Versione: 16 settembre 2020

Università di Pisa

Corso di laurea in Matematica

Testi e soluzioni degli scritti d'esame di

Analisi 3

a.a. 2019-20

Giovanni Alberti

Giovanni Alberti
Dipartimento di Matematica
Università di Pisa
largo Pontecorvo 5
56127 Pisa
http://pagine.dm.unipi.it/alberti

Avvertenze. Gli scritti d'esame per il corso di Analisi 3 consistono di otto domande a cui dare una risposta articolata. Di queste, le prime quattro sono solitamente più semplici, nel senso che a possono essere facilmente ricondotte a fatti e/o calcoli noti. Il tempo a disposizione è di tre ore. Gli scritti degli ultimi tre appelli di questo anno accademico si sono svolti online per via dell'epidemia, e sono stati spezzati in due parti della durata di un'ora e mezza svolte in giorni diversi.

La prima sezione di questa raccolta contiene i testi di tutti gli scritti, incluse le prove in itinere, mentre la seconda parte contiene una traccia delle soluzioni.

Programma del corso [versione: 20 dicembre 2019]. Sono riportati in corsivo gli argomenti non fondamentali e/o fuori programma.

1. Richiamo di teoria dell'integrazione
   1.1. *Misure σ-additive su σ-algebre. Esempi fondamentali: la misura di Lebesgue e la σ-algebra degli insiemi misurabili secondo Lebesgue su $\mathbb{R}^d$; la misura che conta i punti.*
   1.2. *Funzioni misurabili (rispetto ad una data σ-algebra). Integrale delle funzioni misurabile positive partendo delle funzioni semplici. Integrale delle funzioni misurabili a valori reali e a valori vettoriali.*
   1.3. *Teoremi fondamentali: di convergenza monotona (o di Beppo Levi), di Fatou, di convergenza dominata (o di Lebesgue), di Fubini, di cambio di variabile (rispetto a cambi di variabile di classe C^1).*

2. Spazi L^p e convoluzione
   2.1. Disuguaglianze di Jensen, Hölder e Minkowski.
   2.2. Norma L^p di una funzione. Spazi L^p. Completezza degli spazi L^p.
   2.3. Prodotto di convoluzione di funzioni su $\mathbb{R}^d$ e disuguaglianze collegate alle norme L^p.
   2.4. Regolarità del prodotto di convoluzione in funzione della regolarità dei fattori.
   2.5. Approssimazione e regolarizzazione per convoluzione delle funzioni in $L^p(\mathbb{R}^d)$.

3. Spazi di Hilbert
   3.1. Spazi di Hilbert reali; basi di Hilbert (sistemi ortonormali completi). Rappresentazione di un elemento dello spazio in termini di una base.
   3.2. Proiezione di un vettore su un sottospazio chiuso, e caratterizzazione in termini di distanza. Rappresentazione di un funzionale lineare e continuo tramite prodotto scalare (Teorema di Riesz).
   3.3. *Spazi di Hilbert sul campo complesso.*

4. Serie di Fourier ed applicazioni
   4.1. Le funzioni esponenziali e^{inx} (opportunamente rinormalizzate) formano una base di Hilbert di $L^2((-\pi,\pi),\mathbb{C})$. Serie di Fourier per le funzioni in $L^2((-\pi,\pi),\mathbb{C})$.
   4.2. Regolarità delle funzione e comportamento asintotico dei coefficienti. Convergenza uniforme della serie di Fourier delle funzioni 2π-periodiche di classe C^1.
   4.3. Rappresentazione delle somme parziali della serie di Fourier come convoluzione e ulteriori risultati sulla convergenza puntuale della serie di Fourier.
   4.4. *Derivazione dell'equazione del calore e delle onde in una dimensione spaziale.* Soluzione dell'equazione del calore e delle onde con condizioni di periodicità agli estremi tramite la serie di Fourier. *Disuguaglianza isoperimetrica nel piano.*
   4.5. Varianti della serie di Fourier: rappresentazione in serie di seni e coseni per le funzioni in $L^2(-\pi,\pi)$ (serie di Fourier reale); rappresentazione in serie di seni per le funzioni in $L^2(0,\pi)$; rappresentazione in serie di esponenziali di due variabili per le funzioni in $L^2\big([-\pi,\pi]^d;\mathbb{C}\big)$ (serie di Fourier in d variabili).
   4.6. Basi ortonormali e autovettori di operatori autoaggiunti.

5. Trasformata di Fourier e applicazioni
   5.1. *Derivazione euristica della trasformata di Fourier a partire dalla serie di Fourier.* Trasformata di Fourier delle funzioni (complesse) in $L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$.

5.2. Proprietà elementari della trasformata di Fourier. Trasformata del prodotto di convoluzione di due funzioni in L^1. Trasformata della derivata, derivata della trasformata. Relazione tra la regolarità della funzione e il comportamento asintotico della trasformata, relazione tra la sommabilità della funzione e la regolarità della trasformata. La trasformata di una funzione a supporto compatto è analitica.

5.3. Formula di inversione per funzioni in L^1 con trasformata in L^1.

5.4. La trasformata di Fourier preserva il prodotto scalare e la norma L^2. Trasformata delle funzioni in $L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$. Trasformata del prodotto di due funzioni in L^2.

5.5. Risoluzione dell'equazione del calore tramite trasformata di Fourier e rappresentazione della soluzione tramite il nucleo del calore. Disuguaglianza di Heisenberg.

6. Funzioni armoniche

6.1. Le funzioni armoniche come soluzioni dell'equazione di Laplace. Caratterizzazione in termini di proprietà della media e regolarità C^∞. Principio del massimo per le funzioni armoniche. Unicità e principio del confronto per le soluzioni delle equazioni di Laplace e di Poisson con dato al bordo assegnato.

6.2. Relazioni tra le funzioni armoniche in dimensione due e le funzioni olomorfe. Analiticità delle funzioni armoniche e principio di prolungamento analitico in dimensione due.

6.3. Risoluzione dell'equazione di Laplace nel disco unitario tramite la serie di Fourier e rappresentazione della soluzione tramite nucleo di Poisson.

7. Integrazione su superfici

7.1. *Superfici (senza bordo) di dimensione k e classe C^m in $\mathbb{R}^d$: definizione in termini di parametrizzazioni e caratterizzazione come luogo di zeri (cioè in termini di equazioni). Spazio tangente ad una superficie. Mappe regolari tra superfici, e loro differenziale (inteso come applicazione lineare tra i rispettivi spazi tangenti). Superfici con bordo.*

7.2. Misura di Lebesgue su uno spazio vettoriale con prodotto scalare. Determinante di un'applicazione lineare tra spazi vettoriali con prodotto scalare. Formula dell'area per parametrizzazioni lineari.

7.3. Determinante Jacobiano di una mappa di classe C^1 da un aperto di $\mathbb{R}^k$ in $\mathbb{R}^d$. Caratterizzazione della misura di volume su una superficie in termini di quasi-isometrie, e costruzione tramite la formula dell'area. Integrazione di funzioni scalari su una superficie tramite formula dell'area.

7.4. Applicazioni k-lineari alternanti su uno spazio vettoriale e formula di Binet generalizzata. Formule alternative per lo Jacobiano di una mappa. Casi particolari della formula dell'area: misura di lunghezza su una curva, misura di volume sul grafico di una funzione (scalare), misura di area su una superficie 2-dimensionale in $\mathbb{R}^3$.

T E S T I

1. Dato $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, sia $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) := \cos(ax)$. Calcolare i coefficienti di Fourier $c_n(f)$ e determinarne il comportamento asintotico per $n \to \pm\infty$.

2. Dato $a > 0$ e $d = 2, 3, \dots$ sia f la funzione su $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ definita da $f(x) := 1/|x|^a$ e sia
$$E := \Big\{ x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d \colon x_1 \geq 1\,,\ x_2^2 + \cdots + x_d^2 \leq \frac{1}{x_1^4} \Big\}$$
Dire per quali $p \in [1, +\infty)$ la funzione f appartiene a $L^p(E)$.

3. Sia X l'insieme delle funzioni $v \in L^2([0,2])$ tali che $\int_0^1 v\,dx = \int_1^2 v\,dx = 0$.
a) Dimostrare che X è un sottospazio chiuso di $L^2([0,2])$;
b) determinare $X^\perp$ e scrivere le proiezioni ortogonali di una data $u \in L^2([0,2])$ su X e $X^\perp$.

4. Data A matrice $d \times d$ invertibile, dico che una funzione $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ è A-invariante se $f(x) = f(Ax)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^d$. Date $f, g : \mathbb{R}^d \to [0, +\infty)$ funzioni misurabili, dimostrare che:
a) se f è A-invariante e $0 < \|f\|_p < +\infty$ per qualche $p \in [1, +\infty)$ allora $\det A = \pm 1$;
b) se $\det A = \pm 1$ ed f, g sono A-invarianti allora $f * g$ è A-invariante;
c) se f, g sono radiali allora $f * g$ è radiale.

5. Dico che una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ misurabile appartiene a L^1_{per} se è 2π-periodica e la restrizione di f a $[-\pi, \pi]$ appartiene a L^1, e per ogni $n \in \mathbb{Z}$ indico con $c_n(f)$ i coefficienti di Fourier di f, definiti al solito modo. Data inoltre $g \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ pongo
$$d_n(g) := \int_{\mathbb{R}} g(x)\, e^{-inx}\, dx \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{Z}.$$
a) Dimostrare che la convoluzione $f * g$ è ben definita e appartiene a L^1_{per}.
b) Scrivere i coefficienti $c_n(f * g)$ in termini di $c_n(f)$ e $d_n(g)$.

6. Consideriamo il problema (P) dato dall'equazione $iu_t = -u + u_{xx}$ sull'intervallo spaziale $[-\pi, \pi]$ con le condizioni di periodicità al bordo e la condizione iniziale $u(0, \cdot) = u_0(\cdot)$. Discutere l'esistenza della soluzione in termini dei coefficienti di Fourier c_n^0 del dato iniziale u_0.

7. Posto $I := [0, 1)$ e detta u la funzione 1-periodica su $\mathbb{R}$ che vale $+1$ in $[0, 1/2)$ e -1 in $[1/2, 1)$, considero le funzioni $u_k : I \to \{\pm 1\}$ definite dalla seguente procedura induttiva:
   - $u_1(x) := 1$;
   - per ogni $n = 0, 1, 2, \dots$ e $k = 1, \dots, 2^n$ pongo $u_{2^n + k}(x) := u_k(x) \cdot u(2^n x)$.

   Detta $\mathscr{F} := \{u_k \colon k = 1, 2, \dots\}$, dimostrare che:
a) $\mathscr{F}$ è un sistema ortonormale in $L^2(I)$;
b) $\mathrm{Span}(\mathscr{F})$ è un'algebra di funzioni;
c) $\mathscr{F}$ è una base di Hilbert di $L^2(I)$.

8. Consideriamo il problema (P') dato dall'equazione del calore $u_t = u_{xx}$ sull'intervallo spaziale $[-\pi, \pi]$ con condizioni di periodicità al bordo e la condizione iniziale $u(0, \cdot) = u_0(\cdot)$, e consideriamo i dati iniziali u_0 tali che (P') ammette una soluzione di classe C^∞ *definita per tutti i tempi*. Caratterizzare tali u_0 in termini del comportamento asintotico di $\log |c_n^0|$ per $n \to \pm\infty$ (c_n^0 sono i coefficienti di Fourier di u_0 e vale la convenzione $\log 0 = -\infty$).

1. Calcolare la TdF della funzione $f(x) := \dfrac{x^2}{4+x^4}$.

2. Dato $d = 0, 1, \dots,$ sia X_d lo spazio vettoriale (complesso) delle funzioni su $\mathbb{R}$ della forma $p(x)\,\exp(-x^2/2)$ con p polinomio a coefficienti complessi di grado al più d. Dimostrare che la TdF è un isomorfismo di X_d in sé.

3. Detta al solito $\mathbb{S}^2$ la sfera con centro 0 e raggio 1 in $\mathbb{R}^3$, calcolare per ogni $y \in \mathbb{R}^3$
$$\phi(y) := \int_{\mathbb{S}^2} e^{-ix\cdot y} d\sigma_2(x)\,.$$
[*È utile osservare che la funzione ϕ è radiale.*]

4. Sia $I := [0,1]$, sia X il sottospazio di $L^2(I)$ formato dalle funzioni u di classe C^2 tali che $u(0) = 0$ e $\dot u(1) = 0$, e sia $T : X \to L^2(I)$ l'operatore lineare dato da $Tu := au - \ddot u$, con $a \in \mathbb{R}$.
   a) Dimostrare che T è autoaggiunto.
   b) Discutere la positività dell'operatore T al variare di a.

5. Sia $p \in [1,\infty]$, sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$ e sia $A(\Omega)$ lo spazio delle funzioni armoniche su Ω.
   a) Dimostrare che $A(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ è un sottospazio chiuso di $L^p(\Omega)$.
   b) Per $d = 2$ dimostrare che $A(\Omega) \not\subset L^p(\Omega)$ (cominciare dal caso in cui Ω è un disco).

6. Consideriamo il problema (P) dato dall'equazione $u_t = 5u + u_{xx}$ su $[0,+\infty) \times [0,\pi]$ con le condizioni al bordo $u(\cdot,0) = u(\cdot,\pi) = 0$ e la condizione iniziale $u(0,\cdot) = u_0(\cdot)$. Dire per quali u_0 la soluzione esiste e soddisfa $\|u(t,\cdot)\|_2 \to 0$ per $t \to +\infty$. (L'unicità può essere data per scontata.)

7. Sia D un aperto di $\mathbb{C}$ e sia $f : D \to \mathbb{C}^d$ una funzione olomorfa, iniettiva, propria e tale che la derivata complessa f' non è mai nulla.[1]
   a) Dimostrare che $\Sigma := f(D)$ è una superficie di dimensione 2 e classe C^∞.
   b) Scrivere l'area di Σ come l'integrale di un'opportuna funzione di f'.
   c) Calcolare l'area dell'insieme Σ dato dai punti $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ tali che $z_1^2 = z_2^5$ e $|z_1| < 1$.

8. Data $u \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ e $r > 0$, per ogni $x \in \mathbb{R}$ definiamo
$$u_r(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{-r}^{r} \widehat{u}(y)\, e^{ixy}\, dy\,.$$
   a) Dimostrare che $u_r = u * g_r$ dove $g_r(x) := r\,g(rx)$ (ovvero $g_r = \sigma_{1/r} g$) e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è un'opportuna funzione che non dipende da u e di cui va trovata la formula.
   b) Dimostrare che $g \notin L^1(\mathbb{R})$, ma l'integrale *improprio* di g su $\mathbb{R}$ esiste e vale 1.
   c) Supponiamo ora che u è α-Hölderiana in x_0 per certi $x_0 \in \mathbb{R}$ e $\alpha > 0$;[2] dimostrare che allora $u_r(x_0)$ tende a $u(x_0)$ per $r \to +\infty$, ovvero vale la formula di inversione della TdF a patto di definire l'anti-trasformata di $\widehat{u}$ come integrale improprio.
   [*Suggerimento: studiare il limite per $r \to +\infty$ di $u_r(x_0) - u(x_0) \int_{-1}^{1} g_r(t)\, dt$.*]

[1] Dico che $f = (f_1, \dots, f_d)$ è olomorfa se tutte le componenti f_j sono olomorfe, e pongo $f' = (f'_1, \dots, f'_d)$.
[2] Cioè esiste $C < +\infty$ tale che $|u(x) - u(x_0)| \le C|x - x_0|^\alpha$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

1. Per ogni $a > 0$ calcolare la Trasformata di Fourier della funzione $f(x) := x \exp(-ax^2)$.

2. Siano $I := [0,1]$, $Q := [0,1]^2$ e $p \in [1,+\infty)$, e per ogni $u \in L^p(Q)$ consideriamo la funzione Tu data da
$$Tu(x) := \int_I u(x,y)\,dy \quad \text{per quasi ogni } x \in I.$$
Dimostrare che T è un operatore (lineare) ben definito, continuo e surgettivo da $L^p(Q)$ in $L^p(I)$.

3. Sia Ω un aperto non limitato di $\mathbb{R}^d$ (diverso da $\mathbb{R}^d$ stesso) e sia $u_0 \in C_0(\partial\Omega)$.[1]

   a) Dimostrare che esiste al più una $u \in C_0(\overline{\Omega})$ che coincide con u_0 su $\partial\Omega$ ed è armonica in Ω.

   b) Far vedere, almeno per qualche Ω, che la conclusione al punto a) non vale se si chiede che u appartenga a $C(\overline{\Omega})$ invece di $C_0(\overline{\Omega})$.

4. Sia $I := [0,\pi]$ e sia $\mathscr{F}$ l'insieme delle funzioni $e_n : I \to \mathbb{R}$ date da $e_n(x) := \sqrt{2/\pi}\cos(nx)$ per $n = 1,2\dots$, più la funzione costante $e_0 := \sqrt{1/\pi}$. Dimostrare che:

   a) $\mathscr{F}$ è un sistema ortonormale in $L^2(I)$;

   b) $\mathrm{Span}(\mathscr{F})$ è un'algebra ed $\mathscr{F}$ è una base di Hilbert di $L^2(I)$.

5. Sia E un insieme misurabile in $\mathbb{R}^d$ ed $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile non quasi ovunque nulla. Dati inoltre $1 \le p_1 \le p \le p_2$ numeri reali, scriviamo $1/p$ come combinazione convessa di $1/p_1$ e $1/p_2$, vale a dire $1/p = \lambda_1/p_1 + \lambda_2/p_2$ con $0 \le \lambda_1, \lambda_2 \le 1$ e $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Dimostrare quanto segue:

   a) $\|f\|_p \le \|f\|_{p_1}^{\lambda_1} \|f\|_{p_2}^{\lambda_2}$. [*Suggerimento: applicare la disuguaglianza di Hölder a* $\int_E |f|^{\lambda_1 p} |f|^{\lambda_2 p}\,dx$.]

   b) la funzione $g : (0,1] \to (-\infty,+\infty]$ data da $g(t) := \log\big(\|f\|_{1/t}\big)$ è ben definita e convessa;[2]

   c) l'insieme $I := \{p\colon \|f\|_p < +\infty\}$ è un intervallo e $p \mapsto \|f\|_p$ è continua all'interno di I.

6. Sia (P) il problema dato dall'equazione alle derivate parziali $u_t = e^{-t}u_{xx}$ su $[0,+\infty) \times [-\pi,\pi]$ con condizioni di periodicità al bordo, e condizione iniziale $u(0,\cdot) = u_0(\cdot)$.

   a) Dire sotto quali ipotesi su u_0 esiste una soluzione u, e discutere la regolarità.

   b) Dimostrare che $u(t,\cdot)$ converge uniformemente ad una funzione $u_\infty \in C^\infty_{\mathrm{per}}$ per $t \to +\infty$.

7. Sia Σ l'insieme dei punti $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ tali che $|x| + |y| = 1$, e sia Σ^* il sottoinsieme dei punti con $x \ne 0$ e $y \ne 0$.

   a) Dimostrare che Σ^* è una superficie di classe C^∞ e dimensione 3.

   b) Dimostrare che Σ non è una superficie.

   c) Trovare una parametrizzazione di Σ e calcolarne il volume.

8. Sia $I := [0,\pi]$ e sia X l'insieme delle funzioni $u : I \to \mathbb{R}$ di classe C^1 tali che $u(0) = u(\pi) = 0$, e data $u \in X$ siano a_n i coefficienti della rappresentazione di u come serie di seni.

   a) Scrivere la norma $\|\dot u\|_2$ in termini dei coefficienti a_n.

   b) Far vedere che esiste una costante finita C tale che $\|u\|_2 \le C\|\dot u\|_2$ per ogni $u \in X$; trovare la più piccola costante C per cui vale questa disuguaglianza.

[1] Dato E chiuso in $\mathbb{R}^d$, $C_0(E)$ è l'insieme delle funzioni continue su E ed infinitesime all'infinito (se E è illimitato).

[2] Nel definizione di g uso la convenzione $\log(+\infty) = +\infty$.

1. Calcolare la trasformata di Fourier della funzione $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $u(x) := e^x$ per $x \leq 0$, $u(x) := 0$ per $x > 0$.

2. Sia $u \in L^1(\mathbb{R})$ tale che $u * u = u$ q.o. Usando la TdF dimostrare che $u = 0$ q.o.[1]

3. Sia H uno spazio di Hilbert e siano X, Y sottospazi di H tali che $X \perp Y$ e $X + Y = H$; dimostrare che X e Y sono chiusi. [*Può essere utile dimostrare preliminarmente che* $\overline{X} \perp \overline{Y}$.]

4. Sia Q il quadrato $[0,1]^2$, sia X il sottospazio delle $u \in L^2(Q)$ tali che
$$\int_0^1 u(x,y)\,dy = 0 \quad \text{per quasi ogni } x \in [0,1].$$
e sia Y is sottospazio delle $v \in L^2(Q)$ che dipendono solo dalla variabile x. Dimostrare che $X \perp Y$ e $X + Y = L^2(Q)$, e scrivere le proiezioni ortogonali di $L^2(Q)$ su X e su Y.

5. Sia Σ l'insieme dei punti $x \in \mathbb{R}^3$ tali che $(1 + x_1^8)(x_2^2 + x_3^2) = 1$.
   a) Dimostrare che Σ è una superficie di classe C^∞ (e dimensione 2).
   b) Dire per quali $1 \leq p < +\infty$ la funzione $f(x) := x_1$ appartiene a $L^p(\Sigma)$.[2]

6. Sia D la palla chiusa $D := \overline{B(0,1)}$ in $\mathbb{R}^d$, sia f una funzione in $L^p(D)$ con $1 \leq p < +\infty$, e per ogni $0 < \lambda \leq 1$ sia $f_\lambda(x) := f(\lambda x)$. Dimostrare che f_λ converge a f in $L^p(D)$ per $\lambda \to 1$.
[*Suggerimento: cominciare dal caso in cui f è continua.*]

7. Sia (P) il problema dato dall'equazione alle derivate parziali $iu_t = u_{xx}$ sull'intervallo spaziale $[0, \pi]$ con condizioni al bordo $u(\cdot, 0) = u(\cdot, \pi) = 0$ e condizione iniziale $u(0, \cdot) = u_0(\cdot)$.
Dire sotto quali ipotesi su u_0 esiste una soluzione u, discutendone l'intervallo di esistenza nel tempo e la regolarità.

8. Sia $D := B(0,1)$ il disco aperto nel piano (che identifico con $\mathbb{C}$), sia X il sottospazio (chiuso) delle funzioni in $L^2(D, \mathbb{C})$ che sono armoniche, e per ogni $n \in \mathbb{Z}$ sia $u_n : D \to \mathbb{C}$ la funzione data da $u_n(z) := z^n$ se $n \geq 0$ e $u_n(z) := \bar{z}^{-n}$ se $n < 0$. Dimostrare che:
   a) u_n appartiene a X per ogni n;
   b) esistono delle costanti $c_n > 0$ tali che $\mathscr{F} := \{c_n u_n : n \in \mathbb{Z}\}$ è un sistema ortonormale in X;
   c) l'insieme X' delle $u \in X$ che ammettono un'estensione di classe C^∞ a $\overline{D}$ è denso in X;
   d) l'insieme $\mathscr{F}$ al punto b) è un sistema ortonormale completo in X, cioè una base di Hilbert.

[1] Questo implica in particolare che il prodotto di convoluzione in $L^1(\mathbb{R})$ non ammette un elemento neutro.
[2] La misura su Σ è ovviamente la misura di area.

1. Dato $d = 2, 3, \dots$, sia Σ il grafico della funzione $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ data da $g(s) := |s|^2$ e sia $f : \mathbb{R}^{d+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ la funzione data da $f(x) := 1/|x|$. Dire per quali p la funzione f appartiene a $L^p(\Sigma)$.

2. Calcolare la trasformata di Fourier della funzione $g(x) := \dfrac{3}{(1+x^2)(1+4x^2)}$.

3. a) Scrivere la serie di Fourier complessa della funzione $f(t) := \cos^3 t \, \sin t$.

   b) Trovare la funzione armonica $u = u(x, y)$ sul disco unitario D che vale $2x^3 y$ su ∂D.

4. Dati due numeri reali $a, b > 0$, indico con T l'operatore lineare da $L^2(\mathbb{R})$ in sé definito da $T := \tau_a + \tau_{-b}$, dove τ_a è l'operatore di traslazione.

   a) Calcolare l'operatore aggiunto T^*.

   a) Dire per quali a, b l'operatore T è autoaggiunto.

   c) Quando T è autoggiunto, quali sono i suoi autovettori? [*Suggerisco di usare la TdF.*]

5. Sia data una successione di funzioni misurabili $\rho_n : \mathbb{R}^d \to [0, +\infty)$ con integrale 1 e supporto contenuto nella palla $B_n := B(0, r_n)$ dove $r_n \to 0$ per $n \to +\infty$. Sia inoltre $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile. Dimostrare che, per $n \to +\infty$,

   a) se f è limitata e continua in $x_0 \in \mathbb{R}^d$ allora $\rho_n * f(x_0) \to f(x_0)$;

   b) se f è limitata e uniformemente continua allora $\rho_n * f \to f$ uniformemente;

   c) se $f \in L^p$ con $1 \le p < +\infty$ allora $\rho_n * f \to f$ in L^p.

6. Data $a : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ funzione continua, consideriamo il problema (P) dato da
   - l'equazione $u_t = u_{xx} + a(t)\, u$ sull'intervallo spaziale $[0, \pi]$;
   - le condizioni al bordo $u(\cdot, 0) = u(\cdot, \pi) = 0$;
   - la condizione iniziale $u(0, \cdot) = u_0(\cdot)$ dove $u_0(x) := \pi x - x^2$.

   Determinare la soluzione del problema (P) discutendone l'intervallo temporale di esistenza e la regolarità. (L'unicità può essere data per scontata.)

7. Sia $p(x) := 1/|x|$ per ogni $x \in \mathbb{R}^3$ con $x \neq 0$, sia $g : \mathbb{R}^3 \to [0, +\infty)$ una funzione continua con supporto compatto, e sia u il prodotto di convoluzione $u := p * g$.[1] Dimostrare che:

   a) la funzione p è armonica su $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$;

   b) la funzione u è finita e continua su tutto $\mathbb{R}^3$;

   c) la funzione u è armonica nell'aperto $\Omega := \mathbb{R}^3 \setminus \operatorname{supp}(g)$.

8. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione 2π-periodica la cui restrizione a $[-\pi, \pi]$ appartiene a L^1. Per ogni $m = 1, 2, \dots$ indico con C_m le medie di Cesaro delle somme parziali della serie di Fourier di f, vale a dire
$$C_m(x) := \frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m-1} S_n(x) \quad \text{dove} \quad S_n(x) := \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\, e^{ikx}\,.$$
   Dimostrare che:

   a) esistono delle funzioni $G_m : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ (che non dipendono da f) tali che
$$C_m(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\, G_m(t)\, dt \quad \text{per ogni } x;$$

   b) le funzioni G_m hanno integrale 2π e sono positive;

   c) se f è continua allora C_m converge uniformemente a f per $m \to +\infty$.

[1] Poiché g e p sono funzioni positive, $u := p * g$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}^3$ e assume valori in $[0, +\infty]$.

1. Calcolare la serie di Fourier (complessa) della funzione $f(x) := 1 - 8\sin^2 x \cos^2 x$.

2. Sia $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione continua tale che $u(x) = O\big(|x|^{-4}\big)$ per $x \to \pm\infty$. Dimostrare che la Trasformata di Fourier $\widehat{u}$ è una funzione di classe C^2.

3. Sia $d = 2, 3, \dots$ e sia S l'insieme dei punti $(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ tali che $|x| = 1$ e $|y - x| = 2$.

   a) Dimostrare che S è una superficie compatta di classe C^∞ e dimensione $2d - 2$.

   b) Calcolare l'area di S per $d = 2$, riconducendosi all'integrale ellittico $m := \displaystyle\int_0^\pi \sqrt{1 + \sin^2 x}\, dx$.

4. Siano H, H' spazi di Hilbert (reali), D un sottospazio denso di H, e $T : D \to H'$ un'applicazione lineare non necessariamente continua. Indico quindi con D' il sottospazio vettoriale degli $y \in H'$ tali che il funzionale $x \mapsto \langle Tx \,;\, y\rangle$ è continuo. Dimostrare che:

   a) dato $y \in D'$ esiste uno ed un solo $z = z(y) \in H$ tale che $\langle Tx \,;\, y\rangle = \langle x \,;\, z\rangle$ per ogni $x \in D$;

   b) l'applicazione $T^* : D' \to H$ data da $T^* y := z(y)$ è lineare;[1]

   c) se T è continua allora $D' = H'$ e T^* è continua;

   d) se H ha dimensione infinita può succedere che $D' = \{0\}$.

5. Data $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continua e 2π-periodica, considero il problema (P) dato da

   - l'equazione $u_t = u_{xxx}$ nell'intervallo spaziale $[-\pi, \pi]$;
   - le condizioni di periodicità al bordo $D_x^k u(\cdot, -\pi) = D_x^k u(\cdot, \pi)$, per $k = 0, 1, 2$;
   - la condizione iniziale $u(0, \cdot) = u_0(\cdot)$.

   a) Trovare la soluzione di (P) per $u_0(x) := 1 - 8\sin^2 x \cos^2 x$.

   b) Dare delle condizioni sui coefficienti di Fourier di u_0 per cui (P) ammette una soluzione, specificando per quali tempi tale soluzione esiste.

[1] L'applicazione T^* è detta *aggiunta* di T.

6. Sia E l'insieme dei punti $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ tali che $|y|(1 + x^4) \leq 1$. Dire per quali $p \geq 1$ la funzione
$$f(x, y) := \sqrt{x^2 + |y|^4}$$
appartiene a $L^p(E)$. [*Se serve cominciare dai casi* $d = 1$ *e* $d = 2$.]

7. Sia f una funzione localmente sommabile su $\mathbb{R}^d$ tale che la media di f su due palle con lo stesso centro è uguale. Dimostrare che:
   a) se f è continua allora è armonica;
   b) in generale f puó non essere armonica su alcun sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^d$;
   c) f coincide quasi ovunque con una funzione armonica su $\mathbb{R}^d$.

8. Sia (y_n) una successione in $\mathbb{R}^d$ e sia (a_n) una successione in $\mathbb{R}$ tale che $\sum |a_n| < +\infty$. Data $u \in L^p(\mathbb{R}^d)$ con $1 \leq p \leq \infty$ poniamo
$$Tu(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, u(x - y_n)$$
Dimostrare che:
   a) la funzione Tu è ben definita per q.o. $x \in \mathbb{R}^d$ e appartiene a $L^p(\mathbb{R}^d)$;
   b) esiste $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continua e limitata tale che $\widehat{Tu} = g\, \widehat{u}$ per ogni $u \in L^1(\mathbb{R}^d)$.
   [*Riguardo al punto a), cominciare se serve dal caso* $u \geq 0$ *e* $a_n \geq 0$.]

1. Calcolare la Trasformata di Fourier di $g(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^2 \exp(-x^2/2)$.

2. Per ogni $m \in \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{Z}$ consideriamo il coefficiente di Fourier $c(m,n) := c_n(x^{2m})$. Scrivere $c(m,0)$ e $c(0,n)$ per ogni m,n e trovare una formula ricorsiva in m per $c(m,n)$ quando $n \neq 0$.

3. Sia D il disco chiuso di centro 0 e raggio 1 nel piano $\mathbb{R}^2$ (identificato con $\mathbb{C}$), e sia $u_0 : \partial D \to \mathbb{R}$ la funzione data da $u_0(z) := (\arg z)^2$ dove $\arg z \in (-\pi, \pi]$ è la coordinata angolare di z. Trovare l'estensione armonica di u_0 a tutto D, vale a dire la funzione continua $u : D \to \mathbb{R}$ che coincide con u_0 su ∂D ed è armonica all'interno di D.

4. Sia $I := [-\pi, \pi]$ e sia P l'applicazione lineare che ad ogni $u \in L^1(I)$ associa la funzione Pu data da
$$Pu(x) := \int_{-\pi}^{x} u(t)\, dt \quad \text{per ogni } x \in I.$$
   a) Dimostrare che Pu appartiene a $C(I)$ per ogni $u \in L^1(I)$;

   b) Dimostrare che l'applicazione lineare $P : L^1(I) \to C(I)$ è continua;

   c) Dimostrare che $P : L^1(I) \to L^p(I)$ è continua per ogni $p \in [1, +\infty)$;

   d) Supponendo che $\int_I u\, dt = 0$, esprimere il coefficiente di Fourier $c_n(Pu)$ in funzione di $c_n(u)$ per ogni $n \neq 0$.

5. Posto $f(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(x^2 - 1)\exp(-x^2/2)$, consideriamo l'equazione
$$u * u = f \tag{*}$$
   dove l'incognita u appartiene a $L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$.

   a) Scrivere esplicitamente due soluzioni di $(*)$.

   b) Discutere il numero delle soluzioni di $(*)$.

   [*Suggerimento: usare la Trasformata di Fourier.*]

6. Sia $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione 2π-periodica di classe C^1. Consideriamo il problema $(*)$ dato dall'equazione $u_t = (1 - \sin t)\, u_{xx}$ sull'intervallo spaziale $[-\pi, \pi]$ con le condizioni di periodicità al bordo $u(\cdot, \pi) = u(\cdot, -\pi)$ e $u_x(\cdot, \pi) = u_x(\cdot, -\pi)$ e la condizione iniziale $u(0, \cdot) = u_0(\cdot)$. Discutere l'esistenza (nel futuro) e la regolarità della soluzione di $(*)$.

   [*L'unicità può essere data per scontata.*]

7. Sia Σ l'insieme dei punti $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ tali che $|y| = x^2$.

   a) Dimostrare che $\Sigma^* := \Sigma \setminus \{(0, 0)\}$ è una superficie di classe C^∞;

   b) dimostrare che Σ non è una superficie di classe C^1;

   c) trovare una parametrizzazione di Σ^* e calcolarne lo Jacobiano;

   d) dire per quali $p \in [1, +\infty)$ la funzione $u(x, y) := 1/|(x, y)|$ appartiene a $L^p(\Sigma^*)$.

8. Sia $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ una funzione con integrale a e sia $h \in L^\infty(\mathbb{R})$ una funzione τ-periodica con media m sul periodo. Per ogni $y \in \mathbb{R}^d$ ed ogni $s \in \mathbb{R}$ poniamo

$$\Phi(y, s) := \int_{\mathbb{R}^d} g(x)\, h(x \cdot y + s)\, dx\,.$$

   Dimostrare che:

   a) $⨍_0^\tau \Phi(y, s)\, ds = ma$ per ogni y;

   b) $\Phi(y, s) = \int_{\mathbb{R}^d} g(x - sy/|y|^2)\, h(x \cdot y)\, dx$ per ogni s ed ogni $y \neq 0$;

   c) per ogni s si ha che $\Phi(y, s) - \Phi(y, 0)$ tende a 0 per $|y| \to +\infty$;

   d) $\Phi(y, 0) \to ma$ per $|y| \to +\infty$;[1]

   e) la Trasformata di Fourier di g è una funzione infinitesima all'infinito.

[1] Questa è un'estensione a dimensione d del lemma di Riemann-Lebesgue generalizzato.

SOLUZIONI

1. Usando l'identità $f(x) := \cos(ax) = \frac{1}{2}(e^{iax} + e^{-iax})$ ottengo
$$\begin{aligned}
c_n(f) &= \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(n-a)x} + e^{-i(n+a)x}dx \\
&= \frac{1}{4\pi}\left|\frac{e^{-i(n-a)x}}{-i(n-a)} + \frac{e^{-i(n+a)x}}{-i(n+a)}\right|_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{i}{4\pi}\left[\frac{e^{-i(n-a)\pi} - e^{i(n-a)\pi}}{n-a} + \frac{e^{-i(n+a)\pi} - e^{i(n+a)\pi}}{n+a}\right] \\
&= \frac{i(-1)^n}{4\pi}\left[\frac{e^{ia\pi} - e^{-ia\pi}}{n-a} + \frac{e^{-ia\pi} - e^{ia\pi}}{n+a}\right] = \frac{(-1)^{n+1}a\sin(a\pi)}{\pi(n^2-a^2)}\,,
\end{aligned}$$
e in particolare per $n \to \pm\infty$ ho che
$$|c_n(f)| \sim \frac{c}{n^2} \quad \text{con} \quad c := \frac{|a\sin(a\pi)|}{\pi}\,.$$

2. La funzione f appartiene a $L^p(E)$ per ogni $p \le \infty$ perché appartiene a $L^\infty(E)$ ed E ha misura finita. Per dimostrare quest'ultima affermazione calcolo la misura di E usando il teorema di Fubini ed il fatto che la sezione $(d-1)$-dimensionale di E ad altezza x_1, vale a dire l'insieme
$$E_{x_1} := \big\{(x_2,\dots,x_d) \in \mathbb{R}^{d-1} \colon (x_1,\dots,x_d) \in E\big\}$$
è la palla centro 0 e raggio $1/x_1^2$ in $\mathbb{R}^{d-1}$ e ha quindi volume $(d-1)$-dimensionale pari a
$$|E_{x_1}| = \frac{\alpha_{d-1}}{x_1^{2d-2}}$$
dove α_{d-1} è il volume della palla unitaria in $\mathbb{R}^{d-1}$. Dunque
$$|E| = \int_1^\infty |E_{x_1}|\,dx_1 = \int_1^\infty \frac{\alpha_{d-1}}{x_1^{2d-2}}\,dx_1 = \frac{\alpha_{d-1}}{2d-3}\,.$$

3. Scrivo L^2 per $L^2([0,2])$ e indico con $u_1, u_2 \in L^2$ le funzioni indicatrici degli intervalli $[0,1]$ e $(1,2]$, rispettivamente. Posso allora riscrivere X come
$$X = \big\{v \in L^2 \colon \langle v\,;\, u_1\rangle = \langle v\,;\, u_2\rangle = 0\big\} = \{u_1, u_2\}^\perp\,.$$
Questo implica che X è un sottospazio chiuso e che
$$X^\perp = (\{u_1,u_2\}^\perp)^\perp = \operatorname{Span}\{u_1,u_2\}\,,$$
in altre parole $X^\perp$ è l'insieme delle funzioni che sono q.o. costanti su $[0,1]$ e su $[1,2]$.
Inoltre u_1, u_2 formano un sistema *ortonormale* e quindi, data $u \in L^2([0,2])$ e posto
$$m_1 := \langle u\,;\, u_1\rangle = \int_0^1 u\,dx\,, \quad m_2 := \langle u\,;\, u_2\rangle = \int_1^2 u\,dx\,,$$
le proiezioni di di u su $X^\perp$ e X sono date rispettivamente da
$$u' := m_1\,u_1 + m_2 u_2 = \begin{cases} m_1 & \text{su } [0,1] \\ m_2 & \text{su } (1,2] \end{cases}, \quad u'' := u - u' = \begin{cases} u - m_1 & \text{su } [0,1] \\ u - m_2 & \text{su } (1,2] \end{cases}. \tag{1.1}$$

4. a) Usando il fatto che f è A-invariante e poi il cambio di variabile $t = Ax$ ottengo
$$\|f\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} |f(Ax)|^p\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} |f(t)|^p\,\frac{dt}{|\det A|} = \frac{1}{|\det A|}\|f\|_p^p\,,$$
da cui segue che $|\det A| = 1$, ovvero $\det A = \pm 1$.
b) Usando il cambio di variabile $y = At$ e poi il fatto che f e g sono A-invarianti ottengo che per ogni $x \in \mathbb{R}^d$ vale
$$\begin{aligned}
f * g(Ax) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(Ax-y)\,g(y)\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(Ax-At)\,g(At)\,|\det A|\,dt = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-t)\,g(t)\,dt = f * g(x)\,.
\end{aligned}$$

c) Ricordo che una funzione su $\mathbb{R}^d$ si dice *radiale* se dipende solo da $|x|$, ovvero se è costante su tutte le sfere con centro nell'origine, ovvero se è A-invariante per ogni matrice $A \in O(d)$. Pertanto se f e g sono radiali, allora sono A-invarianti per ogni $A \in O(d)$, e per il punto b) ho che anche $f * g$ è A-invariante per ogni $A \in O(d)$, e quindi è radiale.

5. a) La funzione $|f| * |g|$ è ben definito in ogni punto, 2π-periodica (la verifica è immediata), e soddisfa

$$\begin{aligned}\big\||f| * |g|\big\|_{L^1(-\pi,\pi)} &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \big|f(x-y)\big| \, \big|g(y)\big| \, dy \right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \big|f(x-y)\big| \, dx \right) \big|g(y)\big| \, dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\pi-y}^{\pi-y} \big|f(t)\big| \, dt \right) \big|g(y)\big| \, dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \big|f(t)\big| \, dt \right) \big|g(y)\big| \, dy = \|f\|_{L^1(-\pi,\pi)} \|g\|_{L^1(\mathbb{R})}\end{aligned}$$

(nel secondo passaggio ho usato il teorema di Fubini, e nel terzo ho usato il cambio di variabile $t = x - y$, nel quarto il fatto che $|f|$ è 2π-periodica). Riassumendo

$$\big\||f| * |g|\big\|_{L^1(-\pi,\pi)} = \big\|f\big\|_{L^1(-\pi,\pi)} \big\|g\big\|_{L^1(\mathbb{R})} . \tag{1.2}$$

Dalla (1.2) se gue che $|f| * |g|(x) < +\infty$ per q.o. $x \in [-\pi, \pi]$, e lo stesso vale per q.o. $x \in \mathbb{R}$ per via della periodicità di $|f| * |g|$. Come visto a lezione, per tali x la funzione $f * g(x)$ è ben definita e $|f * g(x)| \le |f| * |g|(x)$, e la (1.2) implica quindi

$$\big\|f * g\big\|_{L^1(-\pi,\pi)} \le \big\||f| * |g|\big\|_{L^1(-\pi,\pi)} = \big\|f\big\|_{L^1(-\pi,\pi)} \big\|g\big\|_{L^1(\mathbb{R})} .$$

Infine è facile verificare che la funzione $f * g$ è 2π-periodica.

b) Calcolo i coefficienti di Fourier di $f * g$:

$$\begin{aligned}c_n(f * g) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\, g(y)\, dy \right) e^{-inx}\, dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)\, e^{-in(x-y)}\, dx \right) g(y)\, e^{-iny}\, dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt \right) g(y)\, e^{-iny}\, dy = c_n(f)\, d_n(g) .\end{aligned}$$

(Nel secondo passaggio ho usato il teorema di Fubini e l'identità $e^{-inx} = e^{-in(x-y)} e^{-iny}$, e nel terzo ho usato il cambio di variabile $t = x - y$ e il fatto che f è 2π-periodica; l'uso del teorema di Fubini è giustificato dalla stima

$$\begin{aligned}&\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \big|f(x-y)\, g(y)\, e^{-inx}\big| \, dy\, dx \\ &\qquad = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)|\, |g(y)|\, dy\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} |f| * |g|\, dx < +\infty ,\end{aligned}$$

dove la disuguaglianza finale segue dalla (1.2).)

6. Come prima cosa trovo una formula risolutiva per (P) seguendo la procedura formale vista a lezione: indicando con $c_n(t)$ i coefficienti di Fourier di $u(t, \cdot)$ e con c_n^0 quelli del dato iniziale u_0 ottengo che le funzioni c_n risolvono il problema di Cauchy

$$\begin{cases} i\dot{y} = -(1+n^2) y \\ y(0) = c_n^0 \end{cases} \tag{1.3}$$

da cui segue che $c_n(t) = c_n^0 e^{i(1+n^2)t}$. Dunque la formula risolutiva per (P) è

$$u(t, x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underbrace{c_n^0\, e^{i(1+n^2)t + inx}}_{u_n(t,x)} . \tag{1.4}$$

Per capire dove tale serie converge e dà una soluzione del problema (P) scrivo la formula per le derivate dell'addendo u_n: dati $h, k = 0, 1, 2, \dots$ vale

$$D_t^h D_x^k u_n(t,x) = c_n^0 \, (i(1+n^2))^h (in)^k e^{i(1+n^2)t+inx}$$

e dunque

$$\left| D_t^h D_x^k u_n(t,x) \right| = |c_n^0| (1+n^2)^h |n|^k \, .$$

Quest'ultima formula mostra che la norma del sup della derivata non dipende dalla scelta del dominio, e che quindi possiamo considerare come dominio direttamente $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, ottenendo

$$\left\| D_t^h D_x^k u_n \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R})} = |c_n^0| (1+n^2)^h |n|^k \sim |c_n^0| |n|^{2h+k} \, . \tag{1.5}$$

Vale quindi il seguente teorema di esistenza: *se i coefficienti di Fourier del dato iniziale u_0 soddisfano*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^2 |c_n^0| < +\infty \tag{1.6}$$

(cosa che è garantita dall'ipotesi $u_0 \in C^3_{\text{per}}$) allora la funzione $u(t,x)$ nella formula (1.4) è ben definita per ogni $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, è di classe C^1 in t e di classe C^2 in x, e risolve (P).

Ecco la dimostrazione. L'ipotesi (1.6) e la stima (1.5) implicano che la serie di funzioni in (1.4) converge totalmente su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e che lo stesso vale per le derivate di ordine 1 in t e di ordine 1 e 2 in x, cose che dimostrano la buona definizione e la regolarià di u.

La funzione u è chiaramente 2π-periodica in x, e quindi soddisfa le condizioni di periodicità al bordo in (P). Inoltre u soddisfa la condizione iniziale perché i coefficienti di Fourier di $u(0,\cdot)$ sono gli stessi di u_0 (come imposto nel problema di Cauchy (1.3) che li definisce), e infine soddisfa l'equazione $iu_t = -u + u_{xx}$ perché la soddisfano tutti gli addendi u_n della serie in (1.4) (e la convergenza della serie permette di scambiare derivate e somma).

7. Comincio con un'osservazione preliminare: per ogni $n = 0, 1, \dots$ e $h = 1, \dots, 2^n$ considero l'intervallo "diadico"

$$I(n,h) := \left[\frac{h-1}{2^n}, \frac{h}{2^n} \right) ;$$

si dimostra facilmente (per induzione su n) che ogni funzione u_k con $1 \leq k \leq 2^n$ assume valore costante $+1$ o -1 su questo intervallo, mentre ogni funzione u_k con $2^n < k \leq 2^{n+1}$ assume valore $+1$ su metà dell'intervallo e -1 sull'altra metà.

a) L'uguaglianza $\|u_k\|_2 = 1$ è un'immediata conseguenza del fatto che u_k assume valori ± 1. Per dimostrare l'ortogonalità di $\mathscr{F}$ definisco le sottofamiglie

$$\mathscr{F}_n := \{ u_k \colon 1 \leq k \leq 2^n \}$$

e ne dimostro l'ortogonalità per induzione su n.

Nel caso $n = 0$ non c'è niente da dimostrare perchè $\mathscr{F}_0$ contiene una sola funzione.

Dimostro quindi che l'ortogonalità di $\mathscr{F}_{n+1}$ segue da quella di $\mathscr{F}_n$. Date due funzioni u_h, u_k in $\mathscr{F}_{n+1}$, cioè con $h < k \leq 2^{n+1}$, si presentano tre possibilità:

- se $h < k \leq 2^n$ allora u_h, u_k appartengono a $\mathscr{F}_n$ e sono ortogonali per ipotesi induttiva;
- se $h \leq 2^n < k \leq 2^{n+1}$ allora la funzione $u_h u_k$ assume valore $+1$ per metà di ogni intervallo $I(n,m)$ e valore -1 per l'altra metà (per via dell'osservazione preliminare fatta sopra) e dunque ha integrale nullo su tale intervallo; ne segue che

$$\langle u_h \, ; \, u_k \rangle = \int_I u_h u_k \, dx = \sum_{m=1}^{2^n} \int_{I(n,m)} u_h u_k \, dx = 0 \, .$$

- se $2^n < h < k \leq 2^{n+1}$ scrivo

$$u_h(x) = u(2^n x) \, u_{h'}(x) \, , \quad u_k(x) = u(2^n x) \, u_{k'}(x) \, ,$$

con $h' := h - 2^n$ e $k' := k - 2^n$, e quindi, ricordando che $u = \pm 1$,

$$\langle u_h \, ; \, u_k \rangle = \int_I \big(u(2^n x) \big)^2 u_{h'}(x) \, u_{k'}(x) \, dx = \int_I u_{h'}(x) \, u_{k'}(x) \, dx = \langle u_{h'} \, ; \, u_{k'} \rangle = 0 \, ,$$

dove l'ortogonalità di $u_{h'}$ e $u_{k'}$ segue dal fatto che appartengono a $\mathscr{F}_n$.

b) Per ogni $n = 0, 1, \ldots$ definisco la funzione $v_n : I \to \{\pm 1\}$ come $v_n(x) := u(2^n x)$.
Si dimostra facilmente (per induzione su n) che le funzioni in $\mathscr{F}_n$ sono la funzione costante 1 e tutti i possibili prodotti di un numero finito di funzioni scelte tra $v_1, \ldots, v_n$. Ne segue che $\mathscr{F}_n$ è chiusa per prodotto e lo stesso vale quindi anche per $\mathscr{F}$. Questo implica che anche lo spazio vettoriale $\mathrm{Span}(\mathscr{F})$ è chiuso per prodotto, e dunque è un algebra.

c) Avendo già dimostrato che $\mathscr{F}_n$ è un sistema ortonormale, resta da far vedere che è completo, ovvero che $\mathrm{Span}(\mathscr{F}_n)$ è denso in $L^2(I)$.
Fissato $n = 1, 2, \ldots$, indico con $\mathscr{G}_n$ l'insieme delle funzioni $f : I \to \mathbb{R}$ che sono costanti su ogni intervallo $I(n, h)$ con $h = 1, \ldots, 2^n$. Per quanto osservato all'inizio, $\mathrm{Span}(\mathscr{F}_n)$ è contenuto in $\mathscr{G}_n$. Inoltre questi due spazi vettoriali hanno entrambi dimensione 2^n e quindi coincidono:

$$\mathrm{Span}(\mathscr{F}_n) = \mathscr{G}_n \,.$$

($\mathrm{Span}(\mathscr{F}_n)$ ha dimensione 2^n perché $\mathscr{F}_n$ è un sistema ortonormale di cardinalità 2^n mentre $\mathscr{G}_n$ ha dimensione 2^n perchè le funzioni indicatrici degli intervalli $I(n, h)$ con $h = 1, \ldots, 2^n$ ne formano una base.)
In particolare $\mathrm{Span}(\mathscr{F}_n)$ contiene le indicatrici di tutti gli intervalli contenuti in $[0, 1]$ i cui estremi sono razionali diadici, vale a dire numeri della forma $h2^{-n}$ con h, n interi. Abbiamo quindi già visto a lezione che in tal caso $\mathrm{Span}(\mathscr{F}_n)$ è denso in $L^2(I)$.

8. Detta $\mathscr{F}$ la classe dei dati iniziali in questione, vale il seguente enunciato: *una funzione continua $u_0 : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ appartiene a $\mathscr{F}$ se e solo se i coefficienti di Fourier c^0_n soddisfano*

$$\lim_{n\to\pm\infty} \frac{\log |c^0_n|}{n^2} = -\infty \,. \tag{1.7}$$

Dimostro prima il “se”.
Per la precisione faccio vedere che se vale la (1.7) allora la formula risolutiva per l'equazione del calore con condizioni di periodicità al bordo, vale a dire

$$u(t, x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underbrace{c^0_n \, e^{-n^2 t + inx}}_{u_n(t,x)} , \tag{1.8}$$

definisce una funzione di classe C^∞ su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ che risolve (P').
Per dimostrare ciò basta far vedere che la serie delle funzioni u_n in (1.8) converge totalmente su $R_a := [-a, +\infty) \times \mathbb{R}$ per ogni $a > 0$, e lo stesso vale per la serie delle derivate parziali di qualunque ordine. Fissati $h, k = 0, 1, \ldots$ ho che

$$D^h_t D^k_x u_n(t, x) = c^0_n \, (-n^2)^h (in)^k e^{-n^2 t + inx}$$

e quindi

$$\big\| D^h_t D^k_x u_n \big\|_{L^\infty(R_a)} = |c^0_n| \, |n|^{2h+k} e^{n^2 a} = \frac{e^{a_n}}{|n|^2} \tag{1.9}$$

dove ho posto

$$a_n := \log |c^0_n| + a n^2 + (2h + k + 2) \log n \,.$$

L'ipotesi (1.7) implica che la parte principale di a_n per $n \to \pm\infty$ è proprio $\log |c^0_n|$ e dunque a_n tende a $-\infty$, e^{a_n} tende a 0, e la (1.9) diventa

$$\big\| D^h_t D^k_x u_n \big\|_{L^\infty(R_a)} = o\big(1/n^2\big) \,,$$

che a sua volta implica che la serie delle funzioni $D^h_t D^k_x u_n$ converge totalmente su R_a.

Dimostro ora il “solo se”.
Per la precisione faccio vedere che se (P') ammette una soluzione $u : \mathbb{R} \times [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ continua e di classe C^1 in t e C^2 in x, allora vale la (1.7). Detti come al solito $c_n(t)$ i coefficienti di Fourier di $u(t, \cdot)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, so che tali coefficienti sono dati dalla formula

$$c_n(t) = c^0_n \, e^{-n^2 t} \,.$$

Siccome la funzione $u(t, \cdot)$ appartiene a $L^2(-\pi, \pi)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, i coefficienti $c_n(t)$ tendono a 0 per $n \to \pm\infty$, ovvero $\log \big| c_n(t) \big|$ tende a $-\infty$, e siccome

$$\log \big| c_n(t) \big| = \log |c^0_n| - n^2 t = n^2 \bigg(\frac{\log |c^0_n|}{n^2} - t \bigg) \,,$$

ho che necessariamente

$$\limsup_{n\to\pm\infty} \frac{\log |c_n^0|}{n^2} \le t\,.$$

Infine la (1.7) segue dall'arbitrarietà di t.

COMMENTI

- La quasi totalità dei presenti ha dimostrato, nella soluzione di un esercizio o di un altro, di non avere un'idea precisa del significato del simbolo $\sim$. Chiarisco una volta per tutte che questo simbolo indica l'*equivalenza asintotica*, e quindi "$f(x) \sim g(x)$ per $x \to x_0$" significa che $f(x)/g(x) \to 1$ per $x \to x_0$, ovvero che $f(x) = g(x) + o(g(x))$.

- Esercizio 1. Alla domanda sul comportamento asintotico dei coefficienti c_n per $n \to \pm\infty$ alcuni dei presenti hanno risposto dicendo che c_n tende a 0. Ora, senza stare a sindacare sulla definizione precisa, "comportamento asintotico" vuol dire qualcosa di più fine che "limite". Pertanto le risposte accettabili erano diverse, tra cui $c_n = O(1/n^2)$, e meglio ancora $|c_n| \sim c/n^2$, ma non $c_n \to 0$ (che tra l'altro segue semplicemente dal fatto che la successione (c_n) è in ℓ^2).

- Esercizio 1. Diversi dei presenti hanno sbagliato i calcoli ottenendo alla fine dei coefficienti di ordine $1/n$. Era possibile accorgersi dell'errore osservando che questo risultato è incompatibile con il fatto che $\cos(ax)$ è una funzione di classe C^1 sull'intervallo $[-\pi, \pi]$ che assume lo stesso valore agli estremi: per tali funzioni, infatti la serie $\sum_n |c_n|$ è sempre finita.

- Esercizio 2. Alcuni dei presenti non si sono accorti del fatto che E ha misura finita ma hanno stimato dall'alto la norma $\|f\|_p$ usando la disuguaglianza

$$f(x) = \frac{1}{|x|^a} \le \frac{1}{x_1^a}$$

e il teorema di Fubini (come già fatto nella soluzione data sopra):

$$\|f\|^p_{L^p(E)} = \int_E \frac{1}{x_1^{ap}}\,dx = \int_1^\infty \frac{|E_{x_1}|}{x_1^{ap}}\,dx_1 = \int_1^\infty \frac{\alpha_{d-1}}{x_1^{ap+2d-2}}\,dx_1$$

e questo integrale è finito per ogni $p \ge 1$ perché $ap + 2d - 2 \ge 2d - 2 > 1$.

- Esercizio 2. Alcuni dei presenti hanno osservato che E è contenuto nel complementare E' della palla di centro 0 e raggio 1, e quindi stimato dall'alto la norma di f in $L^p(E)$ calcolando quella di $L^p(E')$. Questa stima è ben lungi dall'essere ottimale, visto che E' ha misura infinita mentre E ha misura finita, e permette di dimostrare che f appartiene a L^p solo per certi p.

- Esercizio 2. Molti dei presenti hanno fatto errori gravi nello svolgimento di questo esercizio. Per esempio alcuni sono passati da un integrale in d variabili ad uno in 2 variabili semplicemente eliminando le variabili che non apparivano nell'integranda, con un procedimento che può essere ricondotto al seguente: data g funzione su $\mathbb{R}$ allora

$$\int_{\mathbb{R}^2} g(y_1)\,dy_1\,dy_2 = \int_{\mathbb{R}} g(y_1)\,dy_1\,.$$

- Esercizio 3. Se uno ha *intuito* che $X^\perp = \mathrm{Span}\{u_1, u_2\}$ e che le proiezioni ortogonali di u su $X^\perp$ e X sono le funzioni u' e u'' date dalla formula (1.1), allora può limitarsi a dimostrare che
  (i) $\mathrm{Span}\{u_1, u_2\} \perp X$ ed in particolare $u' \perp X$;
  (ii) $u'' \in X$.
  Infatti $u' \perp X$ e $u'' \in X$ implicano automaticamente che u'' ed u' sono le proiezioni ortogonali di u su X e $X^\perp$, che X è chiuso (altrimenti non varrebbe il teorema sull'esistenza delle proiezioni) e che $X^\perp$ è contenuto in $\mathrm{Span}\{u_1, u_2\}$; siccome per (i) vale anche l'inclusione opposta si deduce infine che $X^\perp = \mathrm{Span}\{u_1, u_2\}$.

- Esercizio 3a). Alcuni dei presenti hanno dimostrato che X è un sottospazio chiuso osservando è il kernel dell'applicazione lineare e continua $T : L^2([0,2]) \to \mathbb{R}^2$ data da
$$T : v \mapsto \left(\int_0^1 v\,dx,\ \int_1^2 v\,dx \right).$$
Altri hanno dimostrato prima che X è un sottospazio e poi che è un sottoinsieme chiuso perché è il luogo di zeri di una funzioni continua (ma non lineare) $T : L^2([0,2]) \to \mathbb{R}$ come ad esempio
$$T : v \mapsto \left| \int_0^1 v\,dx \right| + \left| \int_1^2 v\,dx \right|.$$
Una dimostrazione di questo tipo è sicuramente corretta, ma inutilmente complicata, e quindi non va molto bene.

- Esercizio 3b). Alcuni dei presenti hanno dimostrato che X è chiuso facendo vedere che il limite v di una successione di elementi v_n di X deve appartenere a X, e per farlo hanno usato il fatto che v_n converge puntualmente a v (a meno di sottosuccessioni) e quindi è possibile passare al limite negli integrali che definiscono X. Questo è un errore grave, perché i teoremi di passaggio al limite degli integrali richiedono tutti delle ipotesi aggiuntive oltre alla convergenza puntuale delle funzioni integrande.

- Esercizio 3. X è definito come l'insieme delle $v \in L^2([0,2])$ che soddisfano le equazioni lineari
$$\int_0^1 v\,dx = 0\,, \quad \int_1^2 v\,dx = 0\,,$$
e dunque è contenuto nell'insieme Y delle v che soddisfano l'equazione
$$\int_0^2 v\,dx = 0\,.$$
Vari dei presenti hanno scritto che $X = Y$. Si tratta di un errore grave, perché uno dovrebbe sapere che due equazioni lineari possono essere rimpiazzate da un'unica equazione lineare solo se una delle prime due è implicata all'altra, cosa che in questo caso evidentemente non succede.

- Esercizio 4. Nella soluzione data sopra ho usato che una funzione f su $\mathbb{R}^d$ è radiale se e solo se è A-invariante per ogni matrice $A \in O(d)$. In effetti vale la stessa cosa con $A \in SO(d)$ o anche con un qualunque insieme di rotazioni che agisce transitivamente sulla sfera unitaria.

- Esercizio 4. Alcuni dei presenti hanno sostenuto che una funzione f è radiale se e solo se è A-invariante per ogni matrice A con $\det A = \pm 1$. Non è così: l'insieme delle matrici con determinante 1 agisce transitivamente su $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ per ogni $d > 1$, e quindi le funzioni A-invarianti per tutte le A in questo insieme sono solo le funzioni costanti su $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$.

- Esercizio 5a). Molti dei presenti hanno scritto che le funzioni in L^1_{per} appartengono a L^∞ (e qualcuno lo ha anche dimostrato). Si tratta di un errore grave.

- Esercizio 5a). Diversi dei presenti hanno iniziato la soluzione scrivendo
$$\int_\pi^\pi \big|f * g(x)\big|\,dx \le \int_\pi^\pi \int_{-\infty}^{\infty} \big|f(x-y)\big|\,\big|g(y)\big|\,dy\,dx = \cdots$$
Questa stima è corretta ma presuppone di aver già dimostrato che la funzione $f * g(x)$ è ben definita per q.o. x, cosa che le persone di cui parlo non hanno fatto.
La soluzione data sopra è molto simile, nel senso che la stima è la stessa ed è ottenuta allo stesso modo, ma a differenza di questa contiene la dimostrazione del fatto che $f * g$ è ben definita.

- Esercizio 5b). Molti dei presenti hanno ricavato l'identità cercata senza però giustificare l'uso del teorema di Fubini.

- Esercizio 6. Diversi dei presenti hanno scritto la formula risolutiva (1.4), cioè la soluzione u come serie delle funzioni u_n, e poi hanno scritto:
$$\Big| \sum_n u_n(t,x) \Big| \le \sum_n \big|u_n(t,x)\big| = \sum_n |c_n^0| < +\infty\,.$$

Ad essere precisi questa è una stima del valore assoluto di $u(t,x)$ che presuppone la convergenza della serie, ma non è una dimostrazione della convergenza della serie.
Alcuni dei presenti hanno invece scritto la stima *puntuale*

$$\sum_n |u_n(t,x)| = \sum_n |c_n^0| < +\infty \,,$$

e ne hanno correttamente dedotto che u è ben definita in ogni punto (t,x). Questa stima tuttavia non dimostra che u è continua, e tanto meno derivabile. Per dimostrare la continuità di u serve la convergenza *uniforme* della serie, cosa che può essere ottenuta solo attraverso la convergenza totale, cioè attraverso una stima delle norma del sup delle funzioni u_n.

- Esercizio 6. Diversi dei presenti hanno detto che la funzione u è di classe C^2 in x perché le serie di funzioni $\sum u_n$ e $\sum (u_n)_{xx}$ convergono totalmente. Questo enunciato è corretto ma non segue dal lemma usato a lezione, che richiede anche la convergenza totale della serie $\sum (u_n)_x$.

- Esercizio 7. Una dimostrazione alternativa dei punti a) e b) è la seguente. Ad ogni k intero positivo associo la sequenza $(\alpha_0, \alpha_1, \dots)$ delle cifre di $k-1$ in base 2, nel senso che

$$k - 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cdot 2^n \,.$$

Si dimostra facilmente per induzione che

$$u_k(x) = \prod_{n=0}^{\infty} \big(u(2^n x)\big)^{\alpha_n}$$

(siccome u assume valori ± 1, ho che $u^\alpha = 1$ per α pari, quindi i fattori in questo prodotto sono tutti uguali a 1 da un certo n in poi, e il prodotto è in realtà un prodotto finito).
Dati ora k_1, k_2 interi positivi, e dette $(\alpha_{1,n})$ e $(\alpha_{2,n})$ le sequenze associate, indico con k l'intero positivo a cui è associata la sequenza (α_n) data da

$$\alpha_n = \alpha_{1,n} + \alpha_{2,n} \ \mathrm{mod}(2) \qquad \text{per } n = 0, 1, \dots$$

Allora

$$u_{k_1}\, u_{k_2} = u_k \,, \tag{1.10}$$

quindi la famiglia $\mathscr{F}$ è chiusa per prodotto, e $\mathrm{Span}(\mathscr{F})$ è un algebra.
Osservo ora che

$$\int_I u_k\, dx = \begin{cases} 1 & \text{se } k = 1 \\ 0 & \text{se } k > 1 \end{cases}$$

(per la precisione si dimostra per induzione su n che se $2^n < k \leq 2^{n+1}$ allora u_k assume valore 1 in metà di ogni intervallo diadico $I(n,h)$ con $h = 1, \dots, 2^n$ e valore -1 nell'altra metà, dunque u_k ha integrale nullo su ciascuno di questi intervalli, e quindi anche su I).
Osservo inoltre che $k = 1$ se e solo se $\alpha_{1,n} = \alpha_{2,n}$ per ogni n, cioè $k_1 = k_2$.
Mettendo insieme queste due osservazioni e l'identità (1.10) ottengo

$$\langle u_{k_1} \,;\, u_{k_2} \rangle = \int_I u_k\, dx = \begin{cases} 1 & \text{se } k = 1, \text{ cioè } k_1 = k_2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e ho quindi dimostrato l'ortonormalità di $\mathscr{F}$.

- Esercizio 7a). Molti dei presenti hanno dimostrato che $|u_k| = 1$ per induzione su k, mentre segue semplicemente dal fatto che u_k è prodotto di funzioni a valori ± 1 e quindi ha valori ± 1.

- Esercizio 7c). Per dimostrare la completezza di $\mathscr{F}$, ovvero la densità di $\mathrm{Span}(\mathscr{F})$ in $L^2(I)$, alcuni hanno invocato il Teorema di Stone-Weierstrass. Il problema è che $\mathrm{Span}(\mathscr{F})$ non è un'algebra di funzioni continue.

- Esercizio 8. Partendo dalla formula risolutiva per l'equazione del calore (1.8), diversi dei presenti hanno cercato di stimare

$$\big\| D_t^h D_x^k u_n \big\|_{L^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R})}$$

senza accorgersi che se $c_n^0 \neq 0$ allora tale norma è $+\infty$ per ogni h, k.

- Esercizio 8. Molti dei presenti hanno dato come condizione sufficiente per l'esistenza della soluzione per tutti i tempi, che $|c_n^0| = O\big(e^{-n^\alpha}\big)$ per $n \to \pm\infty$ e per un opportuno $\alpha > 2$. Tale condizione è sufficiente ma non necessaria.
  Alcuni hanno scritto $|c_n^0| \sim e^{-n^\alpha}$ intendendo probabilmente la stessa cosa, senza accorgersi che questa condizione è molto più restrittiva.

- Esercizio 8. Molti dei presenti hanno ottenuto una corretta condizione sufficiente espressa in termini del comportamento di $|c_n^0|$, ma poi, piuttosto sorprendentemente, l'hanno tradotta male in termini di $\log|c_n^0|$. Per esempio, qualcuno ha scritto la condizione $|c_n^0| = o(e^{-mn^2})$ per ogni $m > 0$, e l'ha tradotta in $\log|c_n^0| = o(1/n^2)$ oppure $n^2 \ll \big|\log|c_n^0|\big|$, senza accorgersi queste ultime due condizioni non implicano neanche che c_n^0 tende a 0.

1. Calcolo la TdF di f usando il metodo dei residui. Per la precisione osservo che
$$\widehat{f}(y) = \lim_{r\to+\infty} \int_{\gamma_{1,r}} g(z)\, dz \tag{2.1}$$
dove
$$g(z) := \frac{z^2 e^{-iyz}}{4+z^4}$$
e $\gamma_{1,r} : [-r,r] \to \mathbb{C}$, $\gamma_{1,r}(t) := t$, parametrizza il segmento di estremi $-r$ e r.
Sia ora $\gamma_{2,r} : [0,\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma_{2,r}(t) := re^{it}$, cosicché la concatenazione di $\gamma_{1,r}$ e $\gamma_{2,r}$, che indico con γ_r, parametrizza in senso antiorario la frontiera del semi-disco aperto dato dall'intersezione del disco $B(0,r)$ con il semipiano superiore $\{\mathrm{Re}\, z > 0\}$.
Suppongo ora $y \le 0$ e osservo che nei punti di $\gamma_{2,r}$ vale la stima
$$|g(z)| = \frac{|z|^2\, e^{y\,\mathrm{Im}\, z}}{|4+z^4|} \le \frac{|z|^2}{|z|^4 - 4} = O\Big(\frac{1}{r^2}\Big)$$
(siccome $y \le 0$ e $\mathrm{Im}\, z \ge 0$ ho che $e^{y\,\mathrm{Im}\, z} \le 1$), e tenendo conto che la lunghezza di $\gamma_{2,r}$ è πr ottengo che
$$\lim_{r\to+\infty} \int_{\gamma_{2,r}} g(z)\, dz = 0\,.$$
Quindi la (2.1) può essere riscritta come
$$\widehat{f}(y) = \lim_{r\to+\infty} \bigg(\int_{\gamma_{1,r}} g(z)\, dz + \int_{\gamma_{2,r}} g(z)\, dz \bigg) = \lim_{r\to+\infty} \int_{\gamma_r} g(z)\, dz\,,$$
e posso finalmente applicare il teorema dei residui:
$$\widehat{f}(y) = 2\pi i \sum_z \mathrm{Res}(g,z)\,,$$
dove la somme è fatta su tutti i poli z di g contenuti nel semipiano superiore, vale a dire gli z in cui si annulla il denominatore $4+z^4$, vale a dire $z = \pm 1 + i$. Poiché ciascuno di questi punti è uno zero semplice di $4+z^4$ ottengo infine
$$\begin{aligned}\widehat{f}(y) &= 2\pi i \sum_{z=\pm1+i} \mathrm{Res}(g,z)\\ &= 2\pi i \sum_{z=\pm1+i} \frac{z^2 e^{-iyz}}{4z^3} = 2\pi i \sum_{z=\pm1+i} \frac{\bar z\, e^{-iyz}}{4|z|^2} = \frac{\pi i}{4} \sum_{z=\pm1+i} \bar z\, e^{-iyz}\\ &= \frac{\pi}{4}\Big[(1+i)e^{y(1-i)} + (1-i)e^{y(1+i)}\Big] = \frac{\pi}{2}\, e^y \big(\cos y + \sin y\big) = \frac{\pi}{\sqrt 2}\, e^y \sin(\pi/4 + y)\end{aligned}$$
Quello appena trovato è il valore di $\widehat{f}(y)$ per $y \le 0$, e tenendo conto che $\widehat{f}$ è una funzione pari (perché f è pari) ottengo infine
$$\widehat{f}(y) = \frac{\pi}{\sqrt 2}\, e^{-|y|} \sin(\pi/4 - |y|)\,.$$

2. Basta far vedere che la TdF di $x^k \exp(-x^2/2)$ appartiene a X_k per ogni k. Da questo e dalla linearità della TdF segue che la TdF porta X_d in sé, e il resto della tesi segue dal fatto che X_d ha dimensione finita e dunque la TdF, essendo iniettiva, deve essere anche surgettiva.
Usando la formula $\widehat{u}' = \widehat{-ix\, u}$ e l'identità $\mathscr{F}\big(\exp(-x^2/2)\big) = \sqrt{2\pi}\, \exp(-y^2/2)$ ottengo
$$\begin{aligned}\mathscr{F}\big(x^k \exp(-x^2/2)\big) &= i^k \mathscr{F}\big((-ix)^k \exp(-x^2/2)\big)\\ &= i^k\, D^k\Big(\mathscr{F}\big(\exp(-x^2/2)\big)\Big) = \sqrt{2\pi}\, i^k D^k\big(\exp(-y^2/2)\big)\,,\end{aligned}$$
e concludo dimostrando, per induzione su k, che $D^k\big(\exp(-x^2/2)\big) \in X_k$ per ogni k. Il caso $k = 0$ è ovvio, mentre il passo induttivo segue dal fatto che la derivata di una funzione in X_k appartiene a X_{k+1}: dato infatti un polinomio p di grado al più k ho che
$$\big(p(x)\, \exp(-x^2/2)\big)' = \big(p'(x) - x\, p(x)\big)\, \exp(-x^2/2)$$
e il polinomio $p' - x\,p$ ha grado al più $k+1$.

3. Dimostro innanzitutto che la funzione ϕ è radiale, cioè invariante per rotazioni: data infatti R matrice in $O(3)$ ho che
$$\phi(Ry) = \int_{\mathbb{S}^2} e^{-ix\cdot(Ry)} d\sigma_2(x) = \int_{\mathbb{S}^2} e^{-i(R^t x)\cdot y} d\sigma_2(x) = \int_{\mathbb{S}^2} e^{-iz\cdot y} d\sigma_2(z) = \phi(y)$$
(nel penultimo passaggio ho usato il fatto che l'integrale sulla sfera è invariante rispetto alla composizione con rotazioni).
La radialità di ϕ implica che $\phi(y)$ è uguale a $\phi(|y|, 0, 0)$, che calcolo usando la parametrizzazione standard della sfera, vale a dire
$$x = (x_1, x_2, x_3) = (\cos\alpha, \sin\alpha\cos\beta, \sin\alpha\sin\beta) \quad \text{con } \alpha \in [0, \pi],\ \beta \in [0, 2\pi].$$
Ricordando che il determinante Jacobiano di questa parametrizzazione è $\sin\alpha$ ottengo
$$\begin{aligned}\phi(y) = \phi(|y|, 0, 0) &= \int_{\mathbb{S}^2} e^{-ix_1|y|} d\sigma_2(x) \\ &= \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi} e^{-i|y|\cos\alpha} \sin\alpha \, d\alpha \, d\beta \\ &= 2\pi \int_0^{\pi} e^{-i|y|\cos\alpha} \sin\alpha \, d\alpha = 2\pi \left| \frac{e^{-i|y|\cos\alpha}}{i|y|} \right|_0^{\pi} = 4\pi \frac{\sin|y|}{|y|} \, .\end{aligned}$$
(Ad essere precisi questo calcolo vale per $y \neq 0$, ma è facile vedere che $\phi(0) = 4\pi$.)

4. Date $u, v \in X$ ho che
$$\langle Tu\,;\, v\rangle = \int_0^1 (au - \ddot{u})v \, dx = \int_0^1 auv \, dx - \int_0^1 \ddot{u}v \, dx \, ,$$
e integrando per parti il secondo integrale, e ricordando che $v(0) = 0$ e $\dot{u}(1) = 0$, ottengo
$$\langle Tu\,;\, v\rangle = \int_0^1 auv \, dx - \Big| \dot{u}v \Big|_0^1 + \int_0^1 \dot{u}\dot{v} \, dx = \int_0^1 auv + \dot{u}\dot{v} \, dx \, . \tag{2.2}$$
a) Usando la (2.2) ottengo $\langle Tu\,;\, v\rangle = \langle Tv\,;\, u\rangle$, e questo significa che T è autoaggiunto.
b) Usando la (2.2) ottengo anche
$$\langle Tu\,;\, u\rangle = \int_0^1 au^2 + \dot{u}^2 \, dx \, . \tag{2.3}$$
Questa identità implica immediatamente che T è semi-definito positivo per ogni $a \geq 0$. Dimostro quindi che T è definito positivo per ogni $a \geq 0$: preso infatti $u \in X$ tale che $\langle Tu\,;\, u\rangle = 0$ ho che $\int \dot{u}^2 \, dx = 0$ e questo implica che $\dot{u} = 0$ ovunque e quindi u è una costante, e la costante è zero perché $u(0) = 0$.
D'altra parte usando l'identità (2.3) con $u(x) := \sin(\pi x/2)$ ottengo (con qualche calcolo)
$$\langle Tu\,;\, u\rangle = \frac{4a + \pi^2}{8}$$
da cui segue che T non è definito positivo per $a \leq -\pi^2/4$.
Riassumendo, T è definito positivo per $a \geq 0$, non lo è per $a \leq -\pi^2/4$, e nei rimanenti casi non si sa (per ulteriori dettagli vedere i commenti in fondo).

5. a) Sia data una successione di funzioni armoniche u_n in $L^p(\Omega)$ con limite u: devo dimostrare che u coincide q.o. con una funzione armonica $\tilde{u} : \Omega \to \mathbb{R}$.
Comincio con un'osservazione: se $u_n(x)$ tende a $u(x)$ allora u ha la proprietà della media sulle palle centrate in x. Infatti, siccome le funzioni u_n sono armoniche, per ogni $r > 0$ tale che la palla chiusa $B(x, r)$ è contenuta in Ω vale
$$u_n(x) = \fint_{B(x,r)} u_n \, d\mathscr{L}^d$$
e passando al limite per $n \to +\infty$ ottengo
$$u(x) = \fint_{B(x,r)} u \, d\mathscr{L}^d \tag{2.4}$$

(la convergenza degli integrali segue dal fatto che dato un insieme E di misura finita in Ω l'applicazione lineare $v \mapsto \int_E v \, d\mathscr{L}^d$ è continua su $L^p(\Omega)$ per ogni $p \geq 1$).

Nel caso $p = +\infty$ ho finito, perchè so che le funzioni u_n convergono uniformemente ad una funzione continua $\tilde{u}$ che coincide con u quasi ovunque, e la dimostrazione sopra mostra che $\tilde{u}$ ha la proprietà della media sulle palle, e per quanto visto a lezione è armonica.

Nel caso $p < +\infty$ le cose sono più complicate. Passando se necessario ad una sotto-successione di n posso infatti supporre che esista un insieme trascurabile N tale che

$$\lim_{n \to +\infty} u_n(x) = u(x) \quad \text{per ogni } x \in \Omega \setminus N,$$

e quindi u ha la proprietà della media sulle palle centrate in ogni $x \in \Omega \setminus N$. Per finire la dimostrazione faccio dunque vedere che esiste una funzione continua $\tilde{u} : \Omega \to \mathbb{R}$ che coincide con u su $\Omega \setminus N$ e soddisfa la proprietà della media in tutti i punti di Ω.
Per ogni $r > 0$ indico con Ω_r l'insieme (aperto) dei punti di Ω tali che $\operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > r$ e definisco la funzione $u_r : \Omega_r \to \mathbb{R}$ come

$$u_r(x) := \fint_{B(x,r)} u \, d\mathscr{L}^d = \frac{1}{|B(0,r)|} \int_\Omega 1_{B(x,r)} u \, d\mathscr{L}^d \, .$$

È facile vedere che u_r è continua su tutto Ω_r (per esempio usando il teorema di convergenza dominata) e coincide con u su $\Omega_r \setminus N$ per via di (2.4).
Questo dimostra che la restrizione di u a $\Omega_r \setminus N$ è continua e può essere estesa per continuità a tutto Ω_r, e tale estensione è proprio u_r. Siccome poi l'unione degli aperti Ω_r con $r > 0$ è tutto Ω, ottengo che la restrizione di u a $\Omega \setminus N$ è continua e può essere estesa per continuità a tutto Ω; inoltre tale estensione, che indico con $\tilde{u}$, coincide con u_r su Ω_r. Quest'ultima affermazione significa proprio che $\tilde{u}$ soddisfa la proprietà della media sulle palle in ogni $x \in \Omega$.

b) Dato D disco aperto di $\mathbb{R}^2$ (che identifico con $\mathbb{C}$), prendo $z_0 \in \partial D$ e pongo

$$u(z) := \operatorname{Re} \frac{1}{(z - z_0)^2} \quad \text{per ogni } z \neq z_0. \tag{2.5}$$

Com'è noto, la funzione u è armonica su $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ e dunque anche su D; voglio adesso far vedere che u non appartiene a $L^1(D)$, e quindi neanche a $L^p(D)$ per alcun $p \geq 1$. Posso liberamente supporre $z_0 = 0$, e detto r il raggio di D, posso trovare $\theta_0 < \theta_1$ tali che il settore circolare

$$D' := \left\{ z = \rho e^{i\theta} : \theta_0 < \theta < \theta_1, \, 0 < \rho < r \right\}$$

è contenuto in D. Ma allora

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^1(D)} \geq \int_{D'} |u| \, d\mathscr{L}^2 &= \int_{\theta_0}^{\theta_1} \int_0^r \left| \frac{\cos(2\theta)}{\rho^2} \right| \rho \, d\rho \, d\theta \\ &= \left[\int_{\theta_0}^{\theta_1} |\cos(2\theta)| \, d\theta \right] \left[\int_0^r \frac{d\rho}{\rho} \right] = +\infty \, . \end{aligned}$$

Considero adesso Ω aperto qualunque in $\mathbb{R}^2$. Per $\Omega = \mathbb{R}^2$ mi basta osservare che le funzioni costanti sono armoniche e non appartengono ad alcun $L^p(\mathbb{R}^2)$. Per Ω diverso da $\mathbb{R}^2$ scelgo $z_1 \in \Omega$, indico con z_0 un punto di $\partial\Omega$ che minimizza la distanza da z_1 (esiste perché $\partial\Omega$ è chiuso e non vuoto) e prendo u come sopra. Chiaramente u è armonica su Ω. Inoltre, detto D il disco aperto di centro z_1 e raggio $r := |z_1 - z_0|$, ho che $u \notin L^p(D)$ per ogni $p \geq 1$, e siccome D è contenuto in Ω ho anche che $u \notin L^p(\Omega)$ per ogni $p \geq 1$.

6. Tenendo conto delle condizioni al bordo rappresento l'incognita u in serie di seni rispetto alla variabile x, ovvero cerco una soluzione u della forma

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \, \sin(nx) \, .$$

Procedendo al solito modo si vede che ogni coefficiente b_n deve necessariamente risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} = (5 - n^2) y \\ y(0) = b_{0,n} \end{cases}$$

dove $b_{0,n}$ sono i coefficienti della rappresentazione del dato iniziale u_0 in serie di seni. Dunque $b_n(t) = b_{0,n}\, e^{(5-n^2)t}$, e la soluzione di (P) dovrebbe essere

$$u(t,x) := \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{b_{0,n}\, e^{(5-n^2)t} \sin(nx)}_{u_n} . \tag{2.6}$$

Affermo che sotto l'ipotesi

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_{0,n}| < +\infty \tag{2.7}$$

la serie in (2.6) definisce una funzione continua u su $[0,+\infty)\times\mathbb{R}$ che è anche C^∞ su $(0,+\infty)\times\mathbb{R}$ e risolve (P).
Per dimostrarlo definisco $R_\delta := [\delta,+\infty)\times\mathbb{R}$ per ogni $\delta \geq 0$ ed osservo quanto segue:

- $\|u_n\|_{L^\infty(R_0)} = |b_{0,n}|$ per ogni $n \geq 3$, quindi l'ipotesi (2.7) implica che la serie di funzioni in (2.6), esclusi i primi due addendi, converge totalmente su R_0, e dunque u è una funzione ben definita e continua su R_0.
- Dati $h, k = 0, 1, \dots$ vale che
$$D_t^h D_x^k u_n(t,x) = b_{0,n}(5-n^2)^h n^k e^{(5-n^2)t} g_k(x)$$
con $g_k \in \{\pm\sin(nx)\,, \pm\cos(nx)\}$; ricordando che i coefficienti $b_{0,n}$ sono equilimitati, per ogni $\delta > 0$ e per $n \geq 3$ ottengo
$$\begin{aligned}\big\|D_t^h D_x^k u_n\big\|_{L^\infty(R_\delta)} &= |b_{0,n}|\, |5-n^2|^h n^k e^{(5-n^2)t}\\ &= O\big(n^{2h+k} e^{-n^2\delta}\big) = o(1/n^2) \quad \text{per } n \to +\infty.\end{aligned}$$
Questo implica che la serie in (2.6), esclusi i primi due addendi, converge totalmente su R_δ come pure la serie delle derivate di ogni ordine, quindi u è di classe C^∞ su R_δ, e per l'arbitrarietà di δ anche su $(0,+\infty)\times\mathbb{R}$.
- La funzione u risolve l'equazione differenziale lineare (P) su tutto $(0,+\infty)\times\mathbb{R}$ perché la risolvono tutti gli addendi u_n della serie in (2.6) e la convergenza è abbastanza forte da permettere di scambiare serie e derivate (di qualunque ordine).
- È immediato verificare che u soddisfa le condizioni iniziali e le condizioni al bordo in (P).

Resta da capire per quali u_0 si ha che $\|u(t,\cdot)\|_2 \to 0$ per $t \to +\infty$. A questo proposito ricordo che le funzioni $\sqrt{2/\pi}\,\sin(nx)$ formano una base di Hilbert di $L^2(0,\pi)$ e quindi

$$\big\|u(t,\cdot)\big\|_2^2 = \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_{0,n}^2 e^{2(5-n^2)t}\,,$$

da cui segue che

$$\frac{\pi}{2}(b_{0,1}^2 + b_{0,2}^2)e^{2t} \leq \big\|u(t,\cdot)\big\|_2^2 \leq \frac{\pi}{2}(b_{0,1}^2 + b_{0,2}^2)e^{8t} + \frac{\pi}{2}\bigg(\sum_{n=3}^{\infty} b_{0,n}^2\bigg)e^{-8t}$$

(la serie tra parentesi è finita per via dell'ipotesi (2.7) e dell'inclusione $\ell^1 \subset \ell^2$). Queste due stime implicano che $\|u(t,\cdot)\|_2$ tende a 0 per $t \to +\infty$ se e solo se $b_{0,1} = b_{0,2} = 0$, vale a dire

$$\int_0^\pi u_0(x)\, \sin x\, dx = \int_0^\pi u_0(x)\, \sin(2x)\, dx = 0\,.$$

7. Al solito identifico $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$ (tramite l'identificazione canonica $z = x + iy \simeq (x,y)$) e di conseguenza identifico $\mathbb{C}^d$ con $\mathbb{R}^{2d}$. Inoltre per ogni $z = x + iy$ definisco la matrice reale

$$M(z) := \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}\,;$$

osservo che

$$\det M(z) = |z|^2\,, \tag{2.8}$$

e detta I è la matrice identità 2×2,

$$M^t(z)\, M(z) = |z|^2 I\,. \tag{2.9}$$

Usando questa notazione, il gradiente di f nel punto z è la matrice $2d \times 2$ data da

$$\nabla f(z) = \begin{pmatrix} M(f_1'(z)) \\ \vdots \\ M(f_d'(z)) \end{pmatrix} . \tag{2.10}$$

a) Mi basta dimostrare che $\nabla f(z)$ ha rango massimo (cioè 2) per ogni $z \in D$. L'ipotesi $f'(z) \neq 0$ implica che esiste j tale che $f_j'(z) \neq 0$, quindi la formula (2.8) implica che $M(f_j'(z)$ ha rango 2, e la formula (2.10) implica che $\nabla f(z)$ ha pure rango 2.

b) Grazie alle formule (2.10) e (2.9) ottengo

$$\big(Jf(z)\big)^2 = \det\big(\nabla^t f(z)\, \nabla f(z)\big) = \det\Big(\big(|f_1'(z)|^2 + \cdots + |f_d'(z)|^2\big) I\Big) = |f'(z)|^4 ,$$

e la formula dell'area diventa

$$\sigma_2(\Sigma) = \int_D |f'|^2 \, d\mathscr{L}^2$$

c) Sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^2$ la mappa olomorfa data da

$$f(z) := (z^5, z^2) ,$$

e sia D il disco aperto di centro 0 e raggio 1 in $\mathbb{C}$. Dico che

(i) la restrizione di f a D è un omeomorfismo da D in Σ;

(ii) l'insieme $\Sigma^* := \Sigma \setminus \{(0,0)\}$ è una superficie senza bordo di dimensione 2 in $\mathbb{C}^2 \simeq \mathbb{R}^4$ parametrizzata dalla restrizione di f all'aperto $D^* := D \setminus \{0\}$.

Per dimostrare (i) osservo verifico che f è continua e che $f(D)$ è contenuto in Σ (cosa che è immediata), e poi mostro che la restrizione di f a D ammette un'inversa continua, vale a dire la mappa $g : \Sigma \to D$ definita da

$$g(z_1, z_2) := \begin{cases} z_1 z_2^{-2} & \text{se } (z_1, z_2) \in \Sigma^*, \\ 0 & \text{se } (z_1, z_2) = (0,0). \end{cases}$$

In effetti è facile verificare che g è ben definita e continua su Σ^*, inoltre l'equazione $z_1^2 = z_2^5$ implica $|z_2| = |z_1|^{2/5}$ e quindi

$$|g(z_1, z_2)| = |z_1|\, |z_2|^{-2} = |z_1|^{1/5} ,$$

e questa identità implica immediatamente che g è continua anche in $(0,0)$ e che $|g(z_1, z_2)| < 1$, ovvero $g(z_1, z_2)$ appartiene a D.
La verifica del fatto che g è l'inversa di f è un semplice calcolo.
Per dimostrare (ii) osservo che $f'(z) = (5z^4, 2z) \neq 0$ per ogni $z \neq 0$ e uso il punto a).
Per calcolare l'area di Σ, o equivalentemente quella di Σ^*, uso la formula al punto b):

$$\sigma_2(\Sigma) = \int_D |f'|^2 \, d\mathscr{L}^2 = \int_D 25\, |z|^8 + 4|z|^2 \, d\mathscr{L}^2(z) = \int_0^1 (25\rho^8 + 4\rho^2)\, 2\pi\rho \, d\rho = 7\pi .$$

8. a) Usando la definizione di $\widehat{u}(y)$ e il teorema di Fubini ottengo [1]

$$\begin{aligned} u_r(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-r}^{r} \widehat{u}(y)\, e^{ixy} \, dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-r}^{r} \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\, e^{i(x-t)y} \, dt \, dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \left(\int_{-r}^{r} e^{i(x-t)y} \, dy \right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \left| \frac{e^{i(x-t)y}}{i(x-t)} \right|_{-r}^{r} dt = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\, \frac{\sin(r(x-t))}{\pi(x-t)} \, dt , \end{aligned}$$

[1] Il teorema di Fubini l'ho usato nel secondo passaggio, giustificato dal fatto che

$$\int_{-r}^{r} \int_{-\infty}^{\infty} |u(t)\, e^{i(x-t)y}| \, dt \, dy = \int_{-r}^{r} \int_{-\infty}^{\infty} |u(t)| \, dt \, dy = 2r\|u\|_1 < +\infty .$$

ovvero

$$u_r(x) = u * g_r(x) \quad \text{con} \quad g_r(x) := r\, g(rx)\,,\ g(x) := \frac{\sin x}{\pi x}\,. \tag{2.11}$$

b) Il fatto che g non appartiene a $L^1(\mathbb{R})$ è ben noto e lo si può dimostrare tramite la minorazione $|g(x)| \geq h(x)$ dove

$$h(x) := \begin{cases} \frac{1}{2\pi(k+1)} & \text{se } |x - k\pi| \leq \pi/3 \text{ con } k = 1, 2, \dots, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Il fatto che l'integrale improprio di g su $\mathbb{R}$ esiste e vale 1 è ben noto e lo si può dimostrare con il metodo dei residui (ometto i dettagli).

c) Usando il cambio di variabile $x = rt$ ottengo che, per $r \to +\infty$,

$$\int_{-1}^{1} g_r(t)\, dt = \int_{-r}^{r} g(x)\, dx \to 1\,,$$

e dunque per dimostrare che $u_r(x_0) \to u(x_0)$ mi basta far vedere che

$$a_r := u_r(x_0) - u(x_0) \int_{-1}^{1} g_r(t)\, dt \to 0\,.$$

Uso l'identità (2.11) per riscrivere opportunamente a_r:

$$\begin{aligned} a_r &= u * g_r(x_0) - u(x_0) \int_{-1}^{1} g_r(t)\, dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u(x_0 - t)\, g_r(t)\, dt - \int_{-1}^{1} u(x_0)\, g_r(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, \sin(rt)\, dt \end{aligned} \tag{2.12}$$

dove

$$h(t) := \begin{cases} \frac{u(x_0 - t) - u(x_0)}{t} & \text{se } -1 \leq t \leq 1, \\ \frac{u(x_0 - t)}{t} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Ottengo infine che $a_r \to 0$ per $r \to +\infty$ applicando il Lemma di Riemann-Lebesgue all'ultimo integrale in (2.12); per fare ciò devo dimostrare che la funzione h appartiene a $L^1(\mathbb{R})$, e infatti

$$\begin{aligned} \|h\|_1 &= \int_{[-1,1]} \frac{|u(x_0 - t) - u(x_0)|}{|t|}\, dt + \int_{\mathbb{R}\setminus[-1,1]} \frac{|u(x_0 - t)|}{|t|}\, dt \\ &\leq \int_{[-1,1]} \frac{C|t|^\alpha}{|t|}\, dt + \int_{\mathbb{R}\setminus[-1,1]} |u(x_0 - t)|\, dt = 2C \int_0^1 \frac{dt}{t^{1-\alpha}} + \|u\|_1 < +\infty \end{aligned}$$

(nel secondo passaggio ho usato l'Hölderianità di u in x_0).

Commenti

- Esercizio 1. Molti dei presenti hanno calcolato la TdF di f riconducendosi alla trasformata di $g := 1/(1 + x^2)$, che è già nota. Il punto di partenza è la seguente identità:

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{x^2}{x^4 + 4} &= \frac{x^2}{((x-1)^2 + 1)((x+1)^2 + 1)} \\ &= \frac{x}{4}\left[\frac{1}{(x-1)^2 + 1} - \frac{1}{(x+1)^2 + 1}\right] = \frac{x}{4}(\tau_1 g - \tau_{-1} g)\,, \end{aligned}$$

dove al solito $\tau_a g(x) := g(x - a)$. Usando quindi le formule $\widehat{-ixu} = (\widehat{u})'$, $\widehat{\tau_a u} = e^{-iay}\,\widehat{u}$, e $\widehat{g} = \pi e^{-|y|}$ si ottiene

$$\begin{aligned} \widehat{f} &= \frac{i}{4}\mathscr{F}\big(-ix(\tau_1 g - \tau_{-1} g)\big) \\ &= \frac{i}{4}\big(\mathscr{F}(\tau_1 g - \tau_{-1} g)\big)' \\ &= \frac{i}{4}\big((e^{-iy} - e^{iy})\,\widehat{g}\big)' = \frac{\pi}{2}\big(\sin y\, e^{-|y|}\big)' = \frac{\pi}{2} e^{-|y|}\big(\cos y - \sin|y|\big)\,. \end{aligned}$$

- Esercizio 3. Nel dimostrare che la funzione ϕ è radiale ho usato il fatto che l'integrale di una funzione g sulla sfera è invariante rispetto alla composizione con rotazioni, cioè che per ogni matrice $R \in O(3)$ si ha
$$\int_{\mathbb{S}^2} g(Rx)\, d\sigma_2(x) = \int_{\mathbb{S}^2} g(t)\, d\sigma_2(t)\,.$$
La dimostrazione precisa di questo enunciato intuitivamente ovvio non era richiesta.
Volendo dare tutti i dettagli, si tratta di dimostrare che la mappa $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$, $f(x) := Rx$, ha Jacobiano 1 in ogni punto x, ovvero che il differenziale $df(x)$, inteso come applicazione lineare da $\mathrm{Tan}(\mathbb{S}^2, x)$ in $\mathrm{Tan}(\mathbb{S}^2, f(x))$, ha determinante 1; questo segue dal fatto che $df(x) : v \mapsto Rv$ e dunque $df(x)$ è un'isometria lineare, e come tutte le isometrie manda basi ortonormali in basi ortonormali e pertanto ha determinante 1.
Attenzione: il punto non è che il determinate della matrice R è 1, come invece hanno scritto alcuni dei presenti. Infatti esistono matrici $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ con determinante 1 tali che la restrizione dell'applicazione lineare $v \mapsto Mv$ a qualche piano in $\mathbb{R}^3$ non ha determinante 1.

- Esercizio 4b). Alcuni dei presenti hanno ottenuto una stima assai migliore di quella data sopra, facendo vedere che T è definito positivo per $a > -2$: usando infatti l'identità
$$u(x) = u(x) - u(0) = \int_0^x \dot u\, dt = \int_0^1 1_{[0,x]}\, \dot u\, dt$$
e la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz si ottiene
$$|u(x)| \le \|1_{[0,x]}\|_2 \|\dot u\|_2 = \sqrt{x}\, \|\dot u\|_2\,,$$
da cui segue che
$$\|u\|_2^2 = \int_0^1 |u(x)|^2\, dx \le \int_0^1 x \|\dot u\|_2^2\, dx = \frac{1}{2} \|\dot u\|_2^2\,.$$
Pertanto
$$\langle Tu\,;\, u\rangle = a\|u\|_2^2 + \|\dot u\|_2^2 \ge (a+2)\, \|u\|_2^2\,,$$
e se $a > -2$ allora $\langle Tu\,;\, u\rangle > 0$ per ogni $u \ne 0$.

- Esercizio 4b). Si può dimostrare che T è definito positivo se e solo se $a > -\pi^2/4$, ma questo enunciato è piuttosto delicato. In mancanza di un teorema spettrale in dimensione infinita, una dimostrazione consiste nel trovare una base di Hilbert di L^2 fatta di autovettori dell'operatore autoaggiunto $S : X \to L^2(I)$, $Su := -\ddot u$, scrivere poi $\langle Tu\,;\, u\rangle$ in termini dei coefficienti di u rispetto a questa base, ed ottenere quindi che $\langle Tu\,;\, u\rangle > 0$ per ogni $u \ne 0$ se e solo se $a > -\lambda$, dove λ è il più piccolo degli autovalori di S.

- Esercizio 4b). Diversi dei presenti hanno testato la positività di T usando funzioni u che non appartenevano a X (prendendo u uguale a una funzione costante non nulla si ottiene per esempio che T non è definito positivo per $a \le 0$).

- Esercizio 5a). Moti dei presenti hanno cercato di dimostrare che data una successione di funzioni armoniche u_n che converge in $L^p(\emptyset)$ ad u, allora la funzione u è armonica, mentre si deve dimostrare che esiste una funzione $\tilde u$ nella classe di equivalenza di u che è armonica. Inoltre la maggior parte dei presenti ha dimostrato correttamente che u ha la proprietà della media sulle palle in quasi ogni punto, ma non ha notato che questo non è sufficiente a concludere, perché manca la continuità di u e che la proprietà della media vale in ogni punto.

- Esercizio 5a). Una dimostrazione alternativa consiste nell'usare le stime viste nell'ultima lezione per far vedere che le funzioni u_n hanno gradienti equilimitati in ogni aperto Ω_r, e quindi sono uniformemente continue in Ω_r. Da questo segue che (a meno di sotto-successioni) le funzioni u_n convergono uniformemente su ogni Ω_r ad una funzione continua $\tilde u : \Omega \to R$, che ovviamente coincide con u quasi ovunque. Si dimostra facilmente che $\tilde u$ ha la proprietà della media sulle palle e quindi è armonica.

- Esercizio 5b). Molti dei presenti hanno scritto che la funzione olomorfa $1/z$ non appartiene a $L^1(B(0,r))$, ma usando le coordinate polari si ottiene

$$\int_{B(0,r)} \frac{1}{|z|}\, d\mathscr{L}^2(z) = \int_0^r \frac{1}{\rho} 2\pi\rho\, d\rho = 2\pi r\,.$$

- Esercizio 5b). Alcuni dei presenti hanno scritto usato come esempi di funzioni armoniche, funzioni del tipo $g(|z|)$, con g funzione analitica/olomorfa. In realtà le funzioni di questo tipo sono armoniche solo in pochissimi casi.

- Esercizio 6. Si può dimostrare che la serie

$$\sum_{n=3}^{\infty} b_{0,n}^2 e^{2(5-n^2)t}$$

tende a 0 per $t \to +\infty$ in diversi modi. Uno è quello usato nella dimostrazione sopra, un'altro è osservare che ciascun addendo tende a 0 per $t \to +\infty$ e inoltre è possibile trovare una dominazione, cioè trovare una successione $(a_n) \in \ell^1$ tale che $b_{0,n}^2 e^{2(5-n^2)t} \le a_n$ per ogni n ed ogni $t \le ge0$ (questo è esattamente il teorema di convergenza dominata nel caso in cui la misura è quella che contai i punti in $\mathbb{N}$). Attenzione, contrariamente a quello che hanno scritto alcuni, la sola convergenza puntuale degli addendi non basta.

- Esercizio 7a). Nella versione originale dello scritto avevo dimenticato di specificare che f è *propria*. Questa ipotesi significa che per ogni K compatto in $\Sigma := f(D)$ vale che $f^{-1}(K)$ è compatto in D o, equivalentemente, che per ogni successione di punti z_n in D che non ha punti di accumulazione in D (cioè $\operatorname{dist}(z_n, \partial D) \to 0$) vale che $f(z_n)$ non ha punti di accumulazione in Σ. Senza questa ipotesi non è detto che f sia un omeomorfismo con tra D e $f(D)$ (pur essendo bigettiva e continua).

- Esercizio 7b). Stranamente, il calcolo di $\nabla^t f\, \nabla f$ e di Jf è stato sbagliato da quasi tutti. In particolare molti hanno scritto identità tra matrici che non avevano senso, perché erano sbagliate le dimensioni delle matrici coinvolte. Per esempio $\nabla^t f\, \nabla f = |f'|^2$ (invece di $\nabla^t f\, \nabla f = |f'|^2 I$).

- Esercizio 7c). Invece di parametrizzare l'insieme Σ usando un'unica mappa come fatto sopra (cioè $f : D \to \Sigma$, $f(z) := (z^5, z^2)$), è possibile parametrizzarlo "a pezzi" usando le mappe olomorfe $f_\pm : D' \to \Sigma$ date da

$$f_\pm(z) := \big(\pm z^{5/2}, z \big)\,,$$

dove l'insieme D' è dato da D meno la semiretta dei numeri reali positivi o nulli, e $z^{5/2}$ è la determinazione della radice quadrata di z^5 data in coordinate polari da

$$z^{2/5} := \rho^{5/2} \exp(5i\theta/2) \quad \text{con } 0 < \theta < 2\pi.$$

Si vede che $f_\pm$ sono parametrizzazioni regolari degli insiemi $\Sigma_\pm := f_\pm(D')$, e che questi insiemi sono disgiunti e la loro unione è Σ meno la curva dei punti $(\pm\sqrt{t}, t)$ con $0 \le t \le 1$.

- Esercizio 7c). Diversi dei presenti hanno scritto una parametrizzazione $f : D \to \Sigma$ corretta ma nessuno ha veramente verificato che fosse tale. Alcuni hanno scritto la parametrizzazione f senza specificare il dominio D.

- Esercizio 8a). Diversi dei presenti hanno ottenuto la rappresentazione $u_r = u * g_r$ come segue: partendo dal fatto che la trasformata della funzione indicatrice $1_{[-1,1]}$ è $2\sin y/y$ e applicando la formula di inversione per le funzioni L^2 (e ricordando che l'anti-trasformata coincide con la trasformata per le funzioni pari) si ottiene

$$g(x) := \frac{\sin x}{\pi x} \quad \Rightarrow \quad \widehat{g}(y) = 1_{[-1,1]}(y)\,,$$

di conseguenza

$$g_r(x) := r g(rx) = \sigma_{1/r} g(x) \quad \Rightarrow \quad \widehat{g_r}(y) = 1_{[-1,1]}(y/r) = 1_{[-r,r]}(y)\,,$$

e quindi

$$u_r = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{g}_r(y)\,\widehat{u}(y)\,e^{ixy}\,dy = \frac{1}{2\pi}\mathscr{F}^*\big(\widehat{g}_r\,\widehat{u}\big) = \frac{1}{2\pi}\mathscr{F}^*\big(\widehat{g_r * u}\big) = g_r * u\,.$$

Tuttavia rendere questa dimostrazione completamente rigorosa è piuttosto complicato. Per cominciare la funzione g_r appartiene a L^2 ma non a L^1, e quindi il terzo passaggio richiede che la formula $\widehat{u * v} = \widehat{u}\,\widehat{v}$ valga per $u \in L^1$ e $v \in L^2$, mentre a lezione è stata dimostrata solo per $u, v \in L^1$. Anche l'ultimo passaggio è delicato: usando che $g_r * u$ appartiene a L^2, la formula di inversione per funzioni in L^2 mi dice solo che $u_r(x) = u * g_r(x)$ per quasi ogni x, e per ottenere che questa identità vale per ogni x devo usare il fatto che sia u_r che $u * g_r$ sono continue (il prodotto $u * g_r$ è continuo perchè $u \in L^1$ e $g_r \in L^\infty$).

- Esercizio 8b). Alcuni dei presenti hanno dimostrato che g ha integrale 1 applicando l'identità $\widehat{g}(y) = 1_{[-1,1]}(y)$ per $y = 0$:

$$1 = 1_{[-1,1]}(0) = \widehat{g}(0) = \int_{\mathbb{R}} g(x)\,dx\,.$$

Il problema è che g appartiene a L^2 ma non a L^1, e quindi l'identità $\widehat{g}(y) = 1_{[-1,1]}(y)$ vale per quasi ogni y, ma non necessariamente per tutti.

1. Mi riconduco al fatto (noto) che la TdF di $g(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2)$ è $\widehat{g}(y) = \exp(-y^2/2)$.
Osservo infatti che
$$f(x) := x\, \exp(-ax^2) = \sqrt{2\pi}\, x\, g\big(\sqrt{2a}\, x\big) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, x\, \sigma_\delta g(x)$$
con $\delta := 1/\sqrt{2a}$, e utilizzando note formule ottengo
$$\begin{aligned}\widehat{f}(y) &= i\sqrt{\frac{\pi}{a}}\, \mathscr{F}\big(-ix\,\sigma_\delta g\big) = i\sqrt{\frac{\pi}{a}}\, \big(\mathscr{F}(\sigma_\delta g)\big)' \\ &= i\sqrt{\frac{\pi}{a}}\, \big(\widehat{g}(\delta y)\big)' = i\sqrt{\frac{\pi}{a}}\, \bigg(\exp\Big(-\frac{y^2}{4a}\Big)\bigg)' = -i\sqrt{\frac{\pi}{4a^3}}\, y\, \exp\Big(-\frac{y^2}{4a}\Big)\,.\end{aligned}$$

2. Dimostro innanzitutto che il valore $Tu(x)$ è ben definito per quasi ogni x: infatti $u \in L^p(Q)$ implica $u \in L^1(Q)$, e il teorema di Fubini-Tonelli di ce esattamente che in tal caso l'integrale che definisce $Tu(x)$ esiste ed è finito per quasi ogni x.
Osservo inoltre che
$$|Tu(x)| \le \int_I |u(x,y)|\, dy \le \bigg(\int_I |u(x,y)|^p\, dy\bigg)^{1/p} \tag{3.1}$$
(nell'ultimo passaggio ho usato la disuguaglianza di Jensen) e quindi
$$\big\|Tu\big\|^p_{L^p(I)} = \int_I \big|Tu(x)\big|^p dx \le \int_I \bigg(\int_I |u(x,y)|^p\, dy\bigg)\, dx = \big\|u\big\|^p_{L^p(Q)} \tag{3.2}$$
(nell'ultimo passaggio ho usato di nuovo il teorema di Fubini-Tonelli). Questa stima implica che l'operatore T porta $L^p(Q)$ in $L^p(I)$ ed è continuo.
Dimostro infine la surgettività di T: data $v \in L^p(I)$ definisco $u(x,y) := v(y)$ per ogni $(x,y) \in Q$; si verifica immediatamente che u appartiene a $L^p(Q)$ e $Tu = v$.

3. a) Per linearità mi riduco a dimostrare che una funzione $u \in C_0(\overline{\Omega})$ che sia nulla su $\partial\Omega$ e armonica in Ω deve necessariamente essere identicamente nulla.
Suppongo per assurdo che l'estremo superiore m dei valori di u sia strettamente positivo. Siccome u è infinitesima all'infinito, esiste r tale che $u \le m/2$ in $\overline{\Omega} \setminus B(0,r)$. Considero ora l'aperto limitato $\Omega_r := \Omega \cap B(0,r)$: siccome u è continua su $\overline{\Omega}_r$ e armonica in Ω_r, per quanto visto a lezione u ammette un punto di massimo $\bar{x}$ sulla frontiera di Ω_r, e siccome
$$\partial\Omega_r \subset \partial\Omega \cup \partial B(0,r)\,,$$
ci sono due possibilità: o $\bar{x}$ appartiene a $\partial\Omega$, e allora ottengo l'assurdo $m = u(\bar{x}) = 0$, oppure $\bar{x}$ appartiene a $\partial B(0,r)$, allora ottengo l'assurdo $m = u(\bar{x}) \le m/2$.
Dunque l'estremo superiore dei valori di u è negativo o nullo, e allo stesso modo si dimostra che l'estremo inferiore è positivo o nullo, e quindi u è identicamente nulla.
b) Sia $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^d\colon x_1 > 0\}$, e sia $u(x) := x_1$. Allora u è continua su $\overline{\Omega}$, nulla su $\partial\Omega$, e armonica su Ω, ma non è identicamente nulla.

4. Siano n, m numeri interi: scrivendo le funzioni $\cos(mx)$ e $\cos(nx)$ in termini degli esponenziali $e^{\pm imx}$ e $e^{\pm inx}$ otteniamo la seguente identità (peraltro di immediata dimostrazione):
$$\cos(mx)\, \cos(nx) = \frac{1}{2}\big[\cos((m+n)x) + \cos((m-n)x)\big]\,. \tag{3.3}$$
a) Dati $n, m > 0$, usando l'identità (3.3) ottengo
$$\langle e_n\,;\, e_m\rangle = \int_I e_n\, e_m\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos((m+n)x) + \cos((m-n)x)\, dx = \begin{cases} 1 & \text{se } n = m, \\ 0 & \text{se } n \ne m. \end{cases}$$
Per completare la dimostrazione devo far vedere che $\langle e_n\,;\, e_0\rangle$ vale 0 per $n > 0$ e vale 1 per $n = 1$, ma questi sono calcoli elementari.
b) Per definizione $\mathrm{Span}(\mathscr{F})$ è un sottospazio vettoriale di $C(I)$, e per far vedere che è chiuso per prodotto, basta far vedere che il prodotto di due elementi e_m, e_n di $\mathscr{F}$ appartiene a $\mathrm{Span}(\mathscr{F})$. Se $n = 0$ o $m = 0$ l'affermazione è ovvia perché e_0 è una costante. Se $n, m \ne 0$ l'affermazione

segue dall'identità (3.3).
Osservo ora che Span($\mathscr{F}$) contiene le costanti (perché contiene la funzione costante e_0) e separa i punti (perché la funzione e_1 è iniettiva su I); dunque il teorema di Stone-Weierstrass implica che Span($\mathscr{F}$) è denso in $C(I)$ rispetto alla convergenza uniforme, e quindi anche rispetto alla convergenza in L^2; siccome $C(I)$ è a sua volta denso in $L^2(I)$, posso concludere che Span($\mathscr{F}$) è denso in $L^2(I)$, ovvero $\mathscr{F}$ è un sistema ortonormale completo (una base di Hilbert).

5. a) Innanzitutto osservo che mi posso limitare al caso in cui $p_1 < p < p_2$, ovvero al caso in cui $1/p$ è una combinazione convessa *propria* di $1/p_1$ e $1/p_2$, cioè $\lambda_1, \lambda_2 > 0$.
Come suggerito, uso il fatto che $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ per scrivere

$$\|f\|_p^p = \int_E |f|^p\,dx = \int_E \underbrace{|f|^{\lambda_1 p}}_{g_1}\,\underbrace{|f|^{\lambda_2 p}}_{g_2}\,dx$$

ed applico all'ultimo integrale la disuguaglianza di Hölder con gli esponenti coniugati

$$q_1 := \frac{p_1}{\lambda_1 p}\,, \quad q_2 := \frac{p_2}{\lambda_2 p}\,,$$

ottenendo

$$\begin{aligned}\|f\|_p^p = \int_E g_1 g_2\,dx &\le \Big(\int_E g_1^{q_1}\,dx\Big)^{1/q_1}\Big(\int_E g_2^{q_2}\,dx\Big)^{1/q_2} \\ &= \Big(\int_E |f|^{p_1}\,dx\Big)^{\lambda_1 p/p_1}\Big(\int_E |f|^{p_2}\,dx\Big)^{\lambda_2 p/p_2} = \|f\|_{p_1}^{\lambda_1 p}\|f\|_{p_2}^{\lambda_2 p}\,,\end{aligned}$$

che è la tesi.
b) Osservo per cominciare che la funzione g è ben definita perché per ipotesi $\|f\|_{1/t} > 0$ per ogni t. Sia ora t una combinazione convessa di $t_1, t_2 \in (0,1]$, cioè

$$t = \lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2$$

con $\lambda_1, \lambda_2 \in [0,1]$ e $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Applicando la disuguaglianza del punto a) con $p := 1/t$, $p_1 := 1/t_1$, $p_2 := 1/t_2$ ottengo

$$\|f\|_{1/t} \le \|f\|_{1/t_1}^{\lambda_1}\|f\|_{1/t_2}^{\lambda_2}$$

e quindi

$$\begin{aligned}g(t) = \log\big(\|f\|_{1/t}\big) &\le \log\big(\|f\|_{1/t_1}^{\lambda_1}\|f\|_{1/t_2}^{\lambda_2}\big) \\ &= \lambda_1\log\big(\|f\|_{1/t_1}\big) + \lambda_2\log\big(\|f\|_{1/t_2}\big) = \lambda_1 g(t_1) + \lambda_2 g(t_2)\,,\end{aligned}$$

che è proprio la disuguaglianza di convessità.
c) Siccome la funzione g è convessa, l'insieme J dei $t \in (0,1]$ tali che $g(t) < +\infty$ è un intervallo al cui interno la funzione g è continua. Osservo adesso che

$$I = \{p\colon g(1/p) < +\infty\} = \{1/t\colon t \in J\}$$

e quindi I è un'intervallo in quanto immagine dell'intervallo J secondo la funzione continua $t \mapsto 1/t$. Infine la funzione $p \mapsto \|f\|_p = \exp(g(1/p))$ è continua all'interno di I in quanto composizione di funzioni continue.

6. a) Al solito trovo la soluzione scrivendola in serie di Fourier rispetto alla variabile spaziale, cioè

$$u(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(t)\,e^{inx}\,,$$

e ottengo che i coefficienti c_n devono risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases}\dot y = -n^2 e^{-t} y \\ y(0) = c_n^0\end{cases} \tag{3.4}$$

dove c_n^0 sono i coefficienti di Fourier del dato iniziale u_0. Quindi

$$c_n(t) = c_n^0 \exp\big(n^2(e^{-t}-1)\big)\,,$$

da cui segue che la soluzione di (P) dovrebbe essere

$$u(t,x) := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underbrace{c_n^0 \exp\left(n^2(e^{-t}-1)\right) e^{inx}}_{u_n(t,x)} . \tag{3.5}$$

Dimostro adesso il seguente enunciato: *se u_0 è tale che*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n^0| < +\infty \,, \tag{3.6}$$

allora la serie in (3.5) definisce una funzione u continua su $[0,+\infty)\times\mathbb{R}$, 2π-periodica in x e di classe C^∞ su $(0,+\infty)\times\mathbb{R}$, che risolve il problema (P).

Per ogni $\delta > 0$ pongo $R_\delta := [\delta, +\infty)\times\mathbb{R}$. La dimostrazione è divisa in diversi passi.

Passo 1: convergenza della serie in (3.5). Siccome $n^2(e^{-t}-1) \le 0$ per ogni $t \ge 0$, per ogni $n \in \mathbb{Z}$ vale

$$\|u_n\|_{L^\infty(R_0)} \le |c_n^0| \,;$$

questa stima e l'ipotesi (3.6) implicano che la serie in (3.5) converge totalmente su R_0, ed in particolare u è una funzione ben definita e continua su $R_0 = [0,+\infty)\times\mathbb{R}$, e chiaramente 2π-periodica in x.

Passo 2: regolarità di u. Si dimostra facilmente per induzione su $h = 0, 1, \dots$ che

$$D_t^h\big(\exp\left(n^2(e^{-t}-1)\right)\big) = P_h(n^2 e^{-t}) \exp\left(n^2(e^{-t}-1)\right)$$

dove P_h è un opportuno polinomio di grado h, e in particolare esiste una costante M_h tale che

$$P_h(s) \le M_h(1+|s|^h) \quad \text{per ogni } s \in \mathbb{R}.$$

Pertanto per ogni $h, k = 0, 1, \dots$ vale che

$$D_t^h D_x^k u_n = c_n^0 \, P_h(n^2 e^{-t}) \, (in)^k \, \exp\left(n^2(e^{-t}-1)\right) e^{inx} \,;$$

inoltre, fissato $\delta > 0$ e posto $a := 1 - e^{-\delta}$, usando la stima su P_h data sopra ottengo

$$\begin{aligned}\big\|D_t^h D_x^k u_n\big\|_{L^\infty(R_\delta)} &\le M_h(1+|n|^{2h})|n|^k \exp\left(n^2(e^{-\delta}-1)\right) |c_n^0| \\ &\le O\big(|n|^{2h+k}\big)\, e^{-an^2}\, |c_n^0| = o(1)\, |c_n^0| \quad \text{per } n \to \pm\infty.\end{aligned}$$

Questa stima e l'ipotesi (3.6) implicano che la serie delle derivate $D_t^h D_x^k u_n$ converge totalmente su R_δ per ogni $h, k = 0, 1, \dots$ e $\delta > 0$. Quindi la funzione u è di classe C^∞ su $R_\delta := [\delta,+\infty)\times\mathbb{R}$, e per l'arbitrarietà di δ ho che u è di classe C^∞ anche su $(0,+\infty)\times\mathbb{R}$.

Passo 3: u risolve (P). Quest'ultima verifica è completamente standard e la ometto.

b) Considero la funzione u_∞ ottenuta prendendo il limite per $t \to +\infty$ (formalmente) nella formula (3.5):

$$u_\infty(x) := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n^0 e^{-n^2} e^{inx} . \tag{3.7}$$

Siccome per $n \to \pm\infty$ i coefficienti $c_n^0 e^{-n^2}$ tendono a 0 più rapidamente di ogni potenza negativa di $|n|$ ho che la serie in (3.7) definisce una funzione 2π-periodica su $\mathbb{R}$ di classe C^∞.

Per dimostrare che $u(t,\cdot)$ converge a $u_\infty(\cdot)$ uniformemente osservo che per ogni $t \ge 0$ vale

$$\begin{aligned}\big\|u(t,\cdot) - u_\infty(\cdot)\big\|_{L^\infty(\mathbb{R})} &\le \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \Big|c_n^0 \left(\exp(n^2(e^{-t}-1)) - \exp(-n^2)\right) e^{inx}\Big| \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underbrace{|c_n^0| \left(\exp(n^2(e^{-t}-1)) - \exp(-n^2)\right)}_{a_n(t)} ,\end{aligned}$$

e dimostro che la serie $\sum a_n(t)$ tende a 0 per $t \to +\infty$ usando il criterio di convergenza dominata per le serie:

- $a_n(t) \to 0$ per $t \to +\infty$ e per ogni $n \in \mathbb{Z}$ (convergenza puntuale),
- $a_n(t) \le |c_n^0|$ per ogni $t \ge 0$ e ogni $n \in \mathbb{Z}$ (dominazione con una successione sommabile).

7. a) L'insieme Σ è definito dall'equazione $f(x,y) = 1$ dove $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è la funzione continua $f(x,y) := |x| + |y|$, ed in particolare Σ è un chiuso.
Osservo ora che f è di classe C^∞ sull'aperto Ω dei punti (x,y) con $x \neq 0$, $y \neq 0$, e il gradiente
$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{x}{|x|}, \frac{y}{|y|}\right)$$
non si annulla mai in questi punti, ovvero il differenziale *df* ha sempre rango massimo. Questo dimostra che $\Sigma^* = \Sigma \cap \Omega$ è una superficie di dimensione 3 e classe C^∞ in $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^4$.[1]
Prima di affrontare i punti b) e c) introduco la mappa $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ che userò per parametrizzare l'insieme Σ:
$$\Phi(\rho,\alpha,\beta) := \big(\rho\cos\alpha, \rho\sin\alpha, (1-\rho)\cos\beta, (1-\rho)\sin\beta\big)\,.$$
Per la precisione valgono i seguenti fatti:
   - $\Phi([0,1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}) = \Sigma$;
   - Φ è una bigezione da $(0,1) \times [0,2\pi) \times [0,2\pi)$ a Σ^*;
   - Φ è di classe C^∞ su $\mathbb{R}^3$ e
$$\nabla\Phi(\rho,\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\rho\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \rho\cos\alpha & 0 \\ -\cos\beta & 0 & -(1-\rho)\sin\beta \\ -\sin\beta & 0 & (1-\rho)\cos\beta \end{pmatrix};$$
   - determinante Jacobiano di Φ, calcolato a partire dai determinati dei minori 3×3 del gradiente di Φ, è
$$J\Phi(\rho,\alpha,\beta) = \sqrt{2}\,|\rho(1-\rho)|\,;$$
in particolare per $\rho \neq 0, 1$ vale che $J\Phi(\rho,\alpha,\beta) > 0$ e quindi $\nabla\Phi$ ha rango massimo.

b) Faccio vedere che Σ non è una superficie in alcun intorno del punto $p_0 := (1,0,0,0)$.
Suppongo dunque per assurdo che lo sia e indico con T_0 lo spazio tangente a Σ in p_0. Siccome Φ è una mappa di classe C^1 a valori in Σ, e $p_0 = \Phi(1,0,\beta)$ per ogni $\beta \in \mathbb{R}$, allora T_0 deve contenere tutte le colonne della matrice
$$\nabla\Phi(1,0,\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos\beta & 0 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
al variare di $\beta \in \mathbb{R}$.[2]
In particolare prendendo $\beta = 0, \pi, \pm\pi/2$ ottengo che T_0 contiene i vettori
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \pm1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \pm1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$
che chiaramente generano tutto $\mathbb{R}^4$. Questo è assurdo perché T_0 ha dimensione 3.

c) Per quanto detto sopra la restrizione di Φ all'aperto $D := (0,1) \times (0,2\pi) \times (0,2\pi)$ è una parametrizzazione regolare di $\Sigma \setminus C$ dove C è un sottoinsieme chiuso di Σ di dimensione 2 (e quindi di volume trascurabile); posso dunque calcolare il volume di Σ usando la formula dell'area:
$$\sigma_3(\Sigma) = \sigma_3(\Phi(D)) = \int_D J\Phi\,d\rho\,d\alpha\,d\beta = 4\pi^2 \int_0^1 \sqrt{2}\,\rho(1-\rho)\,d\rho = \frac{2\sqrt{2}}{3}\pi^2\,.$$

8. La rappresentazione di una funzione $u \in X$ in serie di seni è
$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx) \quad \text{con} \quad a_n := \frac{2}{\pi}\int_0^1 u(x)\,\sin(nx)\,dx\,,$$

---

[1] In questo esercizio identifico i punti $(x,y) = \big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ con i punti $(x_1,x_2,y_1,y_2) \in \mathbb{R}^4$.

[2] Sto usando il seguente fatto generale: se Σ è una superficie di dimensione k e classe C^1 in $\mathbb{R}^d$, Φ è una mappa di classe C^1 da un aperto $D \subset \mathbb{R}^h$ in $\mathbb{R}^d$ con immagine contenuta in Σ, e $p_0 = \phi(s_0)$ è un punto di Σ, allora lo spazio tangente $T_0 := \mathrm{Tan}(\Sigma, p_0)$ contiene l'immagine dell'applicazione lineare $d\Phi(s_0)$, vale a dire lo span delle colonne della matrice $\nabla\Phi(s_0)$.

e derivandola ottengo, almeno a livello formale,

$$\dot{u}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \cos(nx)\,.$$

Questo *suggerisce* che i coefficienti di $\dot{u}$ rispetto alla base di Hilbert $\mathscr{F} = \{e_n\}$ data nell'esercizio 4 coincidano, a meno di un'opportuna costante, con i coefficienti a_n.
In effetti ho che

$$\langle \dot{u}\,;\,e_0\rangle = \sqrt{\frac{1}{\pi}} \int_0^\pi \dot{u}(x)\,dx = \sqrt{\frac{1}{\pi}}\big(u(\pi)-u(0)\big) = 0$$

(ricordo che $u(\pi) = u(0) = 0$ perché u appartiene a X), mentre per $n = 1, 2, \dots$

$$\langle \dot{u}\,;\,e_n\rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\pi \dot{u}(x)\,\cos(nx)\,dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\pi u(x)\,n\sin(nx)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,n a_n$$

(nel secondo passaggio ho integrato per parti, usando di nuovo che $u(\pi) = u(0) = 0$).
Pertanto

$$\|\dot{u}\|_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \big|\langle \dot{u}\,;\,e_n\rangle\big|^2 = \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^2\,. \tag{3.8}$$

b) Ricordo che per la norma $\|u\|_2$ vale la formula

$$\|u\|_2^2 = \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\,, \tag{3.9}$$

e mettendola insieme alla (3.8) ottengo

$$\|u\|_2^2 = \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \le \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^2 = \|\dot{u}\|_2^2\,. \tag{3.10}$$

Ho dunque dimostrato che $\|u\|_2 \le \|\dot{u}\|_2$ per ogni $u \in X$.
Inoltre la disuguaglianza $\|u\|_2 \le C\|\dot{u}\|_2$ non vale per alcuna costante $C < 1$: infatti per la funzione $u(x) := \sin x$ ho che

$$\|u\|_2 = \|\dot{u}\|_2 = \sqrt{\pi/2}\,.$$

(Non per caso: questa funzione soddisfa $a_n = 0$ per ogni $n > 1$, e quindi la disuguaglianza in (3.10) è un'uguaglianza.)

COMMENTI

- Esercizio 2a). Molti dei presenti hanno dimostrato la stima (3.2) senza far prima vedere che la funzione Tu è ben definita per quasi ogni x. Questa non è una dimostrazione corretta.
  È possible aggirare il problema osservando che la funzione $T|u|$ è ben definita (quasi ovunque) perché $|u|$ è positiva, e quindi soddisfa la stima (3.2) ed appartiene a $L^p(I)$; questo significa in particolare che per quasi ogni x il valore $[T|u|](x)$ è finito, ovvero $u(x,\cdot)$ appartiene a $L^1(I)$ e quindi il valore $Tu(x)$ è ben definito. Inoltre vale $|Tu(x)| \le [T|u|](x)$, e quindi la stima (3.2) per $T|u|$ implica quella per Tu.

- Esercizio 2a). Il passaggio chiave per ottenere la stima (3.2), vale a dire la disuguaglianza in (3.1), può anche essere ottenuta a partire dalla disuguaglianza di Hölder. Diversi dei presenti non hanno giustificato in alcun modo questo passaggio, ed alcuni hanno anche scritto un'uguaglianza al posto della disuguaglianza, qualcosa del tipo

$$\left(\int_I |u(x,y)|\,dy\right)^p = \int_I |u(x,y)|^p\,dy\,.$$

- Esercizio 4b). Diversi dei presenti hanno usato il teorema di Stone-Weierstrass in modo improprio, alcuni dimenticando di verificare tutte le ipotesi (per esempio che Span($\mathscr{F}$) deve contenere le costanti), altri dicendo che il teorema implica direttamente la densità di Span($\mathscr{F}$) in $L^2(I)$. (Il teorema mostra solo che Span($\mathscr{F}$) è denso in $C(I)$ rispetto alla convergenza uniforme; il fatto che Span($\mathscr{F}$) è denso in $C(I)$ rispetto alla convergenza L^2 non fa parte dell'enunciato, anche se ne è una facile conseguenza.)

- Esercizio 4b). Diversi dei presenti hanno dimostrato che $\mathscr{F}$ è una base di Hilbert senza passare dal teorema di Stone-Weierstrass ma riconducendosi alla serie di Hilbert reale su $[-\pi, \pi]$. Presa infatti $u \in L^2([0, \pi])$, la si estende a $[-\pi, \pi]$ in modo pari e si osserva che la serie di Hilbert reale dell'estensione non contiene i termini in $\sin(nx)$, e quindi è una rappresentazione di u come serie di $\cos(nx)$, che si traduce immediatamente in una rappresentazione di u in termini di $\mathscr{F}$, e dunque $\mathscr{F}$ è necessariamente una base di Hilbert.

- Esercizio 5c). La dimostrazione della continuità di $p \mapsto \|f\|_p$ si basa sul fatto, che pensavo essere be noto: una funzione convessa (a valori reali) su un intervallo aperto è necessariamente continua. Pochissimi dei presenti se ne sono ricordati.

- Esercizio 6a). Molti dei presenti hanno risolto in modo errato il problema di Cauchy (3.4), ottenendo $c_n(t) = c_n^0 \exp(n^2 e^t)$. Questo errore ha alcune conseguenze che avrebbero dovuto mettere le persone sull'avviso, in primis il fatto che il problema (P) ammetterebbe una soluzione solo per u_0 molto regolare, e poi il fatto che il limite u_∞ coincide con u_0.

- Esercizio 6a). Alcuni dei presenti si sono limitati a dimostrare che, assumendo $\sum n^2 |c_n^0| < +\infty$ (ipotesi più forte della (3.6)), la serie in (3.5) definisce una funzione u su $[0, +\infty) \times \mathbb{R}$ continua, di classe C^1 in t e di classe C^2 in x (notare che la regolarità vale anche per $t = 0$). Questo risultato, pur non ottimale, richiede una dimostrazione nettamente più semplice di quella data sopra.

- Esercizio 6b). Diversi dei presenti hanno individuato la funzione limite u_∞ ma quasi nessuno ha dimostrato correttamente la convergenza uniforme di $u(t, \cdot)$ a tale limite.

- Esercizio 7a). Diversi dei presenti hanno scritto che la funzione $f(x, y) = |x| + |y|$ che definisce l'equazione di Σ è di classe C^∞ ovunque e poi hanno discusso in quali punti non si annulla il gradiente, giungendo alla conclusione che deve essere $x, y \neq 0$, ma in realtà nei punti con $x = 0$ oppure $y = 0$ la funzione f non è proprio derivabile.

- Esercizio 7a). Si può dimostrare che Σ^* è una superficie regolare usando la parametrizzazione Φ ristretta a due diversi aperti, D come sopra e $D' := (0, 1) \times (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$. Il punto è che $\Phi(D)$ è un sottoinsieme proprio di Σ^*, ma $\Sigma^* = \Phi(D) \cup \Phi(D')$.

- Esercizio 7. Nella soluzione sopra ho detto che la restrizione di Φ a D è una parametrizzazione regolare di $\Phi(D)$, ma non ho dimostrato che Φ è un omeomorfismo da D in $\Phi(D)$, come invece avrei dovuto.

- Esercizio 7b). Nella soluzione data sopra ho fatto vedere che Σ non è una superficie in alcun intorno del punto $p_0 = (1, 0, 0, 0)$, ma lo stesso vale per ogni altro punto $p \in \Sigma \setminus \Sigma^*$.

- Esercizio 8a). Diversi dei presenti hanno cercato (senza successo) di ottenere i coefficienti della serie in seni di $\dot{u}$ a partire da quelli di u. Altri hanno scritto le formule (3.8) e (3.10) senza la costante $\pi/2$, trattando cioè $\{\sin(nx)\}$ e $\{\cos(nx)\}$ come sistemi ortonormali (mentre in realtà non lo sono); ovviamente quest'ultimo errore non ha conseguenze sulla risoluzione del punto b), ma resta un errore.

1. La funzione u appartiene a $L^1(\mathbb{R})$ e per ogni $y \in \mathbb{R}$ la TdF è data da
$$\widehat{u}(y) := \int_{-\infty}^{0} e^x \, e^{-iyx} \, dx = \left| \frac{e^{(1-iy)x}}{1-iy} \right|_{-\infty}^{0} = \frac{1}{1-iy} \, .$$

2. Siccome u appartiene a $L^1(\mathbb{R})$, il prodotto di convoluzione $u * u$ partiene a $L^1(\mathbb{R})$ e $\widehat{u * u} = \widehat{u}^2$. Dunque l'equazione $u * u = u$ implica $\widehat{u}^2 = \widehat{u}$, vale a dire che
$$\widehat{u}(y) \in \{0, 1\} \quad \text{per ogni } y \in \mathbb{R}.$$
Usando il fatto che la funzione $\widehat{u}$ è continua (e che $\mathbb{R}$ è connesso) ottengo che deve essere costantemente uguale a 1 oppure costantemente uguale a 0, ed escludo il primo caso perché $\widehat{u}$ deve anche essere infinitesima all'infinito. Dunque $\widehat{u}(y) = 0$ per ogni $y \in \mathbb{R}$, e l'iniettività della TdF implica che $u(x) = 0$ per q.o. $x \in \mathbb{R}$.

3. Per ipotesi so che $\langle x \, ; \, y \rangle = 0$ per ogni $x \in X$ e $y \in Y$, e usando la continuità del prodotto scalare ottengo che questa identità vale anche per ogni $x \in \overline{X}$ e $y \in \overline{Y}$, ovvero
$$\overline{X} \perp \overline{Y} \, .$$
Dimostro che $X = \overline{X}$ e dunque X è chiuso (analogamente ottengo anche che Y è chiuso). Preso infatti $\bar{x} \in \overline{X}$, per ipotesi esistono $x \in X$ e $y \in Y$ tali che $\bar{x} = x + y$, ovvero $\bar{x} - x = y$; ma $\bar{x} - x$ appartiene a $\overline{X}$, che per quanto visto sopra è ortogonale a Y, e quindi $\bar{x} - x = y = 0$; in particolare $\bar{x}$ coincide con x ed appartiene a X.

4. La dimostrazione è divisa in tre passi.
Passo 1: $X \perp Y$. Prese $u \in X$ e $v \in Y$, per la definizione di Y esiste $\tilde{v} : [0,1] \to \mathbb{R}$ tale che $v(x,y) = \tilde{v}(x)$ per q.o. $(x,y) \in Q$, e quindi
$$\begin{aligned} \langle u \, ; \, v \rangle = \int_Q u \, v \, dx \, dy &= \int_0^1 \left(\int_0^1 u(x,y) \, v(x,y) \, dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^1 u(x,y) \, dy \right) \tilde{v}(x) \, dx = 0 \end{aligned}$$
(nel secondo passaggio ho usato il teorema di Fubini, legittimato dal fatto che il prodotto uv appartiene a $L^1(Q)$ per via della disuguaglianza di Hölder; nel quarto passaggio ho usato il fatto che u appartiene a X e quindi l'integrale tra parentesi vale 0 per q.o. x).
Passo 2: $X + Y = L^2(Q)$. Data $u \in L^2(Q)$ considero le funzioni $v : Q \to \mathbb{R}$ e $\tilde{v} : I \to \mathbb{R}$, con $I := [0,1]$, definite da
$$v(x,y) := \tilde{v}(x) := \int_0^1 u(x,t) \, dt \, . \tag{4.1}$$
Siccome u appartiene anche a $L^1(Q)$, la funzione $\tilde{v}$ è ben definita per q.o. $x \in I$ e misurabile per via del teorema di Fubini, e quindi anche la funzione v è ben definita per q.o. $(x,y) \in Q$ e misurabile. Inoltre v e $\tilde{v}$ appartengono a $L^2(Q)$ ed $L^2(I)$ rispettivamente:
$$\int_Q v^2 \, dx \, dy = \int_0^1 \tilde{v}^2 \, dx = \int_0^1 \left(\int_0^1 u(x,t) \, dt \right)^2 dx \le \int_0^1 \left(\int_0^1 u^2(x,t) \, dt \right) dx = \|u\|_2^2$$
(nel terzo passaggio ho usato la disuguaglianza di Jensen).
Pertanto v appartiene a Y, e per concludere la dimostrazione mi basta far vedere che $u - v$ appartiene a X.
Siccome $u, v \in L^2(Q)$ ho che $u - v \in L^2(Q)$; inoltre per ogni x per cui $\tilde{v}(x)$ è bene definita (cioè l'integrale in (4.1) esiste ed è finito) vale che
$$\int_0^1 u(x,y) - v(x,y) \, dy = \int_0^1 u(x,y) - \tilde{v}(x) \, dy = \int_0^1 u(x,y) \, dy - \tilde{v}(x) = 0 \, .$$
Passo 3: i sottospazi X e Y sono chiusi e per ogni $u \in L^2(Q)$ le proiezioni di u su X e Y sono rispettivamente $u - v$ e v, con v data in (4.1). La chiusura di X e Y segue da quanto dimostrato nei passi precedenti e dall'esercizio 3. Il fatto che le proiezioni di u su X e Y siano proprio $u - v$ e u segue dall'unicità della scomposizione di u come somma di un elemento di X e di uno di Y.

5. a) Considero la funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) := (1 + x_1^8)(x_2^2 + x_3^2)$. Siccome f è una funzione di classe C^∞ (anzi, un polinomio) e $\Sigma = f^{-1}(1)$, per dimostrare che Σ è una superficie di classe C^∞ mi basta far vedere che $\nabla f(x) \neq 0$ per ogni $x \in \Sigma$. In effetti

$$\nabla f(x) = \big(8x_1^7(x_2^2 + x_3^2),\, 2x_2(1 + x_1^8),\, 2x_3(1 + x_1^8)\big)\,,$$

quindi $\nabla f(x) = 0$ implica $x_2 = x_3 = 0$, e i punti del tipo $x = (x_1, 0, 0)$ soddisfano $f(x) = 0$ e non appartengono a Σ.

b) Considero la funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da

$$\rho(t) := \frac{1}{\sqrt{1 + t^8}}\,.$$

Allora per ogni $x \in \Sigma$ vale $\sqrt{x^2 + x^3} = \rho(x_1)$ e quindi esiste $\alpha \in [0, 2\pi)$ tale che

$$x_2 = \rho(x_1)\,\cos\alpha\,, \quad x_3 = \rho(x_1)\,\sin\alpha\,.$$

Questa considerazione suggerisce di parametrizzare Σ tramite la mappa $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ data da

$$\Phi(t, \alpha) := \big(t,\, \rho(t)\,\cos\alpha,\, \rho(t)\,\sin\alpha\big)\,.$$

In effetti si verifica facilmente che

- Φ è una bigezione da $\mathbb{R} \times [0, 2\pi)$ in Σ;
- Φ è una mappa di classe C^∞ e il gradiente di Φ è

  $$\nabla\Phi(t, \alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dot\rho\,\cos\alpha & -\rho\,\sin\alpha \\ \dot\rho\,\sin\alpha & \rho\,\cos\alpha \end{pmatrix}\,,$$

  dove ρ e $\dot\rho$ sono calcolate in t;
- il determinante Jacobiano di Φ è dato da

  $$J\Phi(t, \alpha) = \big(\det\big(\nabla^t\Phi\,\nabla\Phi\big)\big)^{1/2} = \left(\det\begin{pmatrix} 1 + \dot\rho^2 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{pmatrix}\right)^{1/2} = \rho\sqrt{1 + \dot\rho^2}\,; \tag{4.2}$$

  in particolare $J\Phi$ è sempre diverso da 0, e quindi $\nabla\Phi$ ha sempre rango massimo (cioè 2);
- posto $D := \mathbb{R} \times (0, 2\pi)$ e $\Sigma_0 := \{x \in \Sigma\colon x_2 \geq 0\,,\ x_3 = 0\}$ si ha che $\Sigma^* := \Sigma \setminus \Sigma_0$ è aperto in Σ e la restrizione di Φ a D è una parametrizzazione regolare di Σ^*, inoltre Σ_0 è una curva, e quindi Σ^* ha la stessa misura di Σ.

Uso ora la parametrizzazione Φ e quanto detto sopra (in particolare la formula (4.2)) per calcolare la norma $L^p(\Sigma)$ di $f(x)$:

$$\|f\|_p^p = \int_{\Sigma^*} |x_1|^p\, d\sigma_2(x) = \int_D |t|^p J\Phi(t, \alpha)\, dt\, d\alpha = 4\pi \int_0^\infty t^p\, \rho\, \sqrt{1 + \dot\rho^2}\, dt\,.$$

Osservo adesso che l'ultimo integrale è improprio solo a $+\infty$, e che per $t \to +\infty$ vale $\rho \sim t^{-4}$ e $\dot\rho \sim t^{-5}$, e quindi

$$\|f\|_p^p \approx \int_1^{+\infty} t^{p-4}\, dt$$

ed in particolare $\|f\|_p < +\infty$ se e solo se $p < 3$.

6. Come suggerito, spezzo la dimostrazione in due casi.

Primo caso: f continua. In questo caso

$$\|f - f_\lambda\|_p^p = \int_D \big|f(x) - f(\lambda x)\big|^p\, dx \to 0 \quad \text{per } \lambda \to 1,$$

dove la convergenza dell'integrale a 0 segue dal teorema di convergenza dominata: infatti la funzione integranda $|f(x) - f(\lambda x)|^p$ tende a 0 per ogni $x \in D$ perché f è continua, ed è dominata dalla funzione costante $(2\|f\|_\infty)^p$.

Secondo caso: f qualunque. Fissato $\varepsilon > 0$, per la densità delle funzioni continue in $L^p(D)$ posso trovare $g : D \to \mathbb{R}$ continua tale che $\|f - g\|_p \leq \varepsilon$. Un semplice cambio di variabile mostra allora che $\|f_\lambda - g_\lambda\|_p \leq \lambda^{-d/p}\varepsilon$ e quindi

$$\|f - f_\lambda\|_p \leq \|f - g\|_p + \|g - g_\lambda\|_p + \|g_\lambda - f_\lambda\|_p \leq (1 + \lambda^{-d/p})\varepsilon + \|g - g_\lambda\|_p\,. \tag{4.3}$$

Dal punto precedente so che $\|g_\lambda - g\|_p \to 0$ per $\lambda \to 1$ e quindi, prendendo il limsup per $\lambda \to 1$ nella stima (4.3), ottengo

$$\limsup_{\lambda\to 1} \|f - f_\lambda\|_p \leq 2\varepsilon\,;$$

la tesi segue infine dall'arbitrarietà di ε.

7. Sviluppo la funzione incognita u in serie di seni rispetto alla variabile x, vale a dire

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\,\sin(nx)\,,$$

e procedendo in maniera formale trovo che i coefficienti b_n risolvono il problema di Cauchy

$$\begin{cases} i\dot{y} = -n^2 y \\ y(0) = b_{0,n} \end{cases}$$

dove $b_{0,n}$ sono i coefficienti della serie in seni del dato iniziale u_0. Pertanto $b_n(t) = b_{0,n}\,e^{in^2t}$, e la soluzione del problema (P) dovrebbe essere data dalla formula

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{b_{0,n}\,e^{in^2t}\,\sin(nx)}_{u_n(t,x)}\,. \tag{4.4}$$

Dimostro ora il seguente risultato di esistenza: *se il dato u_0 è tale che*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 |b_{0,n}| < +\infty\,, \tag{4.5}$$

allora la serie in (4.4) definisce una funzione $u : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continua, di classe C^1 in t e C^2 in x che risolve il problema (P). In particolare la soluzione u esiste per tutti i tempi.

La dimostrazione di questo enunciato è divisa in alcuni passi.

- Le derivate delle funzioni u_n in (4.4) sono date da

$$D_t^h D_x^k u_n = \begin{cases} (in^2)^h(-1)^{k/2} n^k\, b_{0,n}\,e^{in^2t}\,\sin(nx) & \text{per } k \text{ pari,} \\ (in^2)^h(-1)^{(k+1)/2} n^k\, b_{0,n}\,e^{in^2t}\,\cos(nx) & \text{per } k \text{ dispari,} \end{cases}$$

  e quindi vale la stima

$$\left\| D_t^h D_x^k u_n \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R})} = n^{2h+k} |b_{0,n}|\,. \tag{4.6}$$

- La stima (4.6) e l'ipotesi (4.5) implicano che la serie delle funzioni u_n e le serie delle derivate $D_t u_n$, $D_x u_n$ e $D_x^2 u_n$ convergono totalmente su $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, e quindi u è una funzione continua e di classe C^1 in t e C^2 in x.
- È immediato vedere che u soddisfa le condizioni iniziali e le condizioni al bordo del problema (P); inoltre u risolve l'equazione differenziale in (P) perché l'equazione è lineare, ciascuno degli addendi u_n la risolve, e la convergenza dimostrata al punto precedente permette di scambiare derivate e serie.

Allo stesso modo si dimostra il seguente enunciato: *se il dato u_0 è tale che*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{2m} |b_{0,n}| < +\infty$$

per un qualche $m = 2, 3, \dots, \infty$, allora la formula (4.4) definisce una funzione $u : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ di classe C^m che risolve (P).

8. a) Le funzioni u_n sono olomorfe o antiolomorfe, e in quanto tali sono anche armoniche (come visto a lezione); inoltre ammettono un'estensione continua a tutto $\mathbb{C}$, quindi sono limitate su D, e pertanto appartengono a $L^2(D)$.

b) In coordinate polari le funzioni u_n sono date da $u_n = \rho^{|n|} e^{in\theta}$, e quindi, presi $n, m \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} \langle u_m\,;\,u_n\rangle &= \int_D u_m\,\overline{u_n}\,d\mathscr{L}^2 \\ &= \left[\int_0^1 \rho^{|m|+|n|+1} d\rho\right]\left[\int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\theta} d\theta\right] = \begin{cases} \dfrac{\pi}{|n|+1} & \text{se } n = m, \\ 0 & \text{se } n \neq m. \end{cases} \end{aligned}$$

Pertanto $\mathscr{F} := \{c_n u_n \colon n \in \mathbb{Z}\}$ è un sistema ortonormale se $c_n := \sqrt{(|n|+1)/\pi}$.

c) Una funzione $u \in X$ è armonica sul disco aperto D, e quindi per ogni $0 < \lambda < 1$ la funzione $u_\lambda(z) := u(\lambda z)$ è armonica sul disco $\lambda^{-1}D$, ed in particolare è armonica su D e di classe C^∞ su $\overline{D}$, ovvero appartiene a X'. E per l'esercizio 6, u_λ converge a u in $L^2(D)$ per $\lambda \to 1$.

d) Devo far vedere che Span$(\mathscr{F})$ è denso in X, e per quanto visto al punto c) mi basta far vedere che ogni $u \in X'$ si approssima in norma L^2 con funzioni in Span$(\mathscr{F})$.
Siccome la funzione $f(t) := u(e^{it})$ è di classe C^1 e 2π-periodica, i suoi coefficienti di Fourier c_n soddisfano $\sum |c_n| < +\infty$ e abbiamo visto a lezione che in tal caso la funzione u è data dalla formula

$$u(z) := c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \bar{z}^n\,,$$

e le due serie convergono totalmente su D. Di conseguenza convergono anche in $L^2(D)$, e questo significa che u è approssimata in $L^2(D)$ dalle somme parziali

$$u_N(z) := c_0 + \sum_{n=1}^{N} c_n z^n + \sum_{n=1}^{N} c_{-n} \bar{z}^n\,,$$

che ovviamente appartengono a Span$(\mathscr{F})$.

Commenti

- Esercizio 2. La maggior parte dei presenti ha fatto un errore serio scrivendo che siccome $\hat{u}(\hat{u}-1) = 0$ allora $\hat{u}$ è la funzione costante 0 oppure la funzione costante 1, a prescindere dal fatto che $\hat{u}$ sia continua. (L'errore pare dovuto al fatto che omettendo di scrivere la variabile y uno è portato a trattare $\hat{u}$ come un numero invece che come una funzione).

- Esercizio 3. L'enunciato di questo esercizio è molto semplice e intuitivamente naturale, ma proprio per questo è importante darne una dimostrazione dettagliata. Molti dei presenti invece hanno scritto lunghe frasi in cui però il passaggio chiave, vale a dire l'inclusione $\overline{X} \subset X$, veniva dato senza spiegazioni.

- Esercizio 4. Nel dimostrare che $X + Y = L^2(Q)$ molti dei presenti hanno scritto la funzione v e hanno detto che v appartiene a Y e $u - v$ appartiene a X senza però verificare che v fosse una funzione in $L^2(Q)$. Questo è stato considerato un errore serio (anche se non ha invalidato tutto l'esercizio).

- Esercizio 4. Diversi dei presenti hanno dimostrato che ogni $u \in L^2(Q)$ si scrive come somma di $v \in Y$ e di $u - v \in X$, e poi hanno dimostrato con cura che v e $u - v$ sono le proiezioni ortogonali di u su X e Y, senza ricordare che questo segue automaticamente dall'unicità della scomposizione di L^2 come somma di X e Y con $X \perp Y$.

- Esercizio 5a). Alcuni dei presenti hanno scritto Σ è una superficie di classe C^∞ in quanto luogo di zeri di una funzione f di classe C^∞, senza verificare che il gradiente di f non si annulla su Σ.

- Esercizio 6. Nel dimostrare che $f_\lambda \to f$ per f continua, diversi dei presenti hanno usato il teorema di convergenza dominata, dando però una dominazione sbagliata, per esempio $|f(x) - f(\lambda x)| \leq 2|f(x)|$, oppure sostituendo la dominazione con la verifica che le norme $\|f_\lambda \to f\|_p$ sono equilimitate.
Altri hanno invece detto che f_λ converge f uniformemente su D (cosa vera) limitandosi a dire che

questo segue dal fatto che f è uniformemente continua, senza dare ulteriori spiegazioni. (Alcuni sembrano pensare che una successioni di funzioni continue su un compatto che convergono puntualmente ad una funzione continua devono anche convergere uniformemente.)

- Esercizio 7. Molti dei presenti hanno dedotto la regolarità della funzione u a partire dalla stima della norma del sup delle funzioni u_n, $D_t u_n$ e $D_x^2 u_n$ ma non di $D_x u_n$. Questo è stato considerato un errore veniale, ma non lo sarebbe.

- Esercizio 8a. Molti dei presenti hanno dimostrato con cura che una funzione olomorfa o antiolomorfa è armonica (cosa già vista a lezione) ma hanno omesso di verificare che le funzioni u_n sono in $L^2(D)$.

- Esercizio 8b. Molti dei presenti hanno affrontato questo punto, ma quasi nessuno ha svolto correttamente i calcoli (cosa piuttosto sorprendente).

1. Il grafico Σ è una superficie di dimensione d in $\mathbb{R}^{d+1}$ parametrizzata dalla mappa $\Phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d+1}$ data da $\Phi(s) := (s, g(s)) = (s, |s|^2)$. Lo Jacobiano di tale mappa è
$$J\Phi(s) = \sqrt{1 + |\nabla g(s)|^2} = \sqrt{1 + 4|s|^2}\,,$$
e quindi
$$\begin{aligned}\|f\|_p^p = \int_\Sigma \frac{1}{|x|^p}\,d\sigma_2(x) &= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{J\Phi(s)}{|\Phi(s)|^p}\,ds \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\sqrt{1+4|s|^2}}{(|s|^2+|s|^4)^{p/2}}\,ds = c_d \int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{\rho^{d-1}\sqrt{1+4\rho^2}}{(\rho^2+\rho^4)^{p/2}}}_{h(\rho)}\,d\rho\end{aligned}$$
(nell'ultimo passaggio ho usato una nota formula per l'integrale delle funzioni radiali).
Devo ora capire per quali p risulta finito l'ultimo integrale nella formula sopra. A questo scopo osservo che $h(\rho) \sim 2\rho^{d-2p}$ per $\rho \to +\infty$ e quindi
$$\int_1^{+\infty} h(\rho)\,d\rho < +\infty \;\Leftrightarrow\; \int_1^{+\infty} \rho^{d-2p}\,d\rho < +\infty \;\Leftrightarrow\; p > \frac{d+1}{2}\,.$$
Inoltre $h(\rho) \sim \rho^{d-1-p}$ per $\rho \to 0$ e quindi
$$\int_0^1 h(\rho)\,d\rho < +\infty \;\Leftrightarrow\; \int_0^1 \rho^{d-1-p}\,d\rho < +\infty \;\Leftrightarrow\; p < d\,.$$
Dunque f appartiene a L^p se e solo se $\frac{d+1}{2} < p < d$.

2. Indico con f la funzione $f(x) := 1/(1+x^2)$ e osservo che posso riscrivere g in termini di f e delle funzioni riscalate $\sigma_\delta f$:
$$g(x) := \frac{3}{(1+x^2)(1+4x^2)} = \frac{4}{1+4x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 2\,\sigma_{1/2} f - f\,.$$
Sapendo che $\widehat{f}(y) = \pi\, e^{-|y|}$ ottengo $\widehat{\sigma_{1/2} f}(y) = \widehat{f}(y/2) = \pi\, e^{-|y|/2}$, e quindi
$$\widehat{g}(y) = 2\pi e^{-|y|/2} - \pi\, e^{-|y|}\,.$$

3. a) Scrivendo $\cos t$ e $\sin t$ in termini di esponenziali complessi ottengo:
$$\begin{aligned} f(t) := \cos^3 t\, \sin t &= \left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^3 \left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right) \\ &= \frac{1}{16i}\big(e^{4it} + 2e^{2it} - 2e^{-2it} - e^{-4it}\big)\,, \end{aligned} \tag{5.1}$$
da cui segue che i coefficienti di Fourier c_n di f sono tutti nulli tranne $c_{\pm 4} = \mp i/16$ e $c_{\pm 2} = \mp i/8$.
b) Identifico al solito $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ con $z = x + iy$. Posto $u_0(z) := 2x^3 y$, ho che per $z = e^{it} \in \partial D$ vale $u_0(z) = 2f(t)$, e usando la formula (5.1) ottengo:
$$u_0(z) = \frac{1}{8i}\big(z^4 + 2z^2 - 2\bar{z}^2 - \bar{z}^4\big) = \frac{1}{4}\,\mathrm{Im}\,\big(z^4 + 2z^2\big)\,,$$
da cui segue che
$$u(z) = \frac{1}{4}\,\mathrm{Im}\,\big(z^4 + 2z^2\big) = x^3 y - xy^3 + xy = 2x^3 y + xy(1 - x^2 - y^2)\,.$$

4. a) Dati $u, v \in L^2(\mathbb{R})$ ho che
$$\begin{aligned}\langle T^* u\,;\, v\rangle = \langle u\,;\, Tv\rangle &= \int_{\mathbb{R}} u(x)\,\big(v(x-a) + v(x+b)\big)\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \big(u(x+a) + u(x-b)\big)\,v(x)\,dx = \langle \tau_{-a} u + \tau_b u\,;\, v\rangle\end{aligned}$$
(nel terzo passaggio spezzo l'integrale come somma di due integrali a cui applico due diversi cambi di variabile); da questa identità segue che
$$T^* = \tau_{-a} + \tau_b\,. \tag{5.2}$$

Se $a = b$ la formula (5.2) implica $T = T^*$, e dunque T è autoaggiunto.

Faccio ora vedere che se $a \neq b$ allora T non è autoaggiunto. Per farlo prendo $r > 0$, pongo u uguale alla funzione indicatrice dell'intervallo $[-r, r]$, ed osservo che per $r < a, b$ la restrizione di Tu alla semiretta $[0, +\infty)$ è l'indicatrice di $[a - r, a + r]$ mentre quella di T^*u è l'indicatrice di $[b - r, b + r]$, e queste due indicatrici non coincidono (q.o.) perché $a \neq b$. Quindi $Tu \neq T^*u$ e T non è autoaggiunto.

c) Nel caso $b = -a$, considero $\lambda \in \mathbb{R}$ e una funzione $u \in L^2(\mathbb{R})$ tale che $Tu = \lambda u$, ovvero

$$\tau_a u + \tau_{-a} u = \lambda u \quad \text{q.o. in } \mathbb{R}.$$

Applico ora la TdF a questa identità, e usando il fatto che $\widehat{\tau_a u}(y) = e^{-iay}\, \widehat{u}(y)$ ottengo

$$2\cos(ay)\, \widehat{u}(y) = \lambda\, \widehat{u}(y) \quad \text{per q.o. } y \in \mathbb{R},$$

da cui segue che, posto $E := \{y \colon \widehat{u}(y) \neq 0\}$,

$$2\cos(ay) = \lambda \quad \text{per q.o. } y \in E.$$

Osservo ora che l'insieme degli y tali che $2\cos(ay) = \lambda$ è discreto
e quindi ha misura (di Lebesgue) nulla, quindi l'insieme E ha misura nulla, vale a dire $\hat{u} = 0$ q.o., infine l'iniettività della TdF implica che $u = 0$ q.o. Ne deduco che T non ha autovalori.

5. a) Siccome ρ_n ha integrale 1, vale che $f(x_0) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \rho_n(y)\, f(x_0)\, dy$, quindi

$$\begin{aligned} \rho_n * f(x_0) - f(x_0) &= \int_{\mathbb{R}^d} \rho_n(y)\, f(x_0 - y) - \rho_n(y)\, f(x_0)\, dy \\ &= \int_{B_n} \rho_n(y) \big(f(x_0 - y) - f(x_0) \big)\, dy \end{aligned}$$

(nel secondo passaggio ho usato che $\operatorname{supp}(\rho_n) \subset B_n$), e infine

$$\big|\rho_n * f(x_0) - f(x_0)\big| \leq \int_{B_n} \rho_n(y) \big| f(x_0 - y) - f(x_0) \big|\, dy \leq \underbrace{\sup_{y \in B_n} \big| f(x_0 - y) - f(x_0) \big|}_{\omega_n(x_0)} . \tag{5.3}$$

Per concludere basta notare che $\omega_n(x_0)$ tende a 0 per $n \to +\infty$ perché f è continua in x_0 e il raggio di B_n tende a 0.

b) Siccome f è uniformemente continua, $\omega_n(x_0)$ tende a 0 uniformemente in x_0, e la stima (5.3) implica che $\rho_n * f$ converge a f uniformemente.

c) Divido la dimostrazione in due casi.

Caso 1: f è una funzione continua con supporto compatto. In questo caso abbiamo che:

- le funzioni $\rho_n * f$ hanno supporto contenuto in un insieme limitato fissato (per esempio l'insieme dato dalla somma del supporto di f e della palla chiusa $\overline{B(0, r)}$ con $r := \max\{r_n\}$);
- $\rho_n * f \to f$ uniformemente in $\mathbb{R}^d$ per quanto visto al punto b);

e queste due proprietà insieme implicano che $\rho_n * f \to f$ in $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Caso 2: f è una qualunque funzione in $L^p(\mathbb{R}^d)$. Procedo per approssimazione: fissato $\varepsilon > 0$ scelgo una funzione continua g con supporto compatto tale che $\|f - g\|_p \leq \varepsilon$ (posso farlo per un risultato visto a lezione perché $p < +\infty$) ed osservo che

$$\begin{aligned} \|\rho_n * f - f\|_p &= \big\| (\rho_n * f - \rho_n * g) + (\rho_n * g - g) + (g - f) \big\|_p \\ &\leq \|\rho_n * (f - g)\|_p + \|\rho_n * g - g\|_p + \|g - f\|_p \\ &\leq \|\rho_n\|_1\, \|f - g\|_p + \|\rho_n * g - g\|_p + \|g - f\|_p \leq 2\varepsilon + \|\rho_n * g - g\|_p\, . \end{aligned}$$

Siccome $\rho_n * g \to g$ in L^p, passando al limite per $n \to +\infty$ ottengo

$$\limsup_{n \to +\infty} \|\rho_n * f - f\|_p \leq 2\varepsilon$$

e concludo per l'arbitrarietà di ε.

COMMENTI

- Esercizio 1. Dei presenti solo una persona ha svolto correttamente questo esercizio. Diversi dei presenti non hanno saputo calcolare lo Jacobiano della parametrizzazione Φ (che dovrebbe essere noto dal corso di Analisi del secondo anno); altri non sono riusciti a ricondursi ad un integrale uni-dimensionale, oppure lo hanno fatto in modo errato.

- Esercizio 2. Una soluzione alternativa consiste nel calcolare direttamente la trasformata di Fourier usando il metodo dei residui.

- Esercizio 2. Alcuni dei presenti hanno scritto g come prodotto $g = 3\, g_1\, g_2$ con $g_1(x) := \frac{1}{1+x^2}$ e $g_2(x) := \frac{1}{1+4x^2}$, hanno quindi ottenuto che $\widehat{g} = 3\widehat{g_1} * \widehat{g_2}$, e hanno calcolato le trasformate $\widehat{g_1}$ e $\widehat{g_2}$, ma non la loro convoluzione. Ho considerata questa soluzione ampiamente incompleta.

- Esercizio 3. Alcuni dei presenti hanno fatto errori di cui avrebbero dovuto accorgersi (ad esempio perché la soluzione u così ottenuta non ha valori reali).

- Esercizio 4. Riguardo al punto b), la maggior parte dei presenti non ha dimostrato che se T è autoaggiunto allora $a = b$ (e alcuni lo hanno dato per scontato). Sono una persona ha risolto il punto c).

- Esercizio 5c). Una dimostrazione alternativa è la seguente:
$$\begin{aligned}
\|\rho_n * f - f\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{B_n} \big(f(x-y) - f(x)\big)\, \rho_n(y)\, dy \right|^p dx \\
&\le \int_{\mathbb{R}^d} \int_{B_n} \big|f(x-y) - f(x)\big|^p \rho_n(y)\, dy\, dx \\
&= \int_{B_n} \|\tau_y f - f\|_p^p\, \rho_n(y)\, dy \le \sup_{y \in B_n} \|\tau_y f - f\|_p^p \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$
(nel primo passaggio ho scritto $f(x)$ come $\int f(x)\, \rho_n(y)\, dy$ e ho usato che $\mathrm{supp}(\rho_n) \subset B_n$, nel secondo ho usato la disuguaglianza di Jensen rispetto alla misura di probabilità μ_n data dalla misura di Lebesgue e dalla densità ρ_n, nel terzo il teorema di Fubini, e infine nell'ultimo ho usato che la mappa da $\mathbb{R}^d$ in $L^p(\mathbb{R}^d)$ data da $y \in \mathbb{R}^d \mapsto \tau_y f$ è continua in 0 per $p < +\infty$).

- Esercizio 5. Riguardo al punto a), diversi dei presenti hanno cercato di dimostrare che
$$\int \big|f(x_0 - y) - f(x_0)\big|\, \rho_n(y)\, dy \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$
usando il teorema di convergenza dominata; questa dimostrazione non funziona per mancanza di un'adeguata dominazione.

6. Per ogni $n = 1, 2, \dots$ indico con $b_n(t)$ i coefficienti dello sviluppo in serie di seni di dell'incognita $u(t, \cdot)$. Come visto a lezione le funzioni b_n devono risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot y = \big(a(t) - n^2\big)\, y \\ y(0) = b_{0,n} \end{cases} \tag{6.1}$$

dove $b_{0,n}$ sono i coefficienti dello sviluppo in serie di seni del dato iniziale u_0, vale a dire

$$b_{n,0} := \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (\pi x - x^2) \, \sin(nx)\, dx = \frac{4}{\pi n^2} \int_0^\pi \sin(nx)\, dx = \begin{cases} \frac{8}{\pi n^3} & \text{per } n \text{ dispari,} \\ 0 & \text{per } n \text{ pari.} \end{cases}$$

Risolvendo (6.1) ottengo

$$b_n(t) = \begin{cases} \frac{8}{\pi n^3}\, g(t)\, e^{-n^2 t} & \text{per } n \text{ dispari,} \\ 0 & \text{per } n \text{ pari,} \end{cases}$$

dove $g := e^A$ e A è la primitiva di a che soddisfa $A(0) = 0$.
In particolare le funzioni A e g sono definite sulla semiretta $[0, +\infty)$, e se a è di classe C^h allora A e g sono di classe C^{h+1}.

Dunque la soluzione del problema (P) dovrebbe essere data da

$$u(t, x) = \frac{8}{\pi}\, g(t) \sum_{n=1,3,\dots} \underbrace{n^{-3}\, e^{-n^2 t} \sin(nx)}_{v_n(t,x)} \,. \tag{6.2}$$

Dimostro in effetti il seguente enunciato: *Se a è di classe C^h con $h = 0, 1, \dots, \infty$ allora*

(i) sul semipiano chiuso $[0, +\infty) \times \mathbb{R}$ la funzione u in (6.2) è ben definita e continua, e soddisfa le condizioni al bordo e la condizione iniziale in (P);

(ii) sul semipiano aperto $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$ la funzione u è di classe C^{h+1} e di classe C^∞ nella variabile x, e risolve l'equazione differenziale in (P).

Dimostrazione di (i). Per prima cosa osservo che

$$\|v_n\|_{L^\infty([0,+\infty)\times\mathbb{R})} = n^{-3} \,,$$

e dunque la serie in (6.2) converge totalmente su $[0, +\infty) \times \mathbb{R}$ ad una funzione continua v.
Inoltre sia u che v soddisfano le condizioni al bordo in (P) perché le soddisfano tutti gli addendi v_n, e soddisfano la condizione iniziale in (P) perché le rappresentazione in serie di seni di $u(0, \cdot)$ e $v(0, \cdot)$ coincidono con quella di u_0.

Dimostrazione di (ii). Mi basta far vedere che la funzione v data dalla serie in (6.2) è di classe C^∞ nell'aperto $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$. Per ogni $\delta > 0$ pongo $R_\delta := [\delta, +\infty) \times \mathbb{R}$ ed osservo che per ogni $h, k = 0, 1, 2, \dots$ vale la formula

$$D_t^h D_x^k v_n = (-1)^h\, n^{-3+2h+k}\, e^{-n^2 t}\, h_k(x) \quad \text{con } h_k(x) \in \{\pm \sin(nx), \pm \cos(nx)\} \,,$$

da cui ottengo

$$\|D_t^h D_x^k v_n\|_{L^\infty(R_\delta)} = n^{-3+2h+k} e^{-n^2 \delta} = O(1/n^2) \,.$$

E quindi le serie delle derivate $D_t^h D_x^k v_n$ converge totalmente in R_δ, e dunque v è di classe C^∞ su R^δ; siccome δ è arbitrario ne deduco che v è di classe C^∞ sull'unione delle parti interne degli insiemi R_δ, vale a dire $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$.
Infine noto che ciascuna funzione $\frac{8}{\pi}\, g\, v_n$ soddisfa per costruzione l'equazione differenziale lineare $u_t = u_{xx} + a(t)\, u$, e la convergenza totale (su R_δ) delle funzioni v_n e delle derivate $D_t v_n$, $D_x v_n$ e $D_x^2 v_n$ implica che la somma u risolve la stessa equazione.

7. a) Utilizzando il fatto che, per $i = 1, 2, 3$,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} |x| = \frac{\partial}{\partial x_i} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2} = x_i\, (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-1/2} = x_i\, |x|^{-1}$$

ottengo

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \big(|x|^{-1}\big) = -x_i\, |x|^{-3} \,, \qquad \frac{\partial^2 p}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i} \big(- x_i\, |x|^{-3}\big) = 3x_i^2\, |x|^{-5} - |x|^{-3} \,,$$

e sommando l'ultima identità su $i = 1, 2, 3$ ottengo $\Delta p = 0$.

b) Dimostro prima la finitezza di u. Per farlo indico con m la norma del sup di g (che è finita perchè g ha supporto compatto e prendo r tale che il supporto di g è contenuto nella palla $B(0,r)$. Allora il supporto della funzione $y \mapsto g(x-y)$ è contenuto nella palla $B(x,r)$ che a sua volta è contenuta nella palla $B(0, r+|x|)$ e quindi

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^d} p(y)\, g(x-y)\, dy \le m \int_{B(0,r+|x|)} |y|^{-1} dy = m \int_0^{r+|x|} 4\pi\rho\, d\rho = 2\pi m (r+|x|)^2 \,. \tag{6.3}$$

Passo ora alla continuità di u: presa una successione x_n che converge a x, scelgo R tale che x e i punti x_n sono contenuti in $B(0,R)$, quindi i supporti delle funzioni $y \mapsto g(x-y)$ e $y \mapsto g(x_n - y)$ sono contenuti in $B(0, R+r)$ e

$$u(x_n) = \int_{B(0,R+r)} p(y)\, g(x_n - y)\, dy \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{B(0,R+r)} p(y)\, g(x-y)\, dy = u(x)$$

(nel secondo passaggio ho usato il teorema di convergenza dominata: infatti $p(y)\, g(x_n - y)$ converge a $p(y)\, g(x-y)$ per ogni $y \ne 0$ per via della continuità di g, e la dominazione è data dalla funzione $m\,p$; la dimostrazione che p appartiene a $L^1(B(0,R+r))$ è implicitamente contenuta nel calcolo svolto in (6.3)).

c) Dimostro che u ha la proprietà della media su Ω: prendo dunque $\bar{x} \in \Omega$ e una palla chiusa $B = \overline{B(\bar{x}, r)}$ contenuta in Ω e indico con E il supporto di g; allora

$$\fint_B u(x)\, dx = \fint_B \left(\int_E p(x-y)\, g(y)\, dy \right) dx = \int_E \left(\fint_B p(x-y)\, dx \right) g(y)\, dy \tag{6.4}$$

(nel secondo passaggio ho applicato il teorema di Fubini, cosa che posso fare perché le funzioni p e g sono positive). Osservo ora che

- la funzione $x \mapsto p(x-y)$ è armonica su $\mathbb{R}^3 \setminus \{y\}$;
- la palla $B = \overline{B(\bar{x}, r)}$ non interseca E, e quindi è contenuta in $\mathbb{R}^3 \setminus \{y\}$ per ogni $y \in E$, e per la proprietà della media di p ho che

$$\fint_B p(x-y)\, dx = p(\bar{x}) \,. \tag{6.5}$$

Mettendo insieme le formule (6.4) e (6.5) ottengo infine

$$\fint_B u(x)\, dx = \int_E \left(\fint_B p(x-y)\, dx \right) g(y)\, dy = \int_E p(\bar{x})\, g(y)\, dy = u(\bar{x}) \,.$$

8. a) Ricordo che le somme parziali della serie di Fourier possono essere scritte come

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\, D_n(t)\, dt \tag{6.6}$$

dove D_n è il nucleo di Dirichlet:

$$D_n(t) := \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} = \frac{\sin((n+1/2)t)}{\sin(t/2)} = \frac{\operatorname{Im}\left(e^{it/2} e^{int}\right)}{2\sin(t/2)} \,. \tag{6.7}$$

Sommando entrambi i termine dell'identità (6.6) per $n = 0, \dots, m-1$ ottengo

$$C_m(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\, G_m(t)\, dt$$

con

$$\begin{aligned} G_m(t) = \frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m-1} D_n(t) &= \frac{1}{2m\,\sin(t/2)} \operatorname{Im}\left(e^{it/2} \sum_{n=0}^{m-1} \left(e^{it}\right)^n \right) \\ &= \frac{1}{2m\,\sin(t/2)} \operatorname{Im}\left(e^{it/2} \frac{e^{imt}-1}{e^{it}-1} \right) \\ &= \frac{1}{2m\,\sin(t/2)} \operatorname{Im}\left(\frac{e^{imt}-1}{2i\,\sin(t/2)} \right) = \frac{1-\cos(mt)}{4m\,\sin^2(t/2)} \,. \end{aligned} \tag{6.8}$$

b) La funzione G_m ha integrale 2π perché tutte le funzioni D_n hanno integrale 2π, cosa che risulta evidente integrando il secondo termine in (6.7); la positività di G_m è evidente guardando l'ultimo termine in (6.8).

c) Per dimostrare che C_m converge uniformemente a f quando quest'ultima è uniformemente continua uso questo lemma:[1] *sia $\rho_m : \mathbb{R}^d \to [0,+\infty)$ una successione di funzioni misurabili con integrale 1 tali che*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d\setminus B(0,r)} \rho_m(y)\,dy \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \textit{per ogni } r>0. \tag{6.9}$$

Allora $f*\rho_m$ tende uniformemente a f per ogni $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ limitata e uniformemente continua.

È infatti facile verificare che le funzioni $\rho_m := \frac{1}{2\pi}G_m$, dove G_m sono le funzioni in (6.8), soddisfano la condizione (6.9), e questo conclude la dimostrazione di c).

Mi resta da dimostrare il lemma: siccome f è uniformemente continua, preso $\varepsilon>0$ esiste $r>0$ tale che $\bigl|f(x')-f(x)\bigr|\le\varepsilon$ per ogni x,x' tali che $|x-x'|\le r$, e quindi

$$\begin{aligned}
\bigl|f*\rho_m(x)-f(x)\bigr| &= \left|\int_{\mathbb{R}^d}\bigl(f(x-y)-f(x)\bigr)\,\rho_m(y)\,dy\right| \\
&\le \int\limits_{B(0,r)}\bigl|f(x-y)-f(x)\bigr|\,\rho_m(y)\,dy + \int\limits_{\mathbb{R}^d\setminus B(0,r)}\bigl|f(x-y)-f(x)\bigr|\,\rho_m(y)\,dy \\
&\le \varepsilon + 2\|f\|_\infty \int\limits_{\mathbb{R}^d\setminus B(0,r)}\rho_m(y)\,dy
\end{aligned}$$

(nel terzo passaggio stimo la differenza $|f(x-y)-f(x)|$ con ε nel primo integrale e con $2\|f\|_\infty$ nel secondo). Utilizzando la (6.9) ottengo allora

$$\limsup_{m\to+\infty}\bigl\|f*\rho_m(x)-f(x)\bigr\|_\infty\le\varepsilon\,,$$

e concludo usando il fatto che ε è arbitrario.

Commenti

- Esercizio 6. La regolarità di u data sopra è ottimale nel senso che se a è di classe C^h ma non C^{h+1} allora A e g sono di classe C^{h+1} ma non C^{h+2}, e lo stesso vale per u.

- Esercizio 6. Una soluzione alternativa, e nettamente più semplice, è la seguente: scrivendo l'equazione differenziale in (P) nella forma $u_t - a(t)u = u_{xx}$ e moltiplicando per il fattore integrante $e^{-A(t)}$ (come nella risoluzione delle equazioni differenziali lineari del primo ordine) si ottiene
$$\bigl(e^{-A(t)}u\bigr)_t = e^{-A(t)}u_{xx} = \bigl(e^{-A(t)}u\bigr)_{xx}$$
e quindi con il cambio di variabile $v=e^{-A(t)}u$ ci si riconduce all'equazione del calore $v_t=v_{xx}$; inoltre le condizioni al bordo e le condizioni iniziali per v e per u sono le stesse.
In altre parole la soluzione del problema (P) è data da
$$u = e^{A(t)}v = g(t)\,v$$
dove v risolve l'equazione del calore nell'intervallo spaziale $[0,\pi]$ con le condizioni al bordo $v(\cdot,0)=v(\cdot,\pi)=0$ e la condizione iniziale $v(0,\cdot)=u_0(\cdot)$. Pertanto, usando quanto fatto a lezione (per l'equazione del calore) si ottiene senza sforzo il risultato dimostrato sopra.

- Esercizio 6. Nello scrivere la formula della soluzione u, nessuno dei presenti ha portato il fattore $g(t)=e^{A(t)}$ fuori dalla serie. Questa omissione complica leggermente la dimostrazione della convergenza della serie.

[1] Si tratta di una variante dell'esercizio 5 della prima parte.

1. Si tratta di un semplice calcolo:
$$f(x) = 1 - 8\sin^2 x\cos^2 x = 1 - 2\sin^2(2x) = \cos(4x) = \tfrac{1}{2}e^{4ix} + \tfrac{1}{2}e^{-4ix} \,.$$

2. Il punto di partenza è il seguente teorema (visto a lezione): *data una funzione $v \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ tale che $x\,v \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ allora $\widehat{v}$ è una funzione di classe C^1 e $\widehat{v}\,' = \widehat{-ix\,v}$.*
Ricordo inoltre che una funzione continua $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tale che $g(x) = O(|x|^{-a})$ per $|x| \to \pm\infty$ con $a > 1$ appartiene a $L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$,[1] e quindi l'ipotesi $u(x) = O(|x|^{-4})$ implica che u, $x\,u$ e $x^2\,u$ appartengono a $L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$.
Applicando quindi il teorema citato sopra con $v := u$ ottengo che $\widehat{u}$ è di classe C^1, ed applicandolo con $v := -ix\,u$ ottengo che $\widehat{u}\,' = \widehat{-ix\,u}$ è di classe C^1, ovvero che $\widehat{u}$ è di classe C^2.

3. a) Osservo che S è il luogo di zeri della mappa $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^2$ data da
$$f(x,y) := \big(|x|^2 - 1;\, |y-x|^2 - 4\big)\,.$$
Quindi S è chiuso in quanto contro-immagine di un chiuso secondo una funzione continua. Inoltre per $(x,y) \in S$ vale $|x| = 1$ e $|y| \le |y-x| + |x| \le 3$ e quindi S è limitato, da cui segue che S è compatto.
Dato che f è di classe C^∞, per dimostrare che S è una superficie di classe C^∞ mi basta far vedere che ∇f ha rango massimo, cioè 2, in tutti i punti di S. Un semplice calcolo dà
$$\nabla f(x,y) := 2\begin{pmatrix} x & 0 \\ x-y & y-x \end{pmatrix}$$
(in questa formula sia x che y sono visti come vettori riga) e chiaramente la prima riga non è un multiplo della seconda se non quando $x = 0$, condizione che non si verifica mai se $(x,y) \in S$, mentre la seconda riga non è un multiplo della prima se non quando $y - x = 0$, condizione che non si verifica mai se $(x,y) \in S$.
b) Per d qualunque parametrizzo ogni punto (x,y) in S come $(x,y) = (x, x+2z)$ con $x, z \in S^{d-1}$. Inoltre per $d = 2$ parametrizzo ogni $x \in S^1$ come $x = (\cos s, \sin s)$ con $s \in [0,2\pi)$ ed ogni $z \in S^1$ come $z = (\cos t, \sin t)$ con $t \in [0,2\pi)$, ottenendo la parametrizzazione
$$\Phi : [0,2\pi) \times [0,2\pi) \to S\,, \quad \Phi(s,t) := (\cos s, \sin s, \cos s + 2\cos t, \sin s + 2\sin t)\,.$$
Osservo ora che Φ è di classe C^∞ e
$$\nabla\Phi = \begin{pmatrix} -\sin s & 0 \\ \cos s & 0 \\ -\sin s & -2\sin t \\ \cos s & 2\cos t \end{pmatrix}\,,$$
da cui ottengo che
$$\begin{aligned}\big(J\Phi\big)^2 = \det\big(\nabla^t\Phi\nabla^t\Phi\big) &= \det\begin{pmatrix} 2 & 2\cos(s-t) \\ 2\cos(s-t) & 4 \end{pmatrix} \\ &= 8 - 4\cos^2(s-t) = 4\big(1 + \sin^2(s-t)\big)\,,\end{aligned}$$
e quindi
$$\begin{aligned}\sigma_2(S) = \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{2\pi} J\Phi(s,t)\,ds\,dt &= \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{2\pi} 2\sqrt{1+\sin^2(s-t)}\,ds\,dt \\ &= \int_0^{2\pi}\!\!\int_t^{t+2\pi} 2\sqrt{1+\sin^2 x}\,dx\,dt \\ &= 4\pi\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\sin^2 x}\,dx = 8\pi m\,.\end{aligned}$$

4. a) Per definizione di D', dato $y \in D'$ il funzionale lineare su D dato da $x \mapsto \langle Tx\,;\,y\rangle$ è continuo. Di conseguenza è anche uniformemente continuo, e siccome D è denso in H, può essere esteso per continuità a tutto H. Per un teorema visto a lezione esiste quindi $z \in H$, dipendente da y, che rappresenta tale funzionale, cioè tale che
$$\langle Tx\,;\,y\rangle = \langle x\,;\,z\rangle \quad \text{per ogni } x \in H.$$

[1] L'integrale improprio $\int_{-\infty}^{\infty} |g|\,dx$ è finito per confronto asintotico con $\int_1^\infty x^{-a}\,dx$.

Per quanto riguarda l'unicità di z, dato z' con la stessa proprietà si ha che $\langle x\,;\, z - z'\rangle = 0$ per ogni $x \in D$, e per la densità di D (e la continuità del prodotto scalare) lo stesso vale per ogni $x \in H$, da cui segue che $z - z' = 0$, ovvero $z = z'$.

b) Dimostro che presi $y, y' \in D'$ vale che $z(y + y') = z(y) + z(y')$. In effetti per ogni $x \in D$ vale che

$$\langle Tx\,;\, y + y'\rangle = \langle Tx\,;\, y\rangle + \langle Tx\,;\, y'\rangle = \langle x\,;\, z(y)\rangle + \langle x\,;\, z(y')\rangle = \langle x\,;\, z(y) + z(y')\rangle$$

e usando l'unicità di $z(y + y')$ dimostrata al punto a) ottengo che $z(y + y') = z(y) + z(y')$. Allo stesso modo si dimostra che per ogni $y \in D'$ e ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ vale $z(\lambda y) = \lambda\, z(y)$, e questo conclude la dimostrazione della linearità di T^*.

c) Per la continuità di T e del prodotto scalare, per ogni $y \in H'$ il funzionale $x \mapsto \langle Tx\,;\, y\rangle$ è continuo e quindi y appartiene a D'.
Inoltre, come visto a lezione, la continuità di T si traduce nell'esistenza di una costante finita m tale che $\|Tx\| \le m\|x\|$ per ogni $x \in D$. Voglio quindi dimostrare che $\|T^*y\| \le m\|y\|$ per ogni $y \in H'$: posso ovviamente supporre che $T^*y \neq 0$, e in tal caso

$$\|T^*y\|^2 = \langle T^*y\,;\, T^*y\rangle = \langle TT^*y\,;\, y\rangle \le \|TT^*y\|\,\|y\| \le m\|T^*y\|\,\|y\|\,,$$

e dividendo per $\|T^*y\|$ ottengo $\|T^*y\| \le m\|y\|$.

d) Prendo $H' = \mathbb{R}$ e un funzionale lineare $T : H \to \mathbb{R}$ non continuo (abbiamo visto a lezione che tale T esiste se H ha dimensione infinita). Dato allora $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ho che $x \mapsto \langle Tx\,;\, y\rangle = y(Tx)$ è un multiplo non banale del funzionale T e quindi non è continuo; pertanto $y \notin D'$.

5. Per via delle condizioni di periodicità al bordo, cerco la soluzione u di (P) scrivendola in serie di Fourier rispetto alla variabile spaziale x, vale a dire

$$u(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(t)\, e^{inx}\,.$$

Poiché i coefficienti di Fourier di $u_t(t,\cdot)$ sono $\dot{c}_n(t)$ e quelli di $u_{xxx}(t,\cdot)$ sono, per via delle condizioni al bordo, $(in)^3 c_n(t) = -in^3\, c_n(t)$, se u risolve l'equazione $u_t = u_{xxx}$ con la condizione iniziale $u(0,\dot{c}) = u_0(\cdot)$ allora i coefficienti c_n risolvono il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} = -in^3 y \\ y(0) = c_n^0 \end{cases}$$

dove c_n^0 sono i coefficienti di Fourier di u_0, e dunque $c_n(t) = c_n^0\, e^{-in^3 t}$. Pertanto la soluzione di (P) dovrebbe essere data da

$$u(t,x) := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underbrace{c_n^0\, e^{-in^3 t + inx}}_{u_n}\,. \tag{7.1}$$

a) Se $u_0(x) := 1 - 8\sin^2 x \cos^2 x$, per quanto visto nell'esercizio 1 si ha che $c_n^0 = 1/2$ per $n = \pm 4$ e $c_n^0 = 0$ altrimenti, e quindi la formula (7.1) diventa

$$u(t,x) = \tfrac{1}{2} e^{-i\,64\,t + i4x} + \tfrac{1}{2} e^{i\,64\,t - i4x} = \cos(64\,t - 4x)\,;$$

è immediato verificare che questa funzione risolve il problema (P).

b) Dimostro il seguente enunciato: *se* $\sum |n|^3 |c_n^0| < +\infty$ *allora la formula* (7.1) *definisce una funzione* $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *di classe* C^1 *in* t *e di classe* C^3 *in* x *che risolve* (P).

Dimostrazione. Le funzioni u_n in (7.1) soddisfano, per ogni $h, k = 0, 1, \dots$,

$$D_t^h D_x^k u_n = c_n^0 (-in^3)^h\, (in)^k\, e^{-in^3 t + inx}\,,$$

e quindi

$$\left\| D_t^h D_x^k u_n \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R})} = |n|^{3h+k} |c_n^0|\,.$$

Usando l'ipotesi sui coefficienti c_n^0 ottengo quindi che la serie delle funzioni $D_t^h D_x^k u_n$ converge totalmente su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ se $3h + k \le 3$, vale a dire per $h = 0$ e $k = 0, \dots, 3$, e per $h = 1$ e $k = 0$. Dunque la serie in (7.1) converge totalmente su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ad una funzione u che è continua, di classe C^3 in x e di classe C^1 in t.
Siccome gli addendi u_n soddisfano le condizioni al bordo e l'equazione differenziale in (P), lo

stesso vale per u. Infine u soddisfa la condizione iniziale in (P) perché i suoi coefficienti di Fourier al tempo $t = 0$ coincidono con quelli di u_0.

COMMENTI

- Esercizio 2. Quasi tutti i presenti hanno dedicato molto spazio alla dimostrazione del fatto che le funzioni u, $x\,u$ e $x^2\,u$ appartengono a L^1, quando invece si trattava di usare un fatto di base sugli integrali impropri che dovrebbe essere ben noto dal corso di Analisi 1. Allo stesso tempo le stesse persone non hanno spiegato bene come applicare iterativamente il teorema visto a lezione (quello che dice che se u e $x\,u$ appartengono a L^1 allora $\widehat{u}$ è di classe C^1). Infine alcuni dei presenti non hanno usato questo risultato ma lo hanno in sostanza ri-dimostrato (in modo non del tutto convincente).

- Esercizio 3a). Sorprendentemente, nessuno dei presenti ha dimostrato correttamente che S è una superficie. In effetti molti hanno scritto S come luogo di zeri di un'applicazione f : $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^2$, ma poi non hanno verificato, o non hanno saputo verificare, che la matrice ∇f ha rango 2 nei punti di S. In particolare alcuni hanno implicitamente scritto che una matrice $2 \times 2d$ ha rango 2 se le due righe sono diverse da zero (errore grave).

- Esercizio 3a). Molti dei presenti hanno scritto S come luogo di zeri dell'applicazione $f(x, y) := (|x| - 1,\, |y - x| - 2)$, dicendo poi che si tratta di un'applicazione di classe C^∞, cosa che non è vera (ricordo infatti che la funzione $|x|$ non è differenziabile in 0). Tuttavia questo è un errore veniale, perché f è di classe C^∞ in un'aperto che contiene S.

- Esercizio 3b). Molti dei presenti hanno trovato una parametrizzazione di S, ma solo una persona ha portato i calcoli fino in fondo.

- Esercizio 4a). Alcuni dei presenti hanno dimostrato l'esistenza del vettore z dicendo che un funzionale lineare e continuo di D si rappresenta per prodotto scalare, cosa che non è corretta perché D nonè uno spazio di Hilbert ma solo uno spazio con prodotto scalare. (In effetti il punto chiave della dimostrazione è estendere il funzionale $x \mapsto \langle Tx\,;\, y\rangle$ a tutto H.)
  Quasi nessuno dei presenti ha dimostrato l'unicità di z.

- Esercizio 4b). Il punto chiave della dimostrazione è l'unicità di z, ma quasi nessuno lo ha detto esplicitamente.

- Esercizio 4c). Alcuni dei presenti hanno scritto che una successione z_n converge a z in H se $\langle z_n\,;\, x\rangle \to \langle z\,;\, x\rangle$ per ogni $x \in H$. Purtroppo questa affermazione è falsa (quello che è vero è il viceversa: se $z_n \to z$ allora $\langle z_n\,;\, x\rangle \to \langle z\,;\, x\rangle$ per ogni $x \in H$).

6. Usando il teorema di Fubini ottengo

$$\|f\|_p^p = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\left(\int_{E_x} |f|^p \, dy\right)}_{g(x)} dx \,,$$

dove per ogni $x \in \mathbb{R}$ indico con E_x è l'insieme dei punti $y \in \mathbb{R}^d$ tali che $(x, y) \in E$, vale a dire la palla di centro 0 e raggio $r(x) := (1 + x^4)^{-1}$.
Osservo ora che per ogni $(x, y) \in E$ vale che

$$|x| \leq f(x, y) \leq \sqrt{x^2 + (r(x))^4}$$

e quindi, detto α_d il volume della palla unitaria in $\mathbb{R}^d$,

$$\alpha_d |x|^p \, (r(x))^d \leq g(x) \leq \alpha_d \big(x^2 + (r(x))^4\big)^{p/2} \, (r(x))^d \,.$$

Tenendo conto che $r(x) \sim |x|^{-4}$ per $x \to \pm\infty$ ottengo che g è una funzione limitata su $\mathbb{R}$ tale che

$$g(x) \sim \alpha_d |x|^{p-4d} \quad \text{per } x \to \pm\infty,$$

e quindi, per il principio del confronto asintotico, $\|f\|_p^p = \int_{\mathbb{R}} g(x) \, dx$ è finito se e solo se l'integrale improprio $\int_1^\infty x^{p-4d} \, dx$ è finito, ovvero se e solo se $p < 4d - 1$.

7. a) Ricordo il seguente fatto (di verifica immediata e comunque già visto a lezione): *se $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ è una funzione continua allora la media di g sulla palla $B(x, r)$ converge a $g(x)$ per $r \to 0$.*
Nel caso di f la media su $B(x, r)$ non dipende da r e quindi

$$f(x) = \fint_{B(x,r)} g \, d\mathscr{L}^d \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^d \text{ e } r > 0;$$

questo significa che f ha la proprietà della media (sulle palle) e quindi è armonica.

b) Sia E un'insieme numerabile denso in $\mathbb{R}^d$ e sia f la funzione indicatrice di E: allora la media di f su ogni palla è 0 (e in particolare non dipende dal raggio), ma f non è continua su alcun aperto, e quindi neanche armonica.

c) Basta dimostrare che f coincide quasi ovunque con una funzione continua $\tilde{f} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. In tal caso infatti la media di $\tilde{f}$ sulla palla $B(x, r)$ coincide con quella di f e quindi non dipende da r, e dunque $\tilde{f}$ è armonica per via del punto a).

Comincio con il seguente lemma: *sia $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ una funzione localmente sommabile, e per ogni $0 < r \leq 1$ e $x \in \mathbb{R}^d$ sia $g_r(x)$ la media di g sulla palla $B(x, r)$; allora le funzioni g_r sono continue per ogni r e per $r \to 0$ convergono a g in $L^1(B(0, R))$ per ogni $R > 0$.*
Per dimostrare il lemma indico con ρ la funzione indicatrice della palla $B(0, 1)$ rinormalizzata in modo da avere integrale 1, ed osservo che $g_r = g * \rho_r$; inoltre $g * \rho_r$ coincide sulla palla $B(0, R)$ con $\tilde{g} * \rho_r$, dove $\tilde{g}$ è la funzione che coincide con g sulla palla $B(0, R + 1)$ e vale 0 al di fuori.
Siccome $\tilde{g}$ appartiene a $L^1(\mathbb{R}^d)$, per quanto visto a lezione $\tilde{g} * \rho_r$ è continua su $\mathbb{R}^d$ (perché ρ_r appartiene a $L^\infty(\mathbb{R}^d)$) e per $r \to 0$ converge in $L^1(\mathbb{R}^d)$ a $\tilde{g}$; ne segue che $g_r = g * \rho_r$ è continua su $B(0, R)$ e converge a g in $L^1(B(0, R))$, e il lemma è dimostrato.

Applicando il lemma alla funzione f ottengo che che f_r è continua per ogni r e per $r \to 0$ converge a f in $L^1(B(0, R))$ per ogni $R > 0$; d'altra parte f_r non dipende da r, e quindi deve essere $f_r = f$ q.o.

8. a) Indico con u_n la funzione $u_n(x) := a_n \, u(x - y_n)$. Per ogni intero m ho che

$$\Big\| \sum_{n=0}^{m} |u_n| \Big\|_p \leq \sum_{n=0}^{m} \big\| |u_n| \big\|_p \leq \sum_{n=0}^{\infty} \big\| u_n \big\|_p = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \Big) \|u\|_p \,,$$

e prendendo il sup su tutti gli m ottengo

$$\Big\| \sum_{n=0}^{\infty} |u_n| \Big\|_p \leq \Big(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \Big) \|u\|_p < +\infty \,. \tag{8.1}$$

Ricordando quindi che una funzione positiva in L^p ha valori finiti quasi ovunque ottengo che

$$\sum_{n=0}^{\infty} |u_n(x)| < +\infty \quad \text{per quasi ogni } x \in \mathbb{R}^d,$$

dunque per tali x la serie che definisce $Tu(x)$ converge totalmente, e $Tu(x)$ è be definita. Inoltre

$$|Tu(x)| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \bigl|u_n(x)\bigr| ,$$

e quindi la (8.1) implica

$$\|Tu\|_p \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \right) \|u\|_p < +\infty \, .$$

b) Per $p = 1$, la serie $\sum u_n$ soddisfa $\sum \|u_n\|_1 < +\infty$ e quindi le sue somme parziali convergono a Tu in L^1. Per la continuità della serie di Fourier, le somme parziali della serie $\sum \widehat{u_n}$ convergono *uniformemente* a $\widehat{Tu}$, e questo implica che, per ogni $y \in \mathbb{R}^d$,

$$\widehat{Tu}(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{u_n}(y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-iy_n \cdot y} \, \widehat{u}(y) = g(y) \, \widehat{u}(y) \, ,$$

dove nel secondo passaggio ho usato la formula per la TdF della traslazione $\widehat{\tau_v u} = e^{-iv \cdot y} \, \widehat{u}$, e nel terzo passaggio ho posto

$$g(y) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-iy_n \cdot y} \, .$$

Per concludere osservo che la funzione g è continua perchè somma di una serie di funzioni continue che converge totalmente.

COMMENTI

- Esercizio 8a). Una dimostrazione alternativa del fatto che Tu è una funzione ben definita in $L^p(\mathbb{R}^d)$ è la seguente: la serie $\sum u_n$ converge totalmente in $L^p(\mathbb{R}^d)$ nel senso che

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\|_p = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \right) \|u\|_p < +\infty \, ,$$

e questo implica che la successione delle somme parziali di questa serie è di Cauchy in $L^p(\mathbb{R}^d)$, ed in particolare converge ad un'opportuna funzione indicata appunto con Tu. Attenzione: questa dimostrazione *non implica* che la serie $\sum u_n(x)$ converge per quasi ogni x (come richiesto), e per la solita ragione: per la convergenza di una successione di funzioni in L^p non implica la convergenza puntuale quasi ovunque.

- Esercizio 8b). Diversi dei presenti hanno individuato la funzione g correttamente, senza tuttavia dimostrare che le somme parziali delle funzioni $\widehat{u_n}$ convergono a $\widehat{Tu}$.

1. Usando che la TdF di $u(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2)$ è $\exp(-y^2/2)$ e la formula $(\mathscr{F}u)' = \mathscr{F}(-ixu)$ ottengo
$$\mathscr{F}g = \mathscr{F}\big(-(-ix)^2 u\big) = -(\mathscr{F}u)'' = -\big(\exp(-y^2/2)\big)'' = (1-y^2)\exp(-y^2/2)\,.$$

2. Semplici calcoli danno che
$$c(m,0) = \frac{\pi^{2m}}{2m+1} \text{ per ogni } m; \quad c(0,n) = 0 \text{ per } n \neq 0.$$
Inoltre per $n \neq 0$ e $m \geq 1$ vale che
$$\begin{aligned} c(m,n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 m e^{-inx}\,dx \\ &= \frac{2m}{n^2}\left[(-1)^n \pi^{2m-2} - \frac{2m-1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^{2m-2} e^{-inx}\,dx\right] \\ &= \frac{2m}{n^2}\big[(-1)^n\pi^{2m-2} - (2m-1)\,c(m-1,n)\big] \end{aligned}$$
(nel secondo passaggio ho integrato per parti due volte).

3. Scrivendo $z \in \partial D$ come $z = e^{i\theta}$ ho che $u_0(z) = \theta^2$. Usando quando fatto nell'esercizio 2 ottengo che i coefficienti di Fourier c_n della funzione θ^2 sono
$$c_0 = c(1,0) = \frac{\pi^2}{3}\,, \quad c_n = c(1,n) = \frac{2(-1)^n}{n^2} \quad \text{per } n \neq 0,$$
ed in particolare $\sum |c_n| < +\infty$. Quindi per ogni $z \in \partial D$ vale
$$u_0(z) = \theta^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq 0}} \frac{2(-1)^n}{n^2} e^{in\theta} = \frac{\pi^2}{3} + 4\,\mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} z^n\right),$$
e come visto a lezione, l'estensione armonica di u_0 è
$$u(z) := \frac{\pi^2}{3} + 4\,\mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} z^n\right).$$

4. a) Riscrivo $Pu(x)$ come
$$Pu(x) := \int_I 1_{[-\pi,x]}\, u\,dt\,. \tag{9.1}$$
Utilizzando questa formula e il teorema di convergenza dominata si dimostra facilmente che $Pu(x_n)$ converge a $Pu(x)$ quando $x_n \to x$, ovvero che Pu è una funzione continua.
b) Partendo dalla definizione di $Pu(x)$ si ottiene immediatamente che $|Pu(x)| \leq \|u\|_1$, da cui segue che
$$\|Pu\|_\infty \leq \|u\|_1 \quad \text{per ogni } u \in L^1(I).$$
Come visto a lezione, questa stima implica che l'applicazione lineare P è continua.
c) Dato $p \in [1,+\infty)$, per dimostrare che l'applicazione lineare $P : L^1(I) \to L^p(I)$ è continua basta ricordare che l'immersione di $C(I)$ in $L^p(I)$ è continua, cosa che segue dalla nota stima
$$\|v\|_p \leq (2\pi)^{1/p}\|v\|_\infty\,.$$
d) Indico con T il triangolo formato dai punti (t,x) tali $-\pi \leq t \leq x \leq \pi$. Utilizzando la formula (9.1) e poi il teorema di Fubini ottengo
$$\begin{aligned} c_n(Pu) &= \frac{1}{2\pi}\int_I \left(\int_I 1_T(t,x)\,u(t)\,dt\right) e^{-inx}\,dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_I \left(\int_I 1_T(t,x)\,e^{-inx}\,dx\right) u(t)\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_I \left(\int_t^{\pi} e^{-inx}\,dx\right) u(t)\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_I \left(\frac{i}{n}(-1)^n - \frac{i}{n}e^{-int}\right) u(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_I -\frac{i}{n}e^{-int}\,u(t)\,dt = -\frac{i}{n}\,c_n(u)\,. \end{aligned}$$

(L'uso del teorema di Fubini nel secondo passaggio è giustificato dal fatto che la funzione $v(t,x) := 1_T(t,x)\, u(t)\, e^{inx}$ appartiene a $L^1(I \times I)$, cosa che segue immediatamente dalla disuguaglianza $\big|v(t,x)\big| \le |u(t)|$ e dal fatto che $u \in L^1(I)$; nel quinto passaggio ho usato il fatto che u ha integrale nullo su I.)

5. Voglio applicare la TdF all'equazione $(*)$. A questo scopo ricordo che per ogni $u \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ il prodotto di convoluzione $u * u$ appartiene a $L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ e vale l'identità

$$\mathscr{F}(u * u) = (\mathscr{F} u)^2\,;$$

usando inoltre quanto fatto nell'esercizio 1 ottengo facilmente che

$$\mathscr{F} f(y) = -y^2 \exp(-y^2/2)\,.$$

Applicando quindi la TdF all'equazione $(*)$, la riscrivo come [1]

$$\big(\mathscr{F} u(y)\big)^2 = -y^2 \exp(-y^2/2) \quad \text{per ogni } y, \tag{9.2}$$

o equivalentemente

$$\mathscr{F} u(y) = \pm i g(y) \quad \text{per ogni } y \in \mathbb{R},$$

dove

$$g(y) := y \exp(-y^2/4)\,.$$

Siccome le funzioni $\mathscr{F} u$ e g sono entrambe continue, il segno $\pm$ nella formula precedente è costante in ogni intervallo dove $g \ne 0$, e quindi sia nella semiretta $y < 0$ che nella semiretta $y > 0$. Dunque $\mathscr{F} u$ è necessariamente una delle seguenti quattro funzioni:

$$ig\,,\ -ig\,,\ i\sigma g\,,\ -i\sigma g\,, \tag{9.3}$$

dove σ è la funzione segno.[2]

Siccome g appartiene a L^1, lo stesso vale per le quattro funzioni in (9.3); dunque $\mathscr{F} u$ appartiene a L^1 e posso applicare il teorema di inversione, ottenendo che u è necessariamente una delle seguenti quattro funzioni:

$$\frac{i}{2\pi}\mathscr{F}^* g\,,\ -\frac{i}{2\pi}\mathscr{F}^* g\,,\ \frac{i}{2\pi}\mathscr{F}^*(\sigma g)\,,\ -\frac{i}{2\pi}\mathscr{F}^*(\sigma g)\,. \tag{9.4}$$

Attenzione: non so ancora se queste funzioni sono in L^1, ovvero se sono effettivamente soluzioni dell'equazione $(*)$.

a) Noto che posso calcolare esplicitamente $\mathscr{F} g$, e quindi anche $\mathscr{F}^* g$, ottenendo effettivamente una funzione in L^1. Partendo infatti dalla nota identità

$$\mathscr{F}\big(\tfrac{1}{\sqrt{4\pi}} \exp(-x^2/4)\big) = \exp(-y^2)\,,$$

ottengo

$$\mathscr{F} g = \sqrt{4\pi}\, i\, \mathscr{F}\left(\frac{-ix}{\sqrt{4\pi}} \exp(-x^2/4)\right) = \sqrt{4\pi}\, i\, \big(\exp(-y^2)\big)' = -4\sqrt{\pi}\, iy \exp(-y^2)\,,$$

e quindi

$$\mathscr{F}^* g = -4\sqrt{\pi}\, i(-x) \exp\big(-(-x)^2\big) = 4\sqrt{\pi}\, ix \exp(-x^2)\,.$$

Pertanto due soluzioni dell'equazione $(*)$ sono date dalle prime due funzioni in (9.4), vale a dire

$$u_{1,2} = \pm\frac{2}{\sqrt{\pi}}\, x \exp(-x^2)\,.$$

b) Per quanto detto sopra, il numero di soluzioni dell'equazione $(*)$ è uguale a quattro se $\mathscr{F}^*(\sigma g) \in L^1$, o equivalentemente $\mathscr{F}(\sigma g) \in L^1$, ed è due altrimenti.

Purtroppo non so calcolare esplicitamente $\mathscr{F}(\sigma g)$. Osservo tuttavia che σg è continua e C^1 a tratti (non è derivabile in 0), appartiene a L^1 e la derivata appartiene a L^2. Ora, se σg fosse di classe C^1 un teorema visto a lezione ci permetterebbe di concludere che $\mathscr{F}(\sigma g)$ appartiene a L^1. In effetti quel teorema vale anche per le funzioni continue e C^1 a tratti (cosa che *non* dimostro) e quindi $\mathscr{F}(\sigma g)$ appartiene a L^1 e l'equazione $u * u = f$ ha quattro soluzioni.

---

[1] L'equivalenza tra la $(*)$ e la (9.2) segue dall'iniettività della TdF.

[2] Cioè $\sigma(y)$ vale 1 per $y > 0$, vale 0 per $y = 0$, e vale -1 per $y < 0$.

COMMENTI

- Esercizio 1. Alcuni dei presenti hanno sbagliato il calcolo della derivata seconda della funzione $\exp(-y^2/2)$.

- Esercizio 3. Alcuni dei presenti hanno dato una formula sbagliata per l'estensione armonica u, per esempio
$$u(z) := \frac{\pi^2}{3} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}(z^n + z^{-n})\,.$$
La maggior parte dei presenti ha riportato la formula corretta, ma quasi nessuno ha menzionato il fatto che tale formula vale solo se i coefficienti di Fourier c_n del dato al bordo soddisfano $\sum |c_n| < +\infty$. (Qualcuno non ha menzionato questa condizione ma poi ha dimostrato che la serie converge totalmente sul disco, e questo basta).

- Esercizio 4a). Quasi nessuno dei presenti ha risolto correttamente questo punto: alcuni hanno invocato il teorema fondamentale del Calcolo Integrale, che però non può essere applicato se u non è continua; altri hanno dimostrato che Pu è una funzione limitata, dicendo che questo ne implica la continuità.

- Esercizio 4a). Quasi nessuno ha risolto correttamente questo punto; alcuni hanno provato ad usare il teorema di integrazione per parti, che (di nuovo) non può essere applicato se u non è continua.

- Esercizio 5a). Quasi nessuno ha risolto correttamente questo punto. In particolare diversi dei presenti hanno calcolato erroneamente la trasformata di f, cosa che ha impedito loro di arrivare fino in fondo. Altri hanno scritto due soluzioni di $(*)$ come anti-trasformate di funzioni date esplicitamente, ma hanno omesso di verificare che tali anti-trasformate sono in L^1 (e comunque non si trattava di formule esplicite).

- Esercizio 5b). Quasi tutti hanno affrontato questo punto ma nessuno lo ha risolto correttamente. Il punto si riduce a questa domanda: data g funzione continua a valori complessi, quante sono le funzioni v a valori complessi che risolvono l'equazione $v^2 = g$? Molti hanno semplicemente dato per scontato che ci sono solo due soluzioni (falso: in generale ce ne sono infinite); invece altri hanno affermato che ci sono solo due soluzioni v *continue* (falso se l'insieme dove $g \neq 0$ non è connesso).

6. Indico con $c_n(t)$ i coefficienti di Fourier della funzione incognita $u(t,\cdot)$, e con c_n^0 i coefficienti di Fourier del dato iniziale u_0. Procedendo come al solito si ottiene che se u risolve $(*)$ allora le funzioni c_n risolvono il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot y = n^2(\sin t - 1)\, y \\ y(0) = c_n^0 \end{cases} ,$$

da cui ottengo

$$c_n(t) = c_n^0 \exp(n^2\varphi(t)) \quad \text{con} \quad \varphi(t) := 1 - \cos t - t\,.$$

Pertanto la soluzione u di $(*)$ dovrebbe essere data da

$$u(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underbrace{c_n^0 \exp(n^2\varphi(t) + inx)}_{u_n(t,x)}\,. \tag{10.1}$$

Dimostro il seguente enunciato: *la formula* (10.1) *definisce una funzione continua su* $[0,+\infty)\times\mathbb{R}$ *che è di classe* C^∞ *su* $(0,+\infty)\times\mathbb{R}$ *e risolve il problema* $(*)$.

La dimostrazione è suddivisa in più passi. Comincio con due osservazioni che userò in seguito; la prima è che il dato iniziale u_0 è una funzione di classe C^1 su $[-\pi,\pi]$ con valori uguali agli estremi e quindi, per quanto visto a lezione,

$$\sum |c_n^0| < +\infty\,. \tag{10.2}$$

La seconda osservazione è che la funzione φ soddisfa

$$\varphi(t) < 0 \quad \text{per ogni } t > 0. \tag{10.3}$$

Infatti $\varphi(0) = 0$ e studiando infatti il segno della derivata $\dot\varphi(t) = \sin t - 1$ si ottiene che φ è strettamente decrescente.

Passo ora alla convergenza della serie in (10.1). Detta R la striscia $[0,+\infty)\times\mathbb{R}$, le funzioni u_n in (10.1) soddisfano

$$\|u_n\|_{L^\infty(R)} = |c_n^0|$$

e quindi la serie di funzioni in (10.1) converge totalmente su R, e in particolare definisce una funzione continua u su R.

Studio ora la regolarià di u. Si dimostra per induzione su h che per ogni $h,k = 0,1,\dots$ vale

$$D_t^h D_x^k u_n = c_n^0\,(in)^k\, f_h(t,n)\, \exp(n^2\varphi(t) + inx)\,, \tag{10.4}$$

dove f_h è una funzione della forma

$$f_h(t,n) = \sum_{j=0}^{h} n^{2i} g_{hj}(t) \quad \text{con } g_{hj} \text{ funzioni regolari su } \mathbb{R}.$$

Fissato $\delta\in(0,1)$ indico con R_δ il rettangolo $[\delta,1/\delta]\times\mathbb{R}$ ed osservo che

- per via della (10.2) esiste M tale che $|c_n^0| \le M$ per ogni n;
- per via della (10.3) esiste $m_\delta > 0$ tale che $\varphi \le -m_\delta$ sul compatto $[\delta,1/\delta]$;
- siccome le funzioni $g_{h,j}$ sono continue esiste $m_{\delta,h}$ tale che $|g_{hj}| \le m_{\delta,h}$ sul compatto $[\delta,1/\delta]$ per ogni $j = 0,\dots,h$, e quindi

$$|f_h| \le m_{\delta,h}|n|^{2h} \quad \text{per } t\in[\delta,1/\delta] \text{ e } n \ne 0.$$

Usando queste stime e la formula (10.4) ottengo

$$\|D_t^h D_x^k u_n\|_{L^\infty(R_\delta)} \le M m_{\delta,h} |n|^{2h+k}\, e^{-m_\delta n^2}\,.$$

Ne deduco che, per ogni $h,k = 0,1,\dots$, la serie delle derivate $D_t^h D_x^k u_n$ converge totalmente su R_δ, e dunque la funzione u è di classe C^∞ su R_δ; poiché inoltre questo vale per ogni $\delta > 0$, u è di classe C^∞ sull'unione (delle parti interne) dei rettangoli R_δ, vale a dire su $(0,+\infty)\times\mathbb{R}$.

La verifica che u risolve $(*)$ è routine e la ometto.

7. a) Osservo che Σ è il luogo di zeri della funzione $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di classe C^∞ data da
$$g(x, y) := x^4 - |y|^2 ,$$
e che il gradiente $\nabla g(x, y) = (4x, -2y)$ si annulla solo in $(0, 0)$.
Pertanto, posto $\Omega := \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, Σ^* è il luogo di zeri della restrizione di g all'aperto Ω, e siccome il gradiente di g non si annulla mai su Ω posso concludere che Σ^* è una superficie (2-dimensionale) di classe C^∞.

b) Suppongo per assurdo che Σ sia una superficie di classe C^∞ e indico con T lo spazio tangente a Σ in $(0, 0)$. So che ogni vettore $v \in T$ si rappresenta come $v = (\dot{x}(0), \dot{y}(0))$ dove $(x(t), y(t))$ è un opportuno cammino di classe C^1 in Σ con punto iniziale $(0, 0)$, cioè $x(0) = 0$ e $y(0) = 0$. Siccome $x(t)$ è una funzione di classe C^1, ho che $x(t) = O(t)$ per $t \to 0$ e quindi $|y(t)| = x^2(t) = O(t^2)$, e questo implica $\dot{y}(0) = 0$. Ho dunque dimostrato che ogni $v \in T$ appartiene alla retta $\mathbb{R} \times \{0\}$, ma questo è assurdo perché T ha dimensione 2.

c) Per ogni $x \in \mathbb{R}$, la sezione dell'insieme Σ ad altezza x è una circonferenza di centro 0 e raggio x^2, e quindi Σ è parametrizzato dalla mappa $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \Sigma$ data da
$$\Phi(x, \theta) := (x, x^2 \cos\theta, x^2 \sin\theta) .$$
Osservo ora che
$$\nabla\Phi(x, \theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2x\,\cos\theta & -x^2 \sin\theta \\ 2x\,\sin\theta & x^2\cos\theta \end{pmatrix} ,$$
e infine, ricordando che $(J\Phi)^2 = \sum \det^2(M)$ dove la somma è fatta sugli M minori 2×2 di $\nabla\Phi$, ottengo
$$J\Phi(x, \theta) = (x^4 + 4x^6)^{1/2} .$$
In particolare $J\Phi(x, \theta) \neq 0$ per $x \neq 0$, e la restrizione di Φ all'aperto
$$D := (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times (0, 2\pi)$$
è una parametrizzazione regolare di $\Sigma^* \setminus N$, dove N è la curva dei punti $(x, x^2, 0)$ con $x \in \mathbb{R}$, e quindi può essere usata per calcolare gli integrali su Σ^* (rispetto alla misura d'area σ_2).

d) Per quanto detto sopra
$$\begin{aligned}\|u\|_p^p = \int_{\Sigma^*} |u|^p \, d\sigma_2 &= \int_{\Sigma^*} \frac{1}{(x^2 + x^4)^{p/2}} \, d\sigma_2(x, y) \\ &= \int_D \frac{(x^4 + 4x^6)^{1/2}}{(x^2 + x^4)^{p/2}} \, dx \, d\theta = 4\pi \int_0^{+\infty} \frac{(x^4 + 4x^6)^{1/2}}{(x^2 + x^4)^{p/2}} \, dx .\end{aligned}$$
Spezzo ora l'ultimo integrale come somma di due integrali impropri semplici che analizzo separatamente usando il criterio del confronto asintotico:
$$\int_0^1 \frac{(x^4 + 4x^6)^{1/2}}{(x^2 + x^4)^{p/2}} \, dx \approx \int_0^1 \frac{dx}{x^{p-2}} < +\infty \iff p < 3 ,$$
$$\int_1^{+\infty} \frac{(x^4 + 4x^6)^{1/2}}{(x^2 + x^4)^{p/2}} \, dx \approx \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{2p-3}} < +\infty \iff p > 2 .$$
Posso quindi concludere che u appartiene a $L^p(\Sigma^*)$ se e solo se $2 < p < 3$.

8. a) Si tratta di un semplice calcolo:
$$\begin{aligned}\fint_0^\tau \Phi(y, s) \, ds &= \fint_0^\tau \int_{\mathbb{R}^d} g(x)\, h(x \cdot y + s) \, dx \, ds \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} g(x) \left(\fint_0^\tau h(x \cdot y + s) \, ds \right) dx = \int_{\mathbb{R}^d} g(x) \, a \, dx = ma .\end{aligned}$$
Nel secondo passaggio ho applicato il teorema di Fubini, cosa che posso fare perché
$$\int_0^\tau \int_{\mathbb{R}}^d |g(x)| \, |h(x \cdot y + s)| \, dx \, ds \le \|h\|_\infty \int_0^\tau \int_{\mathbb{R}}^d |g(x)| \, dx \, ds \le \tau \|h\|_\infty \|g\|_1 < +\infty$$
mentre nel terzo passaggio ho usato il fatto che essendo h periodica, la media di una qualunque traslata di h su un qualunque periodo vale a.

b) Basta un semplice cambio di variabile nell'integrale che definisce Φ.

c) Usando la formula al punto b) ottengo

$$\begin{aligned}\big|\Phi(y,s)-\Phi(y,0)\big| &\le \int_{\mathbb{R}^d} \big|g(x-sy/|y|^2)-g(x)\big|\,\big|h(x\cdot y)\big|\,dx \\ &\le \big\|h\big\|_\infty \int_{\mathbb{R}^d} \big|g(x-sy/|y|^2)-g(x)\big|\,dx = \big\|h\big\|_\infty \big\|\tau_{sy/|y|^2}g-g\big\|_1\,,\end{aligned}$$

e per concludere uso che la funzione traslata $\tau_v g$ converge a g in $L^1(\mathbb{R}^d)$ quando $v\to 0$.

d) Usando quanto fatto al punto a) e il teorema di convergenza dominata ottengo

$$\lim_{|y|\to+\infty} \Phi(y,0)-ma = \lim_{|y|\to+\infty} \fint_0^T \Phi(y,0)-\Phi(y,s)\,ds = 0\,;$$

per quanto riguarda il teorema di convergenza dominata nel secondo passaggio, la convergenza puntuale $\Phi(y,0)-\Phi(y,s)\to 0$ segue dal punto c), mentre la dominazione segue dalla stima

$$\big|\Phi(y,s)\big| \le \|h\|_\infty \|g\|_1\,.$$

e) Posto $h(t):=e^{-it}$ si vede subito che

$$\widehat{g}(y)=\Phi(y,0)\,,$$

e per concludere mi basta applicare l'enunciato al punto d) e usare che in questo caso $a=0$.

COMMENTI

- Esercizio 1. Tutti i presenti (peraltro pochi) hanno sbagliato la soluzione del problema di Cauchy che determina i coefficienti di Fourier della soluzione u, scrivendo

  $$c_n(t) = c_n^0\, \exp(-n^2(\cos t + t))\,.$$

  In effetti questa funzione risolve l'equazione differenziale $\dot{y} = n^2(\sin t - 1)\,y$, ma non soddisfa la condizione iniziale $c_n(0)=c_n^0$, bensì $c_n(0)=c_n^0 e^{-n^2}$.
  Questo errore poteva essere trovato: infatti usando questa formula la funzione u in (10.1) risulta essere di classe C^∞ su $[0,+\infty)\times\mathbb{R}$ (cosa che i presenti hanno notato), in contrasto con il fatto che il dato iniziale u_0 è solo di classe C^1 (contraddizione che i presenti non hanno notato).

- Esercizio 3. In origine l'enunciato del punto c) era scritto diversamente: *per ogni s vale che*

  $$\lim_{|y|\to+\infty} \Phi(y,s) = \Phi(y,0)\,.$$

  Scritto così questo enunciato non ha del tutto senso, perchè la variabile su cui viene fatto il limite, cioè y, appare anche a destra dell'uguale.