)!}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{1}{n+1}} = 0\,,$$
   e quindi il raggio di convergenza è $R = 1/L = +\infty$; la serie converge per ogni x.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = \dfrac{1}{x(4+t^2)}$ tale che $x(2) = 1$.
   Soluzione. Equazione a variabili separabili: $x(t) = \sqrt{\arctan\left(\frac{t}{2}\right) + 1 - \frac{\pi}{4}}$.

8. Sia $f(x) := \left|\dfrac{1}{x^2} - 1\right|$. Risolvere graficamente la disequazione $f(x) \leq f(\frac{1}{2}x)$.
   [*Nel disegno indicare i punti $x = \pm 1$.*]
   Soluzione.



PRIMA PARTE, GRUPPO B (prima variante)

1. Dire per quali $\alpha \in [0, 2\pi)$ e $r > 0$ vale l'identità $\sin x - \sqrt{3} \cos x = r \sin(x + \alpha)$.
   SOLUZIONE. $r = 2$, $\alpha = \frac{5\pi}{3}$.

2. Mettere le seguenti funzioni nel giusto ordine rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$:
$$\underbrace{\frac{1}{x} + 2\log x}_{a}\ , \quad \underbrace{\frac{6}{2^x}}_{b}\ , \quad \underbrace{\frac{\log x}{\log(\log x)}}_{c}\ , \quad \underbrace{\frac{2^x(x+1)}{4^x + x}}_{d}\ .$$
   SOLUZIONE. $b \ll d \ll c \ll a$.

3. Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) := \dfrac{\log(1 + x^4) - x^4}{\exp(x^2)}$.

   SOLUZIONE. $\text{p.p.}(f(x)) = -\frac{1}{2}x^8$.

4. Data la funzione $f(x) := \displaystyle\int_0^{x^2} \frac{dt}{2 + \cos t}$, calcolare $f'(\sqrt{\pi})$.
   SOLUZIONE. La derivata è $f'(x) = \dfrac{2x}{2 + \cos(x^2)}$ e quindi $f'(\sqrt{\pi}) = 2\sqrt{\pi}$.

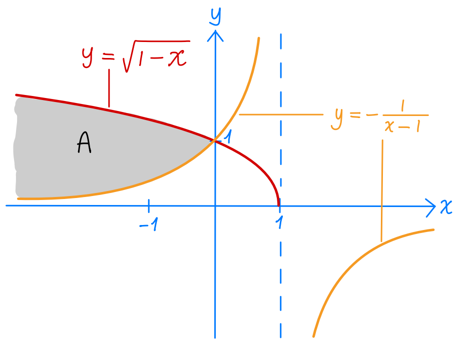
5. Dire per quali $a > 0$ l'area compresa tra gli assi e il grafico di $f(x) := \dfrac{1}{1 + a^x}$ è finita.
   SOLUZIONE. L'area è data dall'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{1 + a^x}$ ed è finita per $a > 1$.

6. Calcolare il valore della serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} 2^n x^n$ (per gli x per cui converge).

   SOLUZIONE. Ci si riconduce alla serie geometrica: la serie converge per $|x| < \frac{1}{2}$ e vale che
$$\sum_{n=2}^{\infty} 2^n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} (2x)^n = \frac{1}{1 - 2x} - 1 - 2x = \frac{4x^2}{1 - 2x}\ .$$

7. Trovare una soluzione particolare dell'equazione differenziale $\ddot{x} - \dot{x} + x = t^2$
   SOLUZIONE. Cerco una soluzione del tipo $x(t) = at^2 + bt + c$ e trovo $x(t) = t^2 + 2t$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $-\dfrac{1}{x - 1} \le y \le \sqrt{1 - x}$.
   [*Nel disegno indicare i punti $x = \pm 1$.*]
   SOLUZIONE.



SECONDA PARTE (prima variante)

1 Dato a reale e *positivo*, consideriamo l'equazione differenziale

$$\ddot{x} + 4a\dot{x} + (a^4+4)x = e^t + e^{-2\sqrt{2}t} \qquad (*)$$

a) Risolvere (*) per ogni $a \neq \sqrt{2}$.

b) Risolvere (*) per $a = \sqrt{2}$.

c) Per $a = \sqrt{2}$, trovare la soluzione di (*) che soddisfa $x(0) = \dot{x}(0) = 0$.

SOLUZIONE. a), b) Ricordo che la soluzione generale dell'equazione (*) è

$$x = x_{\mathrm{om}} + x_1 + x_2$$

dove

(i) x_{om} è la soluzione generale dell'equazione omogenea $\ddot{x} + 4a\dot{x} + (a^4+4)x = 0$;

(ii) x_1 è una soluzione particolare dell'equazione non omogenea $\ddot{x} + 4a\dot{x} + (a^4+4)x = e^t$;

(iii) x_2 è una soluzione particolare dell'equazione non omogenea $\ddot{x}+4a\dot{x}+(a^4+4)x = e^{-2\sqrt{2}t}$.

Passo 1: calcolo di x_{om}. L'equazione caratteristica dell'equazione omogenea in (i) è

$$\lambda^2 + 4a\lambda + a^4 + 4 = 0\,,$$

e le soluzioni sono

$$\lambda_{1,2} = -2a \pm \sqrt{4a^2 - a^4 - 4} = -2a \pm \sqrt{-(a^2-2)^2}\,.$$

Distinguo quindi due casi:

- se $a^2-2=0$, ovvero se $a=\sqrt{2}$ (ricordo che a è sempre positivo), ho che $\lambda_1 = \lambda_2 = -2\sqrt{2}$, e quindi,
$$x_{\mathrm{om}}(t) = e^{2\sqrt{2}t}(c_1 + c_2 t) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R};$$
- se $a \neq \sqrt{2}$ ho che $\lambda_{1,2} = -2a \pm i(a^2-2)$ e quindi, posto $\omega := a^2 - 2$,
$$x_{\mathrm{om}}(t) = e^{-2at}\big(c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t)\big) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Passo 2: calcolo di x_1. Siccome 1 non è mai soluzione dell'equazione caratteristica, posso sempre trovare una soluzione particolare dell'equazione in (ii) della forma $x_1 = ce^t$. Sostituendo questa espressione nell'equazione ottengo che quest'ultima è soddisfatta se $c(a^4+4a+5) = 1$, e quindi

$$x_1(t) = \tfrac{1}{a^4+4a+5} e^t\,.$$

(Il fatto che il denominatore $a^4 + 4a + 5$ non si annulli per alcun a segue dalla teoria, ma non è affatto evidente.)

Passo 3: calcolo di x_2 per $a \neq \sqrt{2}$. Il coefficiente $-2\sqrt{2}$ non è mai una soluzione dell'equazione caratteristica per $a \neq \sqrt{2}$, e quindi posso sempre trovare una soluzione particolare dell'equazione in (iii) della forma $x_2 = ce^{-2\sqrt{2}t}$. Sostituendo questa espressione nell'equazione ottengo che quest'ultima è soddisfatta se $c(a^4 - 8\sqrt{2}a + 12) = 1$, e quindi

$$x_2(t) = \tfrac{1}{a^4 - 8\sqrt{2}a + 12} e^{-2\sqrt{2}t}\,.$$

Passo 4: calcolo di x_2 per $a = \sqrt{2}$. In questo caso il coefficiente $-2\sqrt{2}$ coincide con le due soluzioni dell'equazione caratteristica, e quindi posso trovare una soluzione particolare dell'equazione in (iii) della forma $x_2 = ct^2 e^{-2\sqrt{2}t}$. Sostituendo questa espressione nell'equazione ottengo che quest'ultima è soddisfatta se $2c = 1$, e quindi

$$x_2(t) = \tfrac{1}{2} t^2 e^{-2\sqrt{2}t}\,.$$

Riassumendo, per $a \neq \sqrt{2}$ la soluzione generale di (*) è

$$x(t) = e^{-2at}\big(c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t)\big) + \tfrac{1}{a^4+4a+5} e^t + \tfrac{1}{a^4-8\sqrt{2}a+12} e^{-2\sqrt{2}t}$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, mentre per $a = \sqrt{2}$ è

$$x(t) = e^{-2\sqrt{2}t}\big(c_1 + c_2 t + \tfrac{1}{2}t^2\big) + \tfrac{1}{9+4\sqrt{2}} e^t\,.$$

c) Per $a \neq \sqrt{2}$ si ha inoltre che

$$x(t) = e^{-2\sqrt{2}t}\big(c_2 - 2\sqrt{2}c_1 + (1 - 2\sqrt{2}c_2)t - \sqrt{2}t^2\big) + \tfrac{1}{9+4\sqrt{2}}e^t \,,$$

e quindi, imponendo che $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ si ottiene il sistema

$$\begin{cases} c_1 + \frac{1}{9+4\sqrt{2}} = 0 \\ c_2 - 2\sqrt{2}c_1 + \frac{1}{9+4\sqrt{2}} = 0 \end{cases}$$

da cui si ottiene infine $c_1 = -\frac{1}{9+4\sqrt{2}}$ e $c_2 = -\frac{1+2\sqrt{2}}{9+4\sqrt{2}}$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Dato a reale e *positivo*, consideriamo la funzione

$$f(x) := \frac{1}{x(x+1)^a - x^{a+1}} \,,$$

e indichiamo con A la figura piana costituita dai punti (x, y) tali che $x \geq 1$ e $0 \leq y \leq f(x)$, e con V il solido ottenuto ruotando A attorno all'asse verticale di equazione $x = 1$.

a) Per $a = 2$, disegnare A e V e calcolare l'area di A.

b) Dire per quali a l'area di A è finita.

c) Dire per quali a il volume di V è finito.

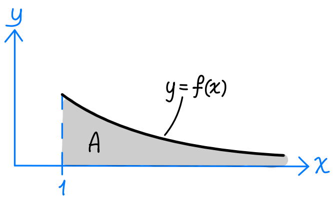
<u>SOLUZIONE</u>. a) Tenendo conto della definizione di A, come prima cosa studio la funzione

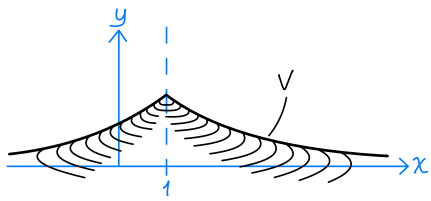
$$f(x) = \frac{1}{x(x+1)^2 - x^3} = \frac{1}{x(2x+1)}$$

limitatamente alla semiretta $x \geq 1$: osservo che $f(x)$ è ben definita e positiva per ogni $x \geq 1$, tende a 0 per $x \to +\infty$, e poiché la derivata

$$f'(x) = -\frac{4x+1}{(2x^2+x)^2}$$

è chiaramente negativa per $x \geq 1$, la funzione è sempre decrescente.
Sulla base di queste informazioni traccio i disegni riportati sotto (al solito, le proporzioni non sono rispettate).





L'area di A è data quindi dall'integrale improprio semplice

$$\text{area}(A) = \int_1^\infty f(x)\,dx \,. \tag{1}$$

Poiché

$$f(x) = \frac{1}{x(2x+1)} \sim \frac{1}{2x^2} \quad \text{per } x \to +\infty,$$

questo integrale improprio è finito. Per capire quanto vale devo trovare una primitiva di $f(x)$, e per farlo cerco una scomposizione di $f(x)$ della forma

$$f(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{2x+1} \,;$$

facendo i conti ottengo $A = 1$ e $B = -2$ e quindi

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{1}{x} - \frac{2}{2x+1}\,dx = \log x - \log(2x+1) + c = \log\Big(\frac{x}{2x+1}\Big) + c \,.$$

Pertanto

$$\begin{aligned}\text{area}(A) = \int_1^\infty f(x)\,dx &= \Big|\log\Big(\frac{x}{2x+1}\Big)\Big|_1^\infty \\ &= \lim_{x\to+\infty} \log\Big(\frac{x}{2x+1}\Big) - \log\Big(\frac{1}{3}\Big) \\ &= \log\Big(\frac{1}{2}\Big) - \log\Big(\frac{1}{3}\Big) = \log\Big(\frac{3}{2}\Big) \simeq 0{,}405\,.\end{aligned}$$

b) Dato $a > 0$ la funzione $f(x)$ è ben definita e strettamente positiva per ogni $x \geq 1$, e quindi l'area di A è data, di nuovo, dall'integrale improprio semplice in (1).
Per capire come si comporta questo integrale cerco la parte principale di $f(x)$ per $x \to +\infty$: ricordando che $(1+t)^a - 1 \sim at$ per $t \to 0$ ottengo

$$f(x) = \frac{1}{x(x+1)^a - x^{a+1}} = \frac{1}{x^{a+1}\big[\big(1+\frac{1}{x}\big)^a - 1\big]} \sim \frac{1}{ax^a} \quad \text{per } x \to +\infty.$$

Quindi

$$\text{area}(A) = \int_1^\infty f(x)\,dx \approx \int_1^\infty \frac{1}{x^a}\,dx$$

e in particolare l'area di A è finita se e solo se $a > 1$.

c) Voglio utilizzare la nota formula per il volume del solido ottenuto per rotazione attorno all'asse $x = 0$. Per farlo devo traslare A verso sinistra di 1, cioè devo applicare detta formula alla funzione $f(x+1)$:

$$\text{volume}(V) = \int_0^\infty 2\pi x\, f(x+1)\,dx = \int_1^\infty 2\pi(y-1)\, f(y)\,dy \approx \int_1^\infty \frac{dy}{y^{a-1}}\,,$$

e quindi il volume di V è finito se e solo se $a > 2$ (nel secondo passaggio ho usato il cambio di variabile $y = x+1$, e nel terzo ho usato che $f(y) \sim \frac{1}{ay^a}$ e $y - 1 \sim y$ per $y \to +\infty$).

$\boxed{3}$ Dato a reale e *positivo*, consideriamo la serie

$$S(a) := \sum_{n=4}^\infty \frac{(-1)^n n}{a^n + 1}\,.$$

a) Discutere il comportamento di questa serie al variare di a.

b) Calcolare $S(4)$ con errore inferiore a 10^{-4}.

<u>Soluzione</u>. a) Indico con a_n l'addendo n-esimo della serie $S(a)$, e con $S_N(a)$ la somma parziale N-esima, vale a dire

$$a_n := \frac{(-1)^n n}{a^n+1}\,, \quad S_N(a) := \sum_{n=4}^N a_n = \sum_{n=4}^N \frac{(-1)^n n}{a^n+1}\,.$$

Osservo che questi addendi hanno segno variabile (il numero $(-1)^n$ vale 1 quando n è pari e -1 quando n è dispari) e quindi non posso usare nessuno dei criteri che funzionano solo per le serie a segno costante, come ad esempio i criteri di confronto asintotico.

Osservo per cominciare che per $a < 1$ vale $a^n \to 0$ per $n \to +\infty$ e quindi

$$|a_n| = \frac{n}{a^n+1} \sim n\,,$$

mentre per $a = 1$ vale $a^n = 1$ per ogni n e quindi

$$|a_n| = \frac{n}{2}\,;$$

in entrami i casi a_n non tende a 0 per $n \to \infty$, e quindi la serie non può convergere ad un numero finito (ma non so specificare se diverge a $+\infty$, a $-\infty$, oppure non esiste).

Per capire il comportamento per $a > 1$ uso il criterio del rapporto: in questo caso $a^n \to +\infty$ per $n \to +\infty$, quindi $a^n + 1 \sim a^n$ e

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{n+1}{a^{n+1}+1} \cdot \frac{a^n+1}{n} \sim \frac{n}{a^{n+1}} \cdot \frac{a^n}{n} = \frac{1}{a}\,,$$

e siccome $\frac{1}{a} < 1$ la serie converge.

b) Fissato $a = 4$, considero la funzione $f(x) := x\,4^{-x}$ e osservo che

$$|a_n| = \frac{n}{4^n+1} \le \frac{n}{4^n} = f(n) \quad \text{per ogni } n \text{ intero;}$$

inoltre studiando il segno della derivata $f'(x) = (1 - x\,\log 4)\,4^{-x}$ trovo che $f(x)$ è decrescente per $x \ge 1$, e di conseguenza vale la seguente stima, vista a lezione:

$$\big|S(4) - S_N(4)\big| \le \int_N^\infty f(x)\,dx = \int_N^\infty x\,4^{-x}\,dx = \underbrace{\left(\frac{N}{\log 4} + \frac{1}{(\log 4)^2}\right)4^{-N}}_{e(N)}$$

(nell'ultimo passaggio ho integrato per parti).

Uso ora la calcolatrice per calcolare $e(N)$ a partire da $N = 5$, e scopro che $e(8) < 10^{-4}$. Quindi la somma parziale $S_8(4)$ approssima il valore della serie $S(4)$ con errore inferiore a 10^{-4}. Sempre usando la calcolatrice ottengo che

$$S_8(4) = \sum_{n=4}^{8} a_n = \frac{4}{4^4+1} - \frac{5}{4^5+1} + \frac{6}{4^6+1} - \frac{7}{4^7+1} + \frac{8}{4^8+1} = 0{,}011845 \pm 10^{-6}\,,$$

e quindi

$$S(4) = 0{,}011845 \pm 10^{-4}\,.$$

<u>OSSERVAZIONI</u>. È possibile dimostrare che per $a \le 1$ la serie $S(a)$ non solo non converge ad un numero finito, ma più precisamente non esiste. Si riesce infatti a far vedere che la successione delle somme parziali S_N con N pari diverge a $+\infty$, mentre la successione S_N con N dispari diverge a $-\infty$.

PRIMA PARTE (prima variante)

1. Determinare l'insieme di definizione della funzione $f(x) := \log\big(x - \sqrt{x+2}\big)$.
   SOLUZIONE. La funzione è definita per $x > 2$.

2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(1/x)}{\arctan x}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\log x}}{\log(\log x)}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^4\, e^x}{x^2 + \log(1-x^2)}$.

   SOLUZIONE. a) 0; b) $+\infty$; c) -2.

3. Dire in quali intervalli la funzione $f(x) := \exp(-2x^2 + 4x + 2)$ è concava.
   SOLUZIONE. $\dfrac{1}{2} \le x \le \dfrac{3}{2}$.

4. Usando il fatto che $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-t^2)\, dt = \sqrt{\pi}$, calcolare $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\big(-9(x+3)^2\big)\, dx$.

   SOLUZIONE. $\dfrac{\sqrt{\pi}}{3}$.

5. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\log\big(1 + \frac{1}{x^a}\big)}{x^a + x^{2a}}\, dx$ è finito.

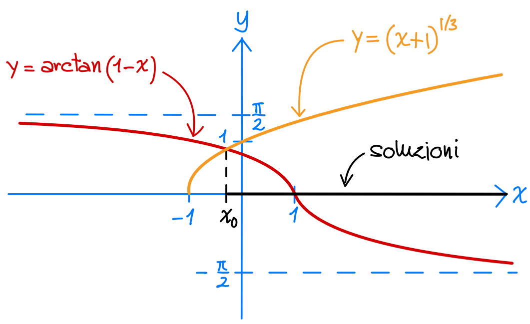
   SOLUZIONE. $a > \dfrac{1}{3}$.

6. Calcolare il valore della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n} - 1}{2^n}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

   SOLUZIONE. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}-1}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^2}{2}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{x^2}{2}} - \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2x^2-2}{2-x^2}$

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = \dfrac{2te^x}{1+t^2}$ che soddisfa $x(0) = 0$.
   SOLUZIONE. Equazione a variabili separabili: $x(t) = -\log\big(1 - \log(1+t^2)\big)$.

8. Risolvere graficamente la disequazione $\arctan(1-x) \le (x+1)^{1/3}$.
   SOLUZIONE.



SECONDA PARTE

1 Consideriamo la famiglia di funzioni $f(x) := x^4 - 15x^2 + ax + b$, con $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Trovare a, b in modo tale che il grafico della funzione $f(x)$ sia tangente nel punto $x = 1$ alla retta di equazione $y = -26\,x + 52$.

b) Disegnare la funzione trovata al punto a) ristretta all'intervallo $[0, \frac{3}{2}]$.

c) Considerare tutti i rettangoli R con assi paralleli agli assi coordinati, un vertice nell'origine, ed il vertice opposto sul grafico della funzione f trovata al punto a) ristretta all'intervallo I; tra questi rettangoli trovare quello di area massima.

SOLUZIONE. a) Dire che i grafici delle funzioni $f(x)$ e di $g(x) := -26\,x + 52$ sono tangenti per $x = 1$ equivale a dire che i grafici si intersecano in questo punto, cioè $f(1) = g(1)$, e che le rette tangenti hanno la stessa pendenza, cioè $f'(1) = g'(1)$. Svolgendo i calcoli la prima condizione diventa $a + b - 14 = 26$, vale a dire $a + b = 40$, e la seconda diventa $a - 26 = -26$, cioè $a = 0$. Pertanto la funzione cercata è quella corrispondente ai parametri $a = 0$ e $b = 40$, ovvero

$$f(x) = x^4 - 15\,x^2 + 40\,.$$

Da qui in poi f indica questa specifica funzione.

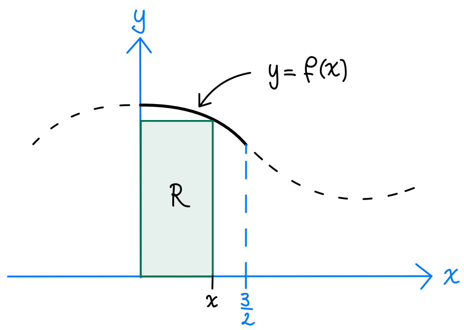
b) Indico con I l'intervallo $[0, \frac{3}{2}]$; la funzione f è definita su tutto I; la derivata

$$f'(x) = 4x^3 - 30\,x = 2x(x^2 - 15)$$

è negativa in I e quindi f è decrescente in questo intervallo, e la derivata seconda

$$f''(x) = 12\,x^2 - 30 = 6(2x^2 - 5)$$

è negativa in I e quindi f è concava. Usando queste informazioni traccio il grafico sotto (le proporzioni non sono rispettate).



c) Dato un rettangolo R come richiesto (in verde nella figura sopra), indico con x l'ascissa del vertice che sta sul grafico di f, e quindi la base di R è x mentre l'altezza è $f(x)$ (notare che x e $f(x)$ sono positivi), e pertanto l'area di R è

$$a(x) = x\,f(x) = x^5 - 15\,x^3 + 40\,x\,.$$

Si tratta ora di trovare il punto di massimo di $a(x)$ al variare di x nell'intervallo I. Per farlo confronto i valori di a negli estremi di I, cioè 0 e $\frac{3}{2}$, e nei punti di I dove si annulla la derivata

$$a'(x) = 5x^4 - 45\,x^2 + 40\,,$$

vale a dire $x = 1$ (per risolvere l'equazione $a'(x) = 0$ applico la sostituzione $t = x^2$ e ottengo un'equazione di secondo grado con soluzioni $t = 1$ e $t = 8$, e quindi $x = \pm 1$ e $x = \pm 2\sqrt{2}$; di queste soluzioni solo $x = 1$ appartiene a I). Siccome $a(0) = 0$, $a(1) = 36$ e $a(3/2) = 17 \pm 0{,}5$, il valore massimo di $a(x)$ per $x \in I$ vale 36 e viene raggiunto per $x = 1$.

2 a) Scrivere lo sviluppo di Taylor all'ordine 3 in 0 della funzione $\tan x$.

b) Per ogni $a > 0$ trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) := \tan(x^a) - \tan(\sin x)$.[1]

SOLUZIONE. a) Calcolo lo sviluppo di Taylor cercato direttamente a partire dalla definizione:

$$\begin{aligned}(\tan x)' &= 1 + \tan^2 x\,,\\ (\tan x)'' &= (1+\tan^2 x)' = 2\tan x\,(\tan x)' = 2\tan x + 2\tan^3 x\,,\\ (\tan x)''' &= (2\tan x + 2\tan^3 x)' = (2+6\tan^2 x)\,(\tan x)' = (2+6\tan^2 x)\,(1+\tan^2 x)\,,\end{aligned}$$

e quindi per $x = 0$ vale che $(\tan x)' = 1$, $(\tan x)'' = 0$ e $(\tan x)''' = 2$; ne segue che lo sviluppo di Taylor di $\tan x$ all'ordine 3 in 0 è

$$\tan x = x + \tfrac{1}{3}x^3 + O(x^4)\,. \tag{1}$$

(Siccome la funzione $\tan x$ è dispari, potrei sostituire il resto $O(x^4)$ con $O(x^5)$, ma questo non dà particolari vantaggi nel seguito.)

b) Per x che tende a 0 vale che $\tan x \sim x$, quindi

$$\tan(x^a) \sim x^a\,, \quad \tan(\sin x) \sim \sin x \sim x\,,$$

e quindi

$$\text{p.p.}(f(x)) = \text{p.p.}\big(\tan(x^a) - \tan(\sin x)\big) = \begin{cases} x^a & \text{se } a < 1,\\ -x & \text{se } a > 1.\end{cases}$$

Invece per $a = 1$ le parti principali dei due addendi che formano f si cancellano, e ho bisogno di sviluppi più precisi. Usando lo sviluppo (1) con $\sin x$ al posto di x e ottengo

$$\tan(\sin x) = \sin x + \tfrac{1}{3}(\sin x)^3 + O((\sin x)^4)\,,$$

usando poi gli sviluppi $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + O(x^5)$, $\sin x = x + O(x^3)$ e $\sin x \sim x$ ottengo

$$\begin{aligned}\tan(\sin x) &= \big(x - \tfrac{1}{6}x^3 + O(x^5)\big) + \tfrac{1}{3}\big(x + O(x^3)\big)^3 + O(x^4)\\ &= x - \tfrac{1}{6}x^3 + O(x^5) + \tfrac{1}{3}\big(x^3 + O(x^5)\big) + O(x^4) = x + \tfrac{1}{6}x^3 + O(x^4)\end{aligned}$$

(nel secondo passaggio ho sviluppato $(x + O(x^3))^3$ tramite la formula del binomio di Newton). Grazie a (1) e a quest'ultima formula ottengo infine che, per $a = 1$,

$$f(x) = \tan x - \tan(\sin x) = \tfrac{1}{6}x^3 + O(x^4)\,,$$

e quindi $\text{p.p.}(f(x)) = \frac{1}{6}x^3$.

OSSERVAZIONI. Lo sviluppo di $\tan x$ (punto a)) può essere ottenuto anche partendo dagli sviluppi (noti) di $\sin x$, $\cos x$ e $(1+t)^{-1}$:

$$(\cos x)^{-1} = \big(1 \underbrace{-\tfrac{1}{2}x^2 + O(x^4)}_{t}\big)^{-1} = 1 - t + O(t^2) = 1 + \tfrac{1}{2}x^2 + O(x^4)\,,$$

e quindi

$$\tan x = \sin x\,(\cos x)^{-1} = \big(x - \tfrac{1}{6}x^3 + O(x^5)\big)\big(1 + \tfrac{1}{2}x^2 + O(x^4)\big) = x + \tfrac{1}{3}x^3 + O(x^5)\,.$$

3 Sia S un quarto di un cerchio di raggio 1, sia R il raggio che divide S in due, e sia R' la retta ortogonale a R che passa per il centro del cerchio.

a) Disegnare S, R ed R'.

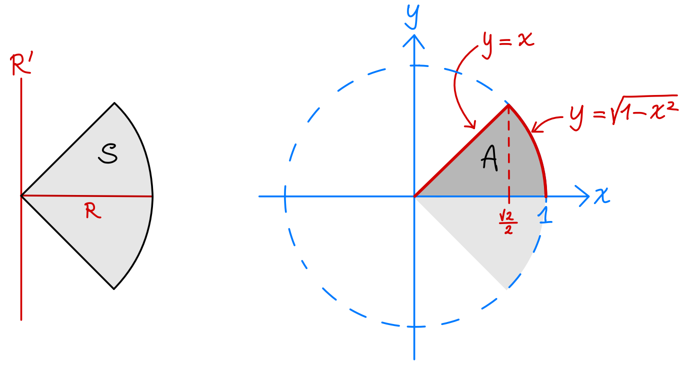
b) Calcolare il volume del solido V ottenuto facendo ruotare S attorno al raggio R.

c) Calcolare il volume del solido V' ottenuto facendo ruotare S attorno alla retta R'.

SOLUZIONE. a) S, R ed R' sono disegnati sotto a sinistra; a destra li ridisegno facendo coincidere il centro del cerchio con l'origine degli assi, R' con l'asse delle y, e R con il segmento $[0, 1]$

[1] La funzione $f(x)$ è definita per $x \geq 0$.

sull'asse delle x.



b) Come si vede dalla figura sopra a destra, il solido V può essere ottenuto ruotando attorno all'asse delle x la figura piana A delimitata dall'asse delle x e dal grafico della funzione f data da

$$f(x) := \begin{cases} x & \text{per } 0 \le x \le \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \sqrt{1-x^2} & \text{per } \frac{\sqrt{2}}{2} < x \le 1. \end{cases}$$

Usando la prima formula sul volume dei solidi di rotazione vista a lezione ottengo

$$\begin{aligned} \text{volume}(V) &= \pi \int_0^1 \pi(f(x))^2\,dx \\ &= \pi \int_0^{\sqrt{2}/2} x^2\,dx + \pi \int_{\sqrt{2}/2}^1 (1-x^2)\,dx \\ &= \pi \left| \frac{x^3}{3} \right|_0^{\sqrt{2}/2} + \pi \left| x - \frac{x^3}{3} \right|_{\sqrt{2}/2}^1 = \frac{(2-\sqrt{2})\pi}{3}\,. \end{aligned}$$

c) Il volume del solido V' è il doppio di quello del solido ottenuto facendo ruotare A attorno all'asse delle y, che a sua volta può essere calcolato tramite la seconda formula sul volume dei solidi di rotazione:

$$\begin{aligned} \text{volume}(V') &= 4\pi \int_0^1 x\,f(x)\,dx \\ &= 4\pi \int_0^{\sqrt{2}/2} x^2\,dx + 4\pi \int_{\sqrt{2}/2}^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx \\ &= 4\pi \left| \frac{x^3}{3} \right|_0^{\sqrt{2}/2} + 4\pi \left| -\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2} \right|_{\sqrt{2}/2}^1 = \frac{2\sqrt{2}\,\pi}{3}\,. \end{aligned}$$

(Nel terzo passaggio ho trovato la primitiva di $x\sqrt{1-x^2}$ usando il cambio di variabile $t = 1-x^2$.)

<u>OSSERVAZIONI</u>. Il volume di V' può essere calcolato a partire da quello di V osservando che V' è uguale ad una sfera S di raggio 1 a cui sono stati tolti due solidi uguali a V, e quindi

$$\text{volume}(V') = \text{volume}(S) - 2\,\text{volume}(V) = \frac{4\pi}{3} - 2\,\frac{(2-\sqrt{2})\pi}{3} = \frac{2\sqrt{2}\,\pi}{3}\,.$$

Un approccio alternativo ai punti b) e c) è questo: si fa coincidere la retta R' con l'asse delle x, il raggio R con il segmento $[0,1]$ sull'asse delle y, e si considera la figura piana E delimitata a destra dall'asse delle x, sopra dal grafico di $f(x) := \sqrt{1-x^2}$, e sotto dal grafico di $g(x) = x$. In questo caso V coincide con il solido ottenuto ruotando E attorno all'asse delle y, e quindi

$$\text{volume}(V) = \int_0^{\sqrt{2}/2} 2\pi x\,f(x)\,dx - \int_0^{\sqrt{2}/2} 2\pi x\,g(x)\,dx = \cdots\,, \tag{2}$$

mentre V' è il doppio del solido ottenuto ruotando E attorno all'asse delle x, e quindi

$$\text{volume}(V') = 2\left[\int_0^{\sqrt{2}/2} \pi(f(x))^2\,dx - \int_0^{\sqrt{2}/2} \pi(g(x))^2\,dx \right] = \cdots \tag{3}$$

PRIMA PARTE (prima variante)

1. Consideriamo la funzione $f(x) := \dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}$. Trovare la formula della funzione inversa $f^{-1}(y)$.

   SOLUZIONE. $f^{-1}(y) = \log\left(\dfrac{y+1}{y-1}\right)$.

2. Trovare i *valori* massimi e minimi della funzione $f(x) := \dfrac{x^2 - 28}{(x+1)^4}$, e se non esistono gli estremi inferiori e superiori dei valori.

   SOLUZIONE. Il valore massimo è $f(-7) = \frac{21}{6^4} \simeq 0{,}016$; il valore minimo non esiste e l'estremo inferiore è $-\infty$.

3. Mettere le seguenti funzioni nell'ordine corretto rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$:
$$\underbrace{\sqrt{\frac{x^7}{x^2+1}}}_{a}\,, \quad \underbrace{\frac{2^x+1}{8^x+1}}_{b}\,, \quad \underbrace{\frac{1}{6^x+3}}_{c}\,, \quad \underbrace{x^2\log(1+e^x)}_{d}\,.$$

   SOLUZIONE. $c \ll b \ll a \ll d$.

4. Trovare il polinomio di Taylor di ordine 6 (in 0) della funzione $f(x) := \dfrac{1+x^3}{\sqrt{1+4x^3}}$.

   SOLUZIONE. $P_6(x) = 1 - x^3 + 4x^6$.

5. Calcolare velocità e accelerazione di un punto con legge oraria $P = \big(\exp(t^2),\, t^3+1\big)$.

   SOLUZIONE. $\vec{v} = \big(2t\exp(t^2),\, 3t^2\big)$; $\vec{a} = \big((2+4t^2)\exp(t^2),\, 6t\big)$.

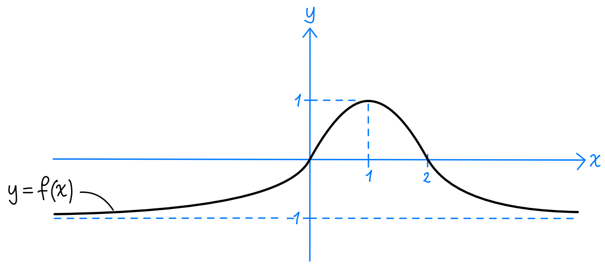
6. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{-n}}{n^{2a}(1+n)}$ converge a un numero finito.

   SOLUZIONE. La serie si comporta come $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n^{2a+1}}$ e converge per ogni $a \in \mathbb{R}$.

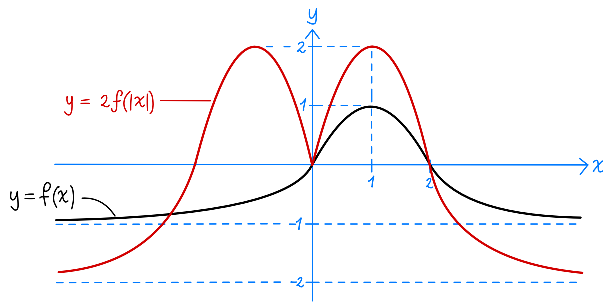
7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} + 2tx = \exp(t - t^2)$.

   SOLUZIONE. Equazione differenziale lineare del primo ordine: $x(t) = e^{-t^2}(e^t + c)$ con $c \in \mathbb{R}$.

8. Nella figura sotto è disegnato il grafico della funzione $f(x)$. Aggiungere il grafico di $2\,f(|x|)$.



   SOLUZIONE.



SECONDA PARTE

1 Per ogni $a > 0$, trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$a\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 8t + e^{-2t}\,. \tag{*}$$

[*Fare attenzione al caso* $a = 1$.]

SOLUZIONE. L'equazione (*) è una equazione differenziale del secondo ordine lineare a coefficienti costanti, e la soluzione generale di (*) si scrive come

$$x = x_{\rm om} + x_1 + x_2$$

dove

(i) $x_{\rm om}$ è la soluzione generale dell'equazione omogenea $a\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 0$;
(ii) x_1 è una soluzione particolare dell'equazione non omogenea $a\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 8t$;
(iii) x_2 è una soluzione particolare dell'equazione non omogenea $a\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = e^{-2t}$.

Passo 1: calcolo di x_{om}. L'equazione caratteristica dell'equazione omogenea in (i) è

$$a\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0\,, \tag{1}$$

e le soluzioni sono

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{1-a}}{a}\,.$$

Sulla base del segno del discriminante distinguo tre casi:

- se $0 < a < 1$ le soluzioni λ_1, λ_2 sono reali e positive, e quindi
$$x_{\rm om}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R};$$
- se $a = 1$ ho che $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$, e quindi
$$x_{\rm om}(t) = (c_1 + c_2 t)\, e^{-2t} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R};$$
- se $a > 1$ ho che $\lambda_{1,2} = -\frac{2}{a} \pm \omega i$ con $\omega := \frac{2}{a}\sqrt{a-1}$, e quindi
$$x_{\rm om}(t) = e^{-2t/a}\big(c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t)\big) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Passo 2: calcolo di x_1. Posso sempre trovare una soluzione particolare dell'equazione in (ii) della forma $x_1 = bt + c$. Sostituendo questa espressione nell'equazione ottengo che quest'ultima è soddisfatta se $4b = 8$ e $4b + 4c = 0$, cioè $b = 2$ e $c = -2$, e quindi

$$x_1(t) = 2t - 2\,.$$

Passo 3: calcolo di x_2. Per trovare x_2 devo prima capire per quali a il coefficiente -2 nel termine noto e^{-2t} risolve l'equazione caratteristica (1): sostituendo -2 al posto di λ, la (1) diventa $4a - 4 = 0$, ovvero $a = 1$. Distinguo quindi due casi:

- se $a \neq 1$ posso trovare una soluzione particolare dell'equazione in (iii) della forma $x_2 = ce^{-2t}$; Sostituendo questa espressione nell'equazione ottengo che quest'ultima è soddisfatta se $c(4a - 4) = 1$, e quindi
$$x_2(t) = \tfrac{1}{4a-4} e^{-2t}\,.$$
- se $a = 1$ il coefficiente -2 coincide con *entrambe* le soluzioni dell'equazione caratteristica (1), e quindi posso trovare una soluzione particolare dell'equazione in (iii) della forma $x_2 = ct^2 e^{-2t}$; sostituendo questa espressione nell'equazione ottengo che quest'ultima è soddisfatta se $2c = 1$, e quindi
$$x_2(t) = \tfrac{1}{2} t^2 e^{-2t}\,.$$

Riassumendo, per $0 < a < 1$ la soluzione generale di (*) è

$$x(t) = \begin{cases} c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + 2t - 2 + \frac{1}{4a-4} e^{-2t} & \text{per } 0 < a < 1, \\ \big(c_1 + c_2 t + \frac{1}{2} t^2\big)\, e^{-2t} + 2t - 2 & \text{per } a = 1, \\ e^{-2t/a}\big(c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t)\big) + 2t - 2 + \frac{1}{4a-4} e^{-2t} & \text{per } a > 1. \end{cases}$$

2 Una ditta deve organizzare la spedizione di 100 scatoloni uguali ad un certo destinatario. Per farlo si serve di due compagnie di spedizione: la compagnia A offre furgoni che possono trasportare 5 scatole per volta, ad un prezzo di 200 euro a furgone, mentre la compagnia B offre furgoni che possono trasportare 10 scatole per volta ad un prezzo base di 200 euro a furgone, a cui però va aggiunto un sovrapprezzo complessivo pari a $15\,n^2$ euro, dove n è il numero totale di furgoni affittati.
Quanti furgoni conviene affittare dalla compagnia A e quanti dalla compagnia B?

SOLUZIONE. Supponiamo di affittare x furgoni dalla compagnia A e y da B. Dovendo trasportare 100 scatole, deve valere che

$$5x + 10\,y = 100\,,$$

vale a dire

$$x = 20 - 2y\,. \tag{2}$$

Osservo che sia x che y devono essere interi e maggiori o uguali a zero. Osservo poi che, per via della (2), se y è intero lo è automaticamente anche x, e la condizione $x \geq 0$ equivale a $y \leq 10$.
Sempre tenendo conto della (2), il costo complessivo (in euro) della spedizione così organizzata è uguale a

$$\begin{aligned} c = 200\,x + 200\,y + 15\,y^2 &= 200\,(20 - 2y) + 200\,y + 15\,y^2 \\ &= 4.000 - 200\,y + 15\,y^2\,. \end{aligned}$$

Devo quindi cercare il minimo di $c(y) = 4.000 - 200\,y + 15\,y^2$ tra tutti i numeri *interi* y compresi tra 0 e 10.
Studiando il segno della derivata $c'(y) = -200 + 30\,y$ ottengo che $c(y)$ decresce per $0 \leq y \leq y_0$ con $y_0 := \frac{20}{3} \simeq 6{,}67$, e cresce per $y_0 \leq y \leq 10$. Quindi il valore minimo di $c(y)$ viene raggiunto per $y = 6$ oppure $y = 7$. Siccome $c(6) = 3.340$ e $c(7) = 3.335$, il costo è minimo per $y = 7$, e in questo caso $x = 6$.
In conclusione conviene affittare 6 furgoni dalla compagnia A e 7 dalla compagnia B.

3 a) Determinare l'insieme di definizione della funzione $f(x) := x^{\log x} - 1$, e disegnarne il grafico.
b) Dire dov'è improprio l'integrale

$$I := \int_1^{+\infty} \frac{dx}{f(x)}$$

e studiarne il comportamento.

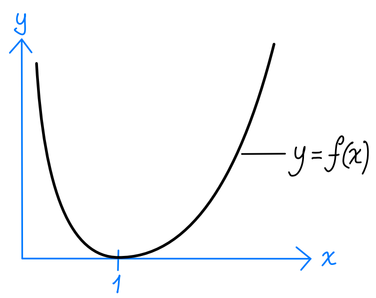
SOLUZIONE. a) La funzione $f(x)$ è definita per ogni $x > 0$. Riscrivendola come

$$f(x) = (e^{\log x})^{\log x} - 1 = e^{\log^2 x} - 1$$

ottengo che $f(x) \geq 0$ se e solo se $\log^2 x \geq 0$, cioè sempre, e $f(x) = 0$ se e solo se $\log x = 0$, cioè $x = 1$; inoltre $f(x) \to +\infty$ per $x \to 0^+$ e per $x \to +\infty$. Studiando poi il segno della derivata

$$f'(x) = \big(e^{\log^2 x} - 1\big)' = \frac{2\log x}{x} e^{\log^2 x}$$

ottengo che $f'(x)$ decresce per $0 < x \leq 1$ e cresce per $x \geq 1$.
Sulla base di quanto appena detto traccio il grafico sotto (le proporzioni non sono rispettate).



b) La funzione integranda $1/f(x)$ è ben definita e continua per $x \neq 1$ ma non è definita per

$x = 1$, e quindi l'integrale I è improprio in 1 e in $+\infty$. Inoltre, la funzione integranda è positiva e quindi I esiste e vale un numero finito (positivo) oppure $+\infty$.
Studio il comportamento di I spezzandolo come somma di due integrali impropri semplici:

$$I = \underbrace{\int_1^2 \frac{dx}{f(x)}}_{I_1} + \underbrace{\int_2^{+\infty} \frac{dx}{f(x)}}_{I_2}$$

Comincio con lo studio dell'integrale I_1: siccome questo integrale è improprio in 1, come prima cosa uso il cambio di variabile $x = 1 + t$ per passare ad un integrale improprio in 0:[1]

$$I_1 = \int_0^1 \frac{dt}{f(1+t)}\,.$$

Osservo ora che, per t che tende a 0,

$$f(1+t) = \exp\big((\log(1+t))^2\big) - 1 \sim (\log(1+t))^2 \sim t^2$$

(nel secondo passaggio ho usato che $e^x - 1 \sim x$ per $x \to 0$ con $x := (\log(1+t))^2$, mentre nel terzo passaggio ho usato che $\log(1+t) \sim t$ per $t \to 0$).
Pertanto

$$I_1 = \int_0^1 \frac{dt}{f(1+t)} \approx \int_0^1 \frac{dt}{t^2} = +\infty\,.$$

Siccome $I_1 = +\infty$ e l'integrale I_2 esiste e non è $-\infty$, posso già concludere che $I = +\infty$.

<u>OSSERVAZIONI</u>. Anche se non è necessario farlo, si può dimostrare che I_2 è finito. Usando infatti che $\log x \geq 2$ per x sufficientemente grande, ottengo che $f(x) = x^x - 1 \geq x^2 - 1$ e quindi

$$I_2 \leq \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1} \approx \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2} < +\infty\,.$$

[1] Lo faccio perché ho più strumenti per studiare gli integrali impropri in 0.

Prima parte

1. Trovare le soluzioni della disequazione $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \geq -1$ nell'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
   Soluzione. Le soluzioni sono $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq -\frac{\pi}{4}$ e $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$.

2. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := (x + a)\exp(x^2)$ è crescente su tutto $\mathbb{R}$.
   Soluzione. La derivata $f'(x) = (2x^2 + 2ax + 1)\exp(x^2)$ è positiva o nulla per ogni $x \in \mathbb{R}$ se il discriminante di $2x^2 + 2ax + 1$ è negativo o nullo, vale a dire se $-\sqrt{2} \leq a \leq \sqrt{2}$.

3. Scrivere lo sviluppo di Taylor di ordine 3 (in zero) della funzione $f(x) := e^{-2x}\log(1 + x)$.
   Soluzione. $f(x) = x - \frac{5}{2}x^2 + \frac{10}{3}x^3 + O(x^4)$.

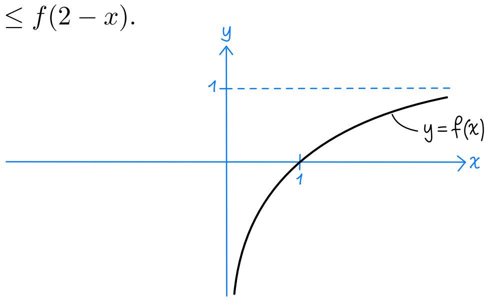
4. Calcolare il valore dell'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\,\exp(1 - 2x^2)\,dx$.
   Soluzione. Usando il cambio di variabile $y = 1 - 2x^2$ ottengo
   $$\int_0^{+\infty} x\,\exp(1 - 2x^2)\,dx = \int_1^{-\infty} e^y\left(-\tfrac{1}{4}\right)dy = \left|\,\frac{e^y}{4}\,\right|_{-\infty}^{1} = \frac{e}{4}\,.$$

5. Dire per quali $a > 0$ è finito l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(1 - x^2)^{2a}}$.
   Soluzione. L'integrale è improprio in 1; usando il cambio di variabile $y = 1 - x$ ottengo
   $$\int_0^1 \frac{dx}{(1 - x^2)^{2a}} = \int_0^1 \frac{dy}{(2y - y^2)^{2a}} \approx \int_0^1 \frac{dy}{y^{2a}} < +\infty \quad \text{per } 0 < a < \tfrac{1}{2}.$$

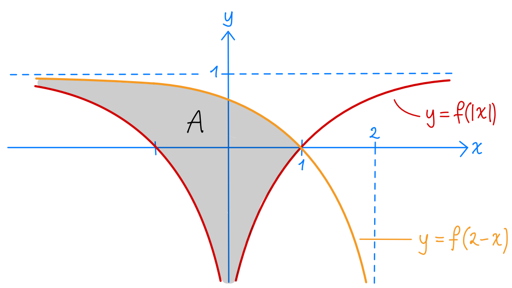
6. Calcolare il valore della serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{2^n}$ per gli x per cui converge.
   Soluzione. Mi riconduco alla serie geometrica:
   $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{2^n} = \frac{x^3}{4}\left(1 + \frac{x}{2} + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^3 + \cdots\right) = \frac{x^3}{4}\cdot\frac{1}{1 - x/2} = \frac{x^3}{4 - 2x}\,.$$

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = xe^t$ tale che $x(0) = -1$.
   Soluzione. Equazione lineare del primo ordine: la soluzione generale è $x(t) = c\exp(e^t)$ con $c \in \mathbb{R}$, e quindi $x = -\frac{1}{e}\exp(e^t)$.

8. Nella figura sotto è riportato il grafico della funzione $f(x)$. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $f(|x|) \leq y \leq f(2 - x)$.



   Soluzione.



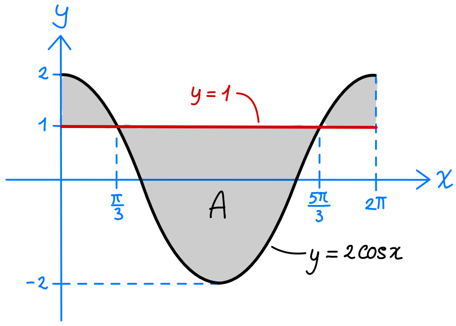
SECONDA PARTE

1 Sia A l'insieme dei punti (x, y) con $0 \leq x \leq 2\pi$ compresi tra la retta di equazione $y = 1$ e il grafico della funzione $2\cos x$, e sia V il solido ottenuto ruotando A attorno alla retta $y = 1$.

a) Disegnare l'insieme A e calcolarne l'area.

b) Disegnare l'insieme V e calcolarne il volume.

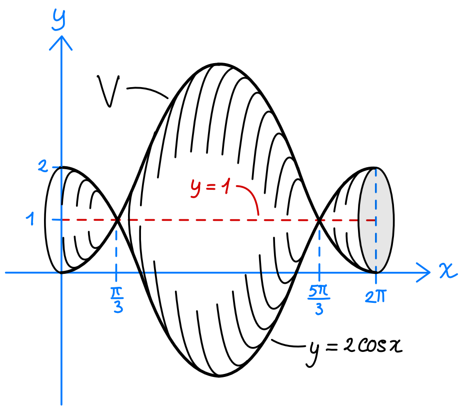
SOLUZIONE. a) L'insieme A è disegnato nella figura sotto.



Osservo che $2\cos x \leq 1$ per $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{5\pi}{3}$, mentre $2\cos x \geq 1$ per $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ e $\frac{5\pi}{3} \leq x \leq 2\pi$. Pertanto l'area di A è data da

$$\begin{aligned}\text{area}(A) &= \int_0^{\pi/3} 2\cos x - 1\,dx + \int_{\pi/3}^{5\pi/3} 1 - 2\cos x\,dx + \int_{5\pi/3}^{2\pi} 2\cos x - 1\,dx \\ &= \Big|2\sin x - x\Big|_0^{\pi/3} + \Big|x - 2\sin x\Big|_{\pi/3}^{5\pi/3} + \Big|2\sin x - x\Big|_{5\pi/3}^{2\pi} = 4\sqrt{3} + \frac{2\pi}{3}\,.\end{aligned}$$

b) L'insieme V è disegnato nella figura sotto.



Indico con A' l'insieme ottenuto spostando A verso il basso di 1 e con V' il solido ottenuto ruotando A' attorno all'asse delle x. Chiaramente il volume di V è uguale a quello di V', e quest'ultimo può essere calcolato tramite la formula vista a lezione partendo dal fatto che A' è delimitato dal grafico della funzione $2\cos x - 1$ e l'asse delle x:

$$\begin{aligned}\text{volume}(V) &= \text{volume}(V') \\ &= \pi \int_0^{2\pi} (2\cos x - 1)^2\,dx \\ &= \pi \int_0^{2\pi} 4\cos^2 x - 4\cos x + 1\,dx \\ &= \pi \int_0^{2\pi} 2\cos(2x) - 4\cos x + 3\,dx = \pi \Big|\sin(2x) - 4\sin x + 3x\Big|_0^{2\pi} = 6\pi^2\end{aligned}$$

(nel terzo passaggio ho usato l'identità $\cos^2 x = \frac{1}{2}(\cos(2x) + 1)$).

2 a) Dire se è vero che $x^4 + 8 \geq \frac{1}{4}(x+1)^4$ per ogni $x \geq 0$.

b) Trovare i numeri $m > 0$ per cui vale che $x^4 + 8 \geq m(x+1)^4$ per ogni $x \geq 0$.

c) Trovare i numeri $M > 0$ per cui vale che $x^4 + 8 \leq M(x+1)^4$ per ogni $x \geq 0$.

Soluzione. Risolvo i punti b) e c) insieme, mentre la risposta al punto a) segue da quella al punto b).

Dividendo le diseguaglianze in b) e c) per $(x+1)^4$, queste domande possono essere riformulate come segue: per quali costanti positive m e M vale che

$$m \leq \frac{x^4+8}{(x+1)^4} \leq M \quad \text{per ogni } x \geq 0?$$

Chiaramente la risposta è

$$m \leq \min_{x\geq 0} f(x)\,, \quad M \geq \max_{x \geq 0} f(x)\,, \quad \text{dove } f(x) := \frac{x^4+8}{(x+1)^4}\,,$$

(il minimo e il massimo, se non esistono, vanno sostituiti rispettivamente con l'estremo inferiore e l'estremo superiore dei valori).

Cerco i valori minimo e massimo di $f(x)$ relativamente alla semiretta $x \geq 0$ seguendo la solita procedura vista a lezione. Per prima cosa cerco i punti $x \geq 0$ in cui si annulla la derivata

$$f'(x) = \frac{4(x^3-8)}{(x+1)^5}\,,$$

e ottengo $x = 2$. Quindi confronto i valori di f in $x = 2$ e negli estremi della semiretta $x \geq 0$, vale a dire 0 e $+\infty$:

$$f(0) = 8\,, \quad f(2) = \frac{8}{27}\,, \quad f(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4+8}{(x+1)^4} = 1\,,$$

ed ottengo che

$$\min_{x\geq 0} f(x) = f(2) = \tfrac{8}{27}\,, \quad \max_{x\geq 0} f(x) = f(0) = 8\,.$$

Dunque i valori cercati di m e M sono quelli per cui

$$m \leq \frac{8}{27}\,, \quad M \geq 8\,;$$

in particolare la risposta al punto a) è affermativa perché $\frac{1}{4} < \frac{8}{27}$.

3 Consideriamo $f(x) := x^2 e^x$. Dire quali punti P del grafico di f sono "visibili direttamente dall'origine O", cioè il segmento che congiunge P e O interseca il grafico di f solo negli estremi.

Soluzione. Dato $a \in \mathbb{R}$ indico con P_a il punto del grafico di f di ascissa a, cioè $P_a := (a, f(a))$. Considero ora una generica retta passante per l'origine: questa retta ha equazione $y = mx$ dove m è la pendenza, e osservo che P_a appartiene a questa retta se e solo se a risolve l'equazione

$$m = \frac{f(x)}{x} = xe^x\,. \tag{1}$$

Ma allora il punto P_a è visibile dall'origine se *non esiste* alcun a' strettamente compreso tra 0 e a tale che $P_{a'}$ appartiene alla stessa retta, cioè a' risolve l'equazione (1).

Per capire quali punti P_a sono visibili dall'origine devo quindi studiare le soluzioni dell'equazione (1) al variare di $m \in \mathbb{R}$, e per farlo disegno il grafico della funzione

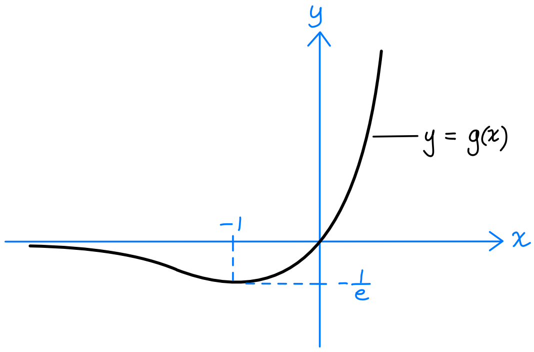
$$g(x) := xe^x\,.$$

Osservo che $g(x)$ è positiva per $x \geq 0$ e negativa altrimenti, e $g(x)$ tende a 0 per $x \to -\infty$, e a $+\infty$ per $x \to -\infty$. Studiando inoltre il segno della derivata

$$g'(x) = (x+1)e^x$$

ottengo che g decresce per $x \leq -1$ e cresce per $x \geq 1$, ed in particolare $x = -1$ è il punto di minimo assoluto, e il valore minimo è $g(-1) = -\frac{1}{e}$.

Sulla base di queste informazioni disegno il grafico riportato sotto (le proporzioni non sono rispettate):



Partendo da questo grafico ottengo che

- per $m \geq 0$ l'equazione (1), cioè $g(x) = m$, ammette un'unica soluzione e questa soluzione è positiva, e quindi il punto del grafico di f corrispondente è visibile dall'origine;
- per $-\frac{1}{e} < m < 0$ l'equazione (1) ammette due soluzioni, una minore di -1 ed una compresa tra -1 e 0; quindi il punto corrispondente alla prima soluzione non è visibile dall'origine, mentre quello corrispondente alla seconda lo è;
- per $m = -\frac{1}{e}$ l'equazione (1) ammette un'unica soluzione, e il punto corrispondente è visibile dall'origine;
- per $m < -\frac{1}{e}$ l'equazione (1) non ammette soluzioni.

Riassumendo, i punti P_a con $a \geq -1$ sono visibili dall'origine, mentre i punti P_a con $a < -1$ non lo sono.

Prima parte

1. Scrivere le coordinate polari dei seguenti punti del piano (espressi in coordinate cartesiane) scegliendo l'angolo α in $(-\pi, \pi]$: $P_1 = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$; $P_2 = (5, -5\sqrt{3})$; $P_3 = (0, -2)$.
Soluzione. $P_1 :\ r = 2,\ \alpha = \frac{3\pi}{4}$; $P_2 :\ r = 10,\ \alpha = -\frac{\pi}{3}$; $P_3 :\ r = 2,\ \alpha = -\frac{\pi}{2}$.

2. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) := \log(1/x)$ nel punto di ascissa $x = 1/\sqrt[3]{e}$.
Soluzione. $y = -\sqrt[3]{e}\, x + \frac{4}{3}$.

3. Dire per quali $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione
$$f(x) := \begin{cases} ax^2 + b & \text{per } x < 0 \\ \exp(x^2) & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$$
è continua e derivabile.
Soluzione. Le funzioni $ax^2 + b$ e $\exp(x^2)$ devono coincidere per $x = 0$, e così pure le derivate $2ax$ e $2x \exp(x^2)$: la prima equazione vale se $b = 1$, la seconda vale sempre. Quindi deve essere $b = 1$, a qualunque.

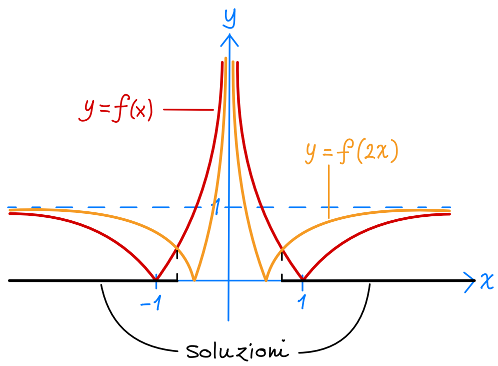
4. Scrivere la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) := x + \log(1 - x + x^2)$.
Soluzione. Usando lo sviluppo $\log(1 + y) = y - \frac{1}{2}y^2 + O(y^3)$ con $y = -x + x^2$ ottengo
$$f(x) = x + (-x + x^2) - \tfrac{1}{2}(-x + x^2)^2 + O(x^3) = \tfrac{1}{2}x^2 + O(x^3) \sim \tfrac{1}{2}x^2 .$$

5. Calcolare $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9 - 3x}}$.
Soluzione. Utilizzando il cambio di variabile $y = 9 - 3x$ ottengo
$$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9 - 3x}} = \frac{1}{3} \int_0^9 y^{-1/2} dy = \frac{1}{3} \bigg| 2y^{1/2} \bigg|_0^9 = 2 .$$

6. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^{-n} + n^3}{n^{2a}(1 + n)}$ converge ad un numero finito.
Soluzione. La serie si comporta come $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2a-2}}$ e quindi deve essere $2a - 2 > 1$, cioè $a > \frac{3}{2}$.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = x^3 \sin t$ tale che $x(0) = 1$.
Soluzione. Equazione a variabili separabili: $-\frac{1}{2x^2} = -\cos t + c$ con $c = \frac{1}{2}$, quindi
$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\cos t - 1}} .$$

8. Sia $f(x) := \left| \dfrac{1}{x^2} - 1 \right|$. Risolvere graficamente la disequazione $f(x) \leq f(2x)$.
Soluzione.



SECONDA PARTE

1 Dato $a > 0$ consideriamo l'equazione differenziale

$$\ddot{x} - 2a\dot{x} + 4x = 8t\,. \tag{*}$$

a) Trovare la soluzione generale di (*).

b) Per quali a esiste almeno una soluzione x di (*) tale che $x(t) \gg e^{4t}$ per $t \to +\infty$?

SOLUZIONE. a) Ricordo che la soluzione generale di (*) è data da

$$x(t) = x_{\text{om}}(t) + \tilde{x}(t)$$

dove x_{om} è la soluzione generale dell'equazione omogenea associata alla (*) e $\tilde{x}$ è una soluzione particolare di (*).

Calcolo di x_{om}. Le soluzioni dell'equazione caratteristica $\lambda^2 - 2a\lambda + 4 = 0$ sono

$$\lambda_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2 - 4}$$

ed in particolare devo considerare i seguenti tre casi:

(i) se $a > 2$ allora λ_1 e λ_2 sono reali e distinte, e quindi

$$x_{\text{om}}(t) = c_1\, e^{\lambda_1 t} + c_2\, e^{\lambda_2 t} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(ii) se $a = 2$ allora $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ e quindi

$$x_{\text{om}}(t) = e^{2t}(c_1 + c_2 t) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(iii) se $0 < a < 2$ allora $\lambda_{1,2} = a \pm \omega i$ con $\omega := \sqrt{4 - a^2}$, e quindi

$$x_{\text{om}}(t) = e^{at}\big(c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)\big) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Calcolo di $\tilde{x}$. Cerco $\tilde{x}$ tra le funzioni del tipo $\tilde{x}(t) = b_1 t + b_2$ con $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. Sostituendo questa espressione nell'equazione (*) ottengo l'identità

$$4b_1 t + 4b_2 - 2ab_1 = 8t\,,$$

che è soddisfatta per ogni t se e solo se $4b_1 = 8$ e $4b_2 - 2ab_1 = 0$, vale a dire $b_1 = 2$ e $b_2 = a$. Pertanto la soluzione particolare cercata è

$$\tilde{x}(t) = 2t + a\,.$$

b) Osservo che la soluzione particolare $\tilde{x} = 2t + a$ soddisfa $\tilde{x}(t) \ll e^{4t}$ per $t \to +\infty$. Pertanto esiste una soluzione di (*) che soddisfa la proprietà che $x(t) \gg e^{4t}$ se e solo esiste una soluzione dell'equazione omogenea con questa proprietà.

Le formule per x_{om} nei casi (i) e (ii) mostrano che per $a \leq 2$ si ha $x_{\text{om}}(t) = o(e^{4t})$ per ogni possibile scelta dei coefficienti c_1, c_2, e quindi per questi valori di a non esiste alcuna soluzione di (*) che si comporta come richiesto.

Resta da vedere cosa succede per $a > 2$. In questo la formula per x_{om} mostra che è possibile scegliere i coefficienti c_1, c_2 in modo che $x_{\text{om}}(t) \gg e^{4t}$ a patto che *almeno una* delle radici caratteristiche λ_1, λ_2 sia strettamente maggiore di 4, ovvero che lo sia la più grande delle due, vale a dire

$$a + \sqrt{a^2 - 4} > 4\,.$$

Risolvendo questa disequazione[1] ottengo $a > \frac{5}{2}$.

2 a) Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) := 1 - \sqrt[3]{\cos x}$.

b) Per ogni $a \in \mathbb{R}$, trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) + ax^2$.

SOLUZIONE. La domanda a) corrisponde alla b) per $a = 0$; rispondo quindi alla domanda b).

Usando lo sviluppo $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + O(x^4)$ e poi lo sviluppo

$$(1 + t)^{1/3} = 1 + \tfrac{1}{3}t + O(t^2) \quad \text{con } t = -\tfrac{1}{2}x^2 + O(x^4)$$

[1] Riscrivo la disequazione come $\sqrt{a^2 - 4} > 4 - a$ e distinguo due casi: se $4 - a < 0$ la disequazione è sempre verificata, se invece $4 - a \geq 0$ elevo al quadrato entrambi i termini arrivando a una disequazione di primo grado in a.

ottengo

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - \big(1 - \tfrac{1}{2}x^2 + O(x^4)\big)^{1/3} \\ &= 1 - (1+t)^{1/3} = -\tfrac{1}{3}t + O(t^2) = -\tfrac{1}{3}\big(-\tfrac{1}{2}x^2 + O(x^4)\big) + O(x^4) \sim \tfrac{1}{6}x^2\,, \end{aligned}$$

e quindi, per $a \neq -\frac{1}{6}$,

$$\text{p.p.}\big(f(x) + ax^2\big) = \big(\tfrac{1}{6} + a\big)\, x^2\,.$$

Per $a = -\frac{1}{6}$ la parte principale di $f(x)$ si cancella con ax^2, e quindi devo trovare uno sviluppo più preciso di $f(x)$. Procedo come prima, usando stavolta gli sviluppi $\cos x = 1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+O(x^6)$ e

$$(1+t)^{1/3} = 1 + \tfrac{1}{3}t - \tfrac{1}{9}t^2 + O(t^3) \quad \text{con } t = -\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^4 + O(x^6),$$

ed ottengo

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - \big(1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^4 + O(x^6)\big)^{1/3} \\ &= 1 - (1+t)^{1/3} \\ &= -\tfrac{1}{3}t + \tfrac{1}{9}t^2 + O(t^3) \\ &= -\tfrac{1}{3}\big(-\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^4 + O(x^6)\big) + \tfrac{1}{9}\big(-\tfrac{1}{2}x^2 + O(x^4)\big)^2 + O(x^6) \\ &= \tfrac{1}{6}x^2 - \tfrac{1}{72}x^4 + O(x^6) + \tfrac{1}{9}\big(\tfrac{1}{4}x^4 + O(x^6)\big) + O(x^6) \\ &= \tfrac{1}{6}x^2 + \tfrac{1}{72}x^4 + O(x^6)\,. \end{aligned}$$

Pertanto

$$\text{p.p.}\big(f(x) - \tfrac{1}{6}x^2\big) = \tfrac{1}{72}x^4\,.$$

3 a) Trovare lo sviluppo di Taylor al primo ordine in 0 della funzione $\arctan x$.

b) Dimostrare che la funzione $g(x) := x - \log(1+x)$ è strettamente positiva per ogni $x > 0$.

c) Dato $a \in \mathbb{R}$, dire dove è improprio l'integrale

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(1/x)}{(g(x))^a}\,dx\,,$$

e discuterne il comportamento.

<u>Soluzione</u>. a) Usando definizione del polinomio di Taylor ottengo $\arctan x = x + O(x^2)$.

b) Osservo che la derivata

$$g'(x) = \frac{x}{1+x}$$

è strettamente positiva per $x > 0$, e quindi la funzione g è strettamente crescente per $x > 0$. Inoltre g vale zero per $x = 0$ e quindi deve essere strettamente positiva per $x > 0$.

c) Usando quanto fatto al punto b) si vede che la funzione integranda è ben definita e continua per $x > 0$ e non è definita per $x = 0$, e quindi l'integrale I è improprio in 0 e $+\infty$.
Inoltre la funzione integranda è sempre positiva, e quindi I esiste per qualunque a, e si tratta quindi di stabilire se è finito oppure no. Per farlo spezzo I come somma di due integrali impropri semplici, che studio separatamente:

$$I = \underbrace{\int_0^1 \frac{\arctan(1/x)}{(g(x))^a}dx}_{I_1} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(1/x)}{(g(x))^a}dx}_{I_2}\,.$$

Comportamento di I_1. Questo integrale è improprio in 0, e quindi serve trovare il comportamento della funzione integranda per $x \to 0$. A questo scopo osservo che $\arctan(1/x) \to \frac{\pi}{2}$, e usando lo sviluppo di Taylor di ordine 2 di $\log(1+x)$ ottengo che, per $x \to 0$,

$$g(x) = x - \log(1+x) \sim \frac{1}{2}x^2\,,$$

da cui segue che

$$\frac{\arctan(1/x)}{(g(x))^a} \sim \frac{2^{a-1}\pi}{x^{2a}}\,.$$

Quindi, per il criterio del confronto asintotico per gli integrali impropri, $I_1 \approx \int_0^1 \frac{1}{x^{2a}} dx$, e pertanto I_1 è finito se e solo se $2a < 1$, cioè $a < \frac{1}{2}$.

Comportamento di I_2. Questo integrale è improprio in $+\infty$, e quindi serve trovare il comportamento della funzione integranda per $x \to +\infty$. Osservo ora che $\arctan(1/x) \sim \frac{1}{x}$ (per via del punto a)) e $g(x) = x - \log(1+x) \sim x$, da cui segue che

$$\frac{\arctan(1/x)}{(g(x))^a} \sim \frac{1}{x^{a+1}} .$$

Quindi, per il criterio del confronto asintotico per gli integrali impropri, $I_2 \approx \int_1^\infty \frac{1}{x^{a+1}} dx$, e pertanto I_2 è finito se e solo se $a + 1 > 1$, cioè $a > 0$.

Comportamento di I. Mettendo insieme quanto fatto per I_1 e I_2 ottengo infine che I è finito se e solo se $0 < a < \frac{1}{2}$.