Lezione 49

Definizione: Una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ si dice ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ è convergente.

CRITERIO della CONVERGENZA ASSOLUTA

Se una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è assolutamente convergente, allora è convergente.

Dimostrazione:

Per ipotesi $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < +\infty$.

$\forall n \in \mathbb{N}$ abbiamo $|a_n| + a_n \leq 2|a_n|$.

Dunque per il criterio del confronto

$$\sum_{n=0}^{\infty} (|a_n| + a_n) \leq \sum_{n=0}^{\infty} 2|a_n| = 2\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < +\infty.$$

Inoltre $\forall n \in \mathbb{N}$ possiamo scrivere

$$a_n = |a_n| + a_n - |a_n|.$$

Si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} (|a_n| + a_n - |a_n|)$$

questo = è lecito perché entrambe le serie convergono $\longleftarrow$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (|a_n| + a_n) - \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < +\infty$$

Osservazione: Non è vero che se $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = +\infty$ allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$ (o, equivalentemente, non è detto che se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge ad un numero finito, allora $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge ad un numero finito).

Esempio: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge, ma $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

Esempio: La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^a}$ con $a > 1$ è assolutamente convergente, quindi convergente.

Esercizio: Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n^2}.$$

Svolgimento: Vale $\frac{|\sin(n)|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$.

Dunque per il teorema del confronto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin(n)|}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty.$$

Quindi la serie converge assolutamente, e per il criterio della convergenza assoluta, converge.

CRITERIO della RADICE.

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie a termini positivi.

Supponiamo che esista il limite

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} =: L.$$

Se $L < 1$, allora la serie converge.

Se $L > 1$, allora la serie diverge (positivamente).

Dimostrazione:

CASO $0 \leq L < 1$.

Per ipotesi esiste $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$.

Allora $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \tilde{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$\forall \tilde{n} \geq n$ $\sqrt[n]{a_n} \leq L + \varepsilon$. $(*)$

Prendo $0 < \varepsilon < 1 - L$ e chiamo $\ell := L + \varepsilon$,
così $\ell \in (0, 1)$.
Elevando (*) alla n e con la nostra scelta di ε abbiamo che

$\forall\, n \geq \tilde{n} \qquad a_n \leq \ell^n$ con $0 < \ell < 1$.

Per il criterio del confronto

$$\sum_{n=\tilde{n}}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=\tilde{n}}^{\infty} \ell^n < +\infty .$$

serie geometrica con $0 < \ell < 1$

Poiché il comportamento di una serie non dipende dai suoi primi addendi abbiamo che la serie converge ad un numero finito.

CASO $L > 1$

Il termine n-esimo della serie non può convergere a zero.
Infatti supponiamo per assurdo che

$\lim_{n \to \infty} a_n = 0$.

Allora esisterebbe $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$\forall\, n \geq \bar{n} \quad a_n < 1$. E dunque $\forall\, n \geq \bar{n}$

$\sqrt[n]{a_n} < 1$. Ma ciò non può essere perché

$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = L > 1$.

Visto che il termine n-esimo della serie non converge a zero, la serie non può convergere ad un numero finito. Essendo una serie a termini positivi, l'unico comportamento che può assumere è divergere a $+\infty$.

Osservazione: Se $L > 1$ allora è possibile dimostrare che $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Infatti visto che $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = L > 1$ allora possiamo prendere $\ell \in (1, L)$ tale che $\forall n \geq \tilde{n}$ $\sqrt[n]{a_n} \geq \ell$ e dunque $a_n \geq \ell^n$. Visto che $\ell > 1$ abbiamo che $\lim_{n\to\infty} \ell^n = +\infty$ e dunque $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Corollario:

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie e supponiamo che esista il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} =: L.$$

Se $L < 1$, allora la serie converge.

Se $L > 1$, allora la serie non converge ad un numero finito.

Dimostrazione.

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ è una serie a termini positivi. Il criterio della radice ci dice che se $L < 1$, allora $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge, dunque la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge assolutamente e, per il criterio della convergenza assoluta, converge.

Se invece $L > 1$, allora $\lim_{n \to +\infty} |a_n| = +\infty$

e la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ diverge.

Se $\lim_{n \to +\infty} |a_n| = +\infty$ allora il limite

$\lim_{n \to +\infty} a_n$ non può convergere a zero,

dunque la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ non converge.

Osservazione: Se $L = 1$ non possiamo

dire nulla sul comportamento della serie.

Consideriamo ad esempio $\sum_{n=0}^{\infty} n^2$ e

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Allora $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n^2} = \lim_{n \to +\infty} n^{\frac{2}{n}}$

$$= \lim_{n \to +\infty} \exp\left(\frac{2}{n} \log n\right) = 1$$

e $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n^{-2}} = \lim_{n \to +\infty} n^{-\frac{2}{n}}$

$$= \lim_{n \to +\infty} \exp\left(-\frac{2}{n} \log n\right) = 1$$

ma la prima serie diverge e la seconda

converge.

Esercizio: Si studi con il criterio della

radice il comportamento della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{n/2}}$$

Calcolo $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{(\log n)^{n/2}}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{(\log n)^{1/2}} = 0$

$\Rightarrow$ la serie converge.

Esercizio: Si studi con il criterio della radice il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} c^n n^a$$ al variare di $c>0$ e $a \in \mathbb{R}$.

Calcolo $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c^n n^a} = \lim_{n\to+\infty} c\, n^{\frac{a}{n}}$

$= \lim_{n\to+\infty} c \exp\left(\frac{a}{n}\log n\right) = c$

Se $c>1$, allora la serie diverge, se $c<1$ allora la serie converge.

* Se $c=1$ abbiamo la serie armonica generalizzata che converge se $-a>1$ e diverge se $-a\leq 1$
$(a<-1)$
$(a\geq -1)$

CRITERIO DEL RAPPORTO

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie a termini positivi.
Supponiamo che esista il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} =: L.$$

Se $L<1$, allora la serie converge.
Se $L>1$, allora la serie diverge (positivamente).

Dimostrazione:

CASO $0\leq L<1$:

Per ipotesi $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$.
Allora $\forall \varepsilon>0 \ \exists \tilde{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \geq \tilde{n}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq L+\varepsilon.$$

Prendo $0 < \varepsilon < 1 - L$ e chiamo $\ell := L + \varepsilon$,

così $\ell \in (0, 1)$.

Dunque $\forall\, n \geq \tilde{n}$ $\quad a_{n+1} < \ell\, a_n$ con $\ell \in (0,1)$.

Quindi
$$a_{\tilde{n}+1} \leq \ell\, a_{\tilde{n}}$$
$$a_{\tilde{n}+2} \leq \ell\, a_{\tilde{n}+1} \leq \ell \cdot \ell \cdot a_{\tilde{n}} = \ell^2 a_{\tilde{n}}$$
$$a_{\tilde{n}+3} \leq \ell\, a_{\tilde{n}+2} \leq \ell^3 a_{\tilde{n}}$$
$$\vdots$$
$$a_n \leq \ell^{n-\tilde{n}}\, a_{\tilde{n}}$$

Si ha $\lim\limits_{n \to +\infty} \ell^{n-\tilde{n}}\, a_{\tilde{n}} = 0$ e quindi

$\ell \in (0,1)$

$\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$.

Inoltre $\displaystyle\sum_{n=\tilde{n}}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=\tilde{n}}^{\infty} \ell^{n-\tilde{n}}\, a_{\tilde{n}} < +\infty$. *

Poiché il comportamento di una serie non dipende dai suoi primi addendi abbiamo che la serie converge ad un numero finito.

CASO $L > 1$:

Per ipotesi $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = L$.

Allora $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, \tilde{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\forall\, n \geq \tilde{n}$
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq L - \varepsilon.$$

Prendo $\varepsilon < L - 1$ e chiamo $\ell = L - \varepsilon$.

$\forall\, n \geq \tilde{n}$ $\quad \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq \ell$.

Come prima, possiamo ottenere che
$$a_n \geq \ell^{n-\tilde{n}}\, a_{\tilde{n}} \qquad \text{con } \ell > 1$$

Si ha $\lim_{n\to\infty} e^{n-\tilde{n}} a_{\tilde{n}} = +\infty$ quindi $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ e la serie diverge

Corollario:

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie e supponiamo che esista il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| =: L .$$

Se $L < 1$, allora la serie converge.

Se $L > 1$, allora la serie non converge ad un numero finito.

Osservazione: Se $L = 1$ non possiamo dire nulla sul comportamento della serie.

Consideriamo ad esempio $\sum_{n=0}^{\infty} n^2$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Allora $\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2} = 1$

e $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2} = 1$

ma la prima serie diverge e la seconda converge.

Esercizio: Si studi con il criterio del rapporto il comportamento della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4}{2^n}$$

Calcolo $\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^4}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^4}$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{n^4}{n^4} = \frac{1}{2} .$$

La serie converge.

Esercizio: Si studi con il criterio del rapporto il comportamento della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}.$$

Calcolo
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} n+1 \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1 \cdot n^n}{(n+1)(n+1)^n}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \exp\left(n \log\left(\frac{n}{n+1}\right)\right)$$
$$= e^{-1}.$$

SERIE DI POTENZE

Definizione: Chiamiamo serie di potenze una serie di funzioni della forma
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$
dove $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di numeri reali e $x \in \mathbb{R}$.

Ci chiediamo per quali $x \in \mathbb{R}$ f è ben definita, ossia per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie converge.

La risposta dipenderà dagli a_n.

Esempio: Abbiamo già visto un esempio di serie di potenze: la **serie geometrica**.
In questo caso $\forall m \in \mathbb{N}$ $a_m = 1$,
$f(x) = \sum x^m$. Sappiamo che è ben definita per $|x| < 1$ e vale $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

Osservazione $f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$ è sempre definita almeno in un punto. Infatti
$f(0) = a_0$.

Teorema:
Sia $f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$ una serie di potenze.
a) Esiste $R \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$ chiamato **raggio di convergenza** della serie tale che
1) se $|x| < R$ allora $\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$ converge
2) se $|x| > R$ allora $\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$ non converge.

b) Se esiste
$$\lim_{m \to +\infty} \sqrt[m]{|a_m|} =: L,$$
allora $R = \dfrac{1}{L}$.

c) Se esiste
$$\lim_{m \to +\infty} \frac{|a_{m+1}|}{|a_m|} =: \tilde{L},$$
allora $R = \dfrac{1}{\tilde{L}}$.

Dimostrazione:

* Dimostro che se esiste $\lim_{m \to +\infty} \sqrt[m]{|a_m|} =: L$ allora vale 1) e 2) con $R = \dfrac{1}{L}$

Considero $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$.

Abbiamo
$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x|$$
$$= L|x| .$$

Per il criterio della radice se $L|x| < 1$ (ossia $|x| < \frac{1}{L}$) allora la serie converge assolutamente e per il criterio della convergenza assoluta la serie converge.

Invece per $L|x| > 1$ (ossia $|x| > \frac{1}{L}$) la serie non converge.

** Dimostro che se esiste $\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| =: L$ allora vale 1) e 2) con $R = \frac{1}{L}$

Considero $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$.

Abbiamo
$$\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \cdot |x| = L|x|$$

Per il criterio del rapporto se $L|x| < 1$ (ossia $|x| < \frac{1}{L}$) allora la serie converge assolutamente e per il criterio della convergenza assoluta la serie converge.

Invece per $L|x| > 1$ (ossia $|x| > \frac{1}{L}$) la serie non converge.