Corso di Analisi Matematica I per Ingegneria Gestionale, a.a. 2015-16

Esercizi per il ricevimento del 13 ottobre 2015

---

1. Semplificare il più possibile le seguenti espressioni:
   a) $\frac{3^{2x+4}}{9^{x+1}}$; b) $\frac{x^3 \cdot x^2}{(\sqrt{x})^4} \cdot \frac{1}{(x^2)^3}$; c) $\log_5(x^2-1) - \log_5(x+1)$.

2. Determinare l'insieme di definizione di:
   a) $f(x) = \frac{\tan(x+\frac{\pi}{4})}{\arctan(x^2-1)}$; b) $f(x) = \sqrt{1-\log(x+4)}$; c) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-2}{x^2-2x}} + \sqrt{\frac{x+1}{9-x^2}}$;
   d) $f(x) = \frac{x+3}{6x^3+30x^2-33x+18}$; e) $f(x) = \sqrt[7]{\sqrt{x+7} + \sqrt[6]{2-x}}$; f) $f(x) = \arcsin(x+4)$.

3. Determinare l'immagine di:
   a) $\frac{1}{x^2+4x+4}$; b) $e^{-x}+3$; c) $\sqrt{x-4}$.

4. Discutere al variare di $a \in \mathbb{R}$ l'insieme di definizione e la paritá o disparitá della funzione $f(x) = x^a$.

5. Disegnare $f(x) = 2\cos(\frac{x}{2})$ e $g(x) = -3\sin(2x)$.
   Determinare l'immagine e il periodo di f e g.

6. Disegnare la curva $x - y^2 - 3y = 0$. Dire se é una funzione.

7. Disegnare $f(x) = \sqrt{x^2+2x+5+|4x+4|}$. Determinare dominio e immagine di f.

8. Risolvere le seguenti disequazioni:
   a) $\frac{\sin(x)-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\cos(x)-\frac{1}{2}} \geq 0$; b) $\frac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{\cos(x+\frac{\pi}{3})} \geq 0$.

9. Trovare $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che a) $\sin(2x-\alpha) = -\cos(2x)$; b) $\sin(\alpha x) = \cos(2x-\pi)$.

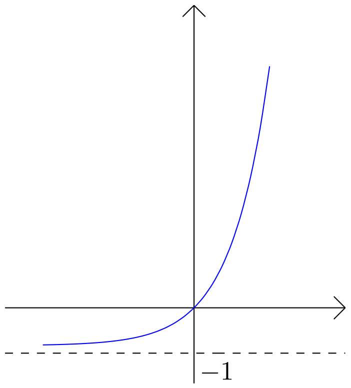
10. Disegnare il grafico di $f(x) = -e^{-x}$ e risolvere graficamente la disequazione $f(x) \geq x^2 - 4x + 3$.

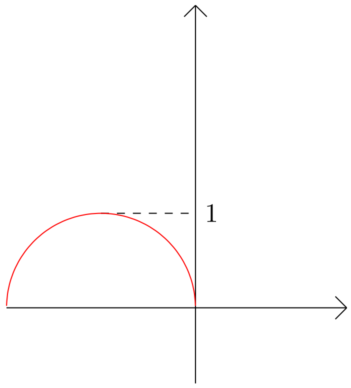
11. Disegnare l'insieme dei punti (x, y) del piano tali che:
    a) $x^5 \geq x^2$; b) $\sin(x) \leq y \leq x$ e $x > 0$.

12. Disegnare la funzione $f(x) = \frac{2}{1+x}$ e la sua inversa g. Dire se le funzioni f e g sono crescenti o decrescenti.

13. Determinare la funzione inversa di:
    a) $f(x) = \cos\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$; b) $f(x) = \log_3(x+1) + 2$; c) $f(x) = \sqrt{1-2x}$.

14. Proporre una formula per i seguenti grafici:





Corso di Analisi Matematica I per Ingegneria Gestionale, a.a. 2015-16

Esercizi per il ricevimento del 20 ottobre 2015

---

1. Dire se le seguenti funzioni sono iniettive o suriettive:
   a) $f(x) : \begin{cases} \mathbb{R} \to [0, +\infty) \\ x \mapsto e^{-x} - 2 \end{cases}$ b) $g(x) : \begin{cases} \mathbb{R} \to [2\pi, 4\pi) \\ x \mapsto \frac{1}{2}\cos(x) \end{cases}$ c) $h(x) : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x-5}{x+3} \end{cases}$

2. Calcorare i seguenti limiti:
   a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \cos(2^x)$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2^x}{2^{x+2}}$; c) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{e^x}{x^2-4}$;
   d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{x^3-1}$; e) $\lim\limits_{x\to 1^+} \arctan\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$; f) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{2x}{1+\cos(x)}$;

3. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni:
   a) x^2e^{-x}; b) $\log\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)$; c) $\exp(1+x^2)$;
   d) $2^{6x}/4^{2x}$; e) $\frac{e^{2x+4x^2}\cos(x)}{x}$; f) $\log(\frac{e^{x+1}}{x^2-1})$.

4. Disegnare a) $|\cos(x)|$; b) $\cos|x|$; c) $|\cos(x)| + \frac{1}{2}$; d) $|\cos(x) + \frac{1}{2}|$.

5. Disegnare l'insieme dei punti (x, y) del piano tali che $\dfrac{1}{x} \le y$ o $y \le \log(x+1)$.

6. Usando la definizione, dimostrare che
$$\lim_{x\to 4} \frac{2x^2 - 7x - 4}{x-4} = 9$$

7. Scrivere la definizione di limite finito per x che tende a $-\infty$.

8. Scrivere un esempio di:
   a) funzione non continua;
   b) funzione continua ma non derivabile;
   c) funzione continua e derivabile con derivata non continua.

9. Disegnare il quadrato di $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{6})$ e il reciproco di $g(x) = x^2 + 1$.

Esercizi di ripasso degli argomenti precedenti:

1. Trovare l'insieme di definizione delle seguenti funzioni:
   a) $f(x) = \log(\log(\log(x)))$; b) $f(x) = \frac{x^2+3}{x^4-2x^2-8}$; c) $f(x) = \sqrt[3]{\sin(x+\frac{\pi}{2})}$;
   d) $f(x) = \frac{1}{x^4-5x^3+8x^2-5x+1}$ e) $f(x) = \sqrt{\sqrt{4x^2+7x-2}+3-2x}$ f) $f(x) = \frac{\tan(\pi x)}{x^2}$.

2. Risolvere le seguenti disequazioni:
   a) $\frac{\sqrt{3}\tan(x)-1}{\tan^2(x)-tan(x)} \geq 0$;
   b) $\sin(x) + cos(x) > 0$;
   c) $3 - \tan^2(x) \leq 0$.

Corso di Analisi Matematica I per Ingegneria Gestionale, a.a. 2015-16

Simulazione compitino - 27 ottobre 2015

---

1. Determinare l'insieme di definizione della funzione $\sqrt{\log(x^3+1)}$.

2. Calcolare le seguenti derivate:
a) $f(x) = \frac{e^{\log(x^2-4)}}{x-2}$; b) $f(x) = 3^x + 3^{\sin x}$; c) $f(x) = x \arcsin(x)$.

3. Calcolare:
a) $\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{\log\log x}$; b) $\lim_{x\to 1^+} \log\log(x)$; c) $\lim_{x\to 2\pi} \frac{\sin(\frac{x}{4})}{x^2}$.

4. Riordinare le funzioni che seguono in modo da ottenere un'affermazione corretta:
$\frac{x^4}{x^2+1} \ll log(x+1) \ll \frac{2^x}{3^x} \ll x^3$ per $x \to +\infty$.

5. Dire per quali $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = \begin{cases} e^{x^2} & \text{se}\, x \geq 0 \\ ax^2 + b & \text{se}\, x < 0 \end{cases}$ è derivabile su tutto $\mathbb{R}$.

6. Determinare i numeri reali a per cui $f(x) = \frac{x+a}{x-a}$ una funzione pari.

7. Determinare i punti di massimo e minimo di $f(x) = x - \cos x + \sin x$ in $[0, +\infty)$.

8. Disegnare linsieme dei punti (x, y) tali che $(x-1)^2 + (y+1)^2 \leq 1$.

1. Trovare l'area del triangolo che ha come veritici i punti di intersezione con l'asse x della funzione $f(x) = e^x(x^2 + 2 - 3)$ e il terzo vertice nel punto di minimo relativo della funzione.

2. Si considerino $f(x) = \log(x)$ e $g(x) = ax^2$ con $a \in \mathbb{R}$. Si discuta al variare di a l'equazione $f(x) = g(x)$ e si dica per quale valore di a i due grafici sono tangenti.

3. Una compagnia deve stendere due cavi interrati per la trasmissione dati dalla citt A (rappresentata dal punto del piano cartesiano di coordinate $(1, 0)$) alle localit C e C' (rappresentate da $(0, c)$ e $(0, -c)$ con c numero positivo), e per risparmiare sul costo degli scavi si considera la possibilitá di usare lo stesso tracciato per i due cavi fino ad un certo punto B di coordinate $(x, 0)$, per poi farli proseguire separatamente verso le rispettive destinazioni. Tenendo conto che il costo unitario delle opere di scavo è 5, mentre il costo unitario del cavo da stendere è 1, dire per quali c conviene separare immediatamente i due tracciati, cioè conviene prendere B uguale ad A, e per quali no.

Corso di Analisi Matematica I per Ingegneria Gestionale, a.a. 2015-16

Simulazione compitino - 3 novembre 2015

---

1. Risolvere la disequazione $\cos^2(x) - 2\cos(x) - 3 < 0$.

2. Calcolare le seguenti derivate:
   a) $f(x) = e^{\frac{x+1}{x}}$; b) $\arctan\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$; c) $\log(1 + \tan(x))$.

3. Calcolare:
   a) $\lim_{x\to\infty} x^4 \cdot 2^{-x}$; b) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\sin(x^3)}{x^2\cos x}$; c) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\cos(e^{3x} + e^{-3x})}{\log x}$.

4. Determinare a e b in modo che la funzione $f(x) = e^{x(ax+b)}$ abbia un punto di massimo o minimo in $x = 1/2$.

5. Scrivere lo sviluppo di Taylor allordine 10 in 0 di $f(x) := \sin(2x^2)$.

6. Data $f(x) = \sin^2(x - \frac{\pi}{2})$ scrivere la funzione inversa f^{-1} in un'intervallo in cui è definita.

7. Calcolare le coordinate polari dei seguenti punti, espressi in coordinate cartesiane:
   a) $(-1, 1)$ b) $(-\sqrt{3}, 1)$ c) $(0, -2)$.

8. Risolvere graficamente la disequazione $\frac{1}{x^2} \geq 2\sin(x)$.

Corso di ANALISI MATEMATICA I per Ingegneria Gestionale, a.a. 2015-16

SIMULAZIONE COMPITINO - 10 NOVEMBRE 2015

Prima parte

1. Trovare le soluzioni della disequazione $\tan(2x) \leq \sqrt{3}$ comprese tra 0 e $\frac{\pi}{2}$.

2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni:
   a) $\frac{1}{2} \arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2}$; b) $\frac{\sqrt[4]{x^3}}{x-2}$; c) $f(\tan(x))$.

3. Calcolare:
   a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x \log x}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} cos(x^{20} + e^x)$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^2)}{x \sin x}$.

4. Determinate la parte principale di $\frac{\sin(x^8)}{\log(1+x^4)}$ per $x \to 0$.

5. Determinare i valori di a e b per cui $f(x) = ax^3 + 4bx^2 + 1$ ha un punto di flesso in $x = 1/6$.

6. Data $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 + 3 \end{cases}$ modificare dominio e codiminio affinchè sia iniettiva e suriettiva.

7. Scrivere la retta tangente a $f(x) = x^3 + 3x^2 - x + 4$ in $x = -3$.

8. Disegnare $f(x) = 2\cos(\frac{x}{2})$ e $g(x) = -3\sin(2x)$.
   Determinare l'immagine e il periodo di f e g.

Seconda parte

1. Sono dati quattro numeri tali che il primo è doppio del secondo, il terzo è la metà del quarto, la somma è 18, e sono scelti in modo tale che il prodotto sia il più piccolo possibile; determinare questi quattro numeri.

2. a) Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) := 2 - \sqrt{3 + e^{-4x^2}}$.
   b) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ trovare parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) + ax^2$.

3. Dato $a > 0$, trovare la sfera di raggio minimo in cui è possibile inscrivere un cilindro di volume $2\pi a^3$. Trovare poi il cono di superficie laterale massima inscritto nella sfera ottenuta.

Esercizi 24 novembre 2015

---

1. Calcolare le primitive delle seguenti funzioni:

   a) $\int e^{4x+1}\,dx$;

   b) $\int \frac{16x}{3\sqrt{1-4x^4}}\,dx$;

   c) $\int x\cos x\,dx$;

   d) $\int x^3\log x\,dx$;

   e) $\int \frac{-3x^4+x^2-1}{x-2}\,dx$;

   f) $\int \frac{1}{x^2-6x+5}\,dx$;

   g) $\int \frac{1}{x^2-10x+25}\,dx$;

   h) $\int \frac{1}{4x^2-2x+1}\,dx$;

   i) $\int \frac{x+7}{x^2-16}\,dx$.

2. Calcolare i seguenti integrali:

   a) $\int_1^e x\log x\,dx$;

   b) $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$;

   c) $\int_{-3}^0 \sqrt{9-x^2}\,dx$;

   d) $\int_0^2 \sqrt{a^2-x^2}\,dx$ con $a>0$.

3. Un punto si muove nel piano con la seguente legge oraria:

$$P(t) := (t^4-1, -2t^2)\,.$$

   a) Calcolare la velocità del punto ad ogni istante t ed il suo modulo.
   b) Calcolare la distanza percorsa tra l'istante $t=0$ e $t=2$.

4. Un punto si muove nel piano con la seguente legge oraria:

$$P(t) := \big(1+\cos(e^t), 1-\sin(e^t)\big)\,.$$

   a) Calcolare la velocità del punto ad ogni istante t ed il suo modulo.
   b) Calcolare la distanza percorsa tra l'istante $t=0$ e $t=1$.
   c) Disegnare la traiettoria del punto.

5. Un punto si muove nello spazio con la seguente legge oraria:

$$P(t) := \big(t, 2\cos(3t), 2\sin(3t)\big)\,.$$

a) Calcolare la velocità e l'accelerazione del punto ad ogni istante t.
b) Calcolare la distanza percorsa tra l'istante $t = 0$ e $t = 2\pi$.

6. Un punto si muove nel piano con la seguente legge oraria:
$$P(t) := (at^2 + b, ct^2 + d)\,.$$
Trovare le costanti a, b, c, d in modo tale che all'istante $t = 0$ il punto si trovi in $(0, 0)$, abbia velocità nulla, ed accelerazione $(4, -2)$.

Ripasso

1. Trovare le soluzioni della disequazione $\cos x \geq -\frac{1}{2}$ comprese tra 0 e 2π.

2. Trovare il valore minimo della funzione $f(x) := \frac{-1}{x^2-4x+6}$ per $-1 \leq x \leq 1$.

3. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := \begin{cases} ax^2 & \text{per } x \leq 4 \\ a - x & \text{per } x > 4 \end{cases}$ è continua nel punto $x = 4$.

4. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := (a + 2x^2)e^{3x}$ risulta essere crescente su tutto $\mathbb{R}$.

5. Calcolare i seguenti limiti:
a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \sqrt[5]{x}\log x$; b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x^4}{\sqrt{4 + x^6}}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} \frac{e^x}{x^2 - 4}$.

6. Scrivere il polinomio di Taylor di ordine 3 (in 0) di $\sqrt[3]{1 - 9x^3}$.

7. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ vale che $e^x \log x = o(x^a)$ per $x \to +\infty$.

8. Disegnare linsieme A dei punti (x, y) tali che $\sqrt{|x + 1|} \leq y \leq -\sin x$.

Corso di Analisi Matematica I per Ingegneria Gestionale, a.a. 2015-16

Esercizi 2 dicembre 2015

---

1. Calcolare l'area della regione di piano limitata della curva di equazione $y = x + \frac{4}{x}$ e dalla retta di equazione $y = 5$.

2. Calcolare l'area della regione di piano limitata dalla parabola di equazione $y = -x^2 + 4x + 2$ e dalle rette del fascio di equazione $y = kx + 2$.

3. Si consideri la regione R del piano limitata da $y = x^2$ e da $y = -x^4 + 4x$. Derminare il volume del solido ottenuto dalla rotazione di R
   a) attorno all'asse delle ascisse;
   b) attorno alla retta $y = 6$.

4. Studiare la funzione di equazione $y = \frac{x}{x-1}$ e rappresentarla. Determinare il volume del solido generato dalla rotazione completa attorno all'asse delle x della regione finita di piano limitata da $y = \frac{x}{x-1}$, dall'asse delle x e dalla rette $x = 2$ e $x = 3$.

5. Consideriamo un solido V nello spazio con le seguenti proprietà: le sezioni orizzontali di V, cioè quelle ortogonali allasse verticale y, sono tutti quadrati con lati paralleli agli assi x e z con centro nellorigine, ed il profilo di V, cioè la proiezione sul piano xy, è delimitata dallasse delle x e dalla curva di equazione $y = 4x^2$. Tracciare un disegno approssimativo di V e calcolarne il volume.

6. Calcolare le seguenti primitive:
   a) $\int \frac{-2\sin x + \cos x}{\sin x}\,dx$;
   b) $\int \frac{1-2x}{4+x}\,dx$;
   c) $\int x\left(x^2+1\right)^3\,dx$;
   d) $\int \frac{1}{16x^2+8x+2}\,dx$;
   e) $\int \frac{x^2}{x^6-4x^3+5}\,dx$.

7. Calcolare i seguenti integrali:
   a) $\int_0^{+\infty} \frac{2x}{(x^2+1)^2}\,dx$;
   b) $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$;
   c) $\int_0^1 \left(x^2 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)\,dx$;
   d) $\int_1^2 \log\frac{1}{x-1}\,dx$.

Corso di ANALISI MATEMATICA I per Ingegneria Gestionale, a.a. 2015-16

ESERCIZI 9 DICEMBRE 2015

---

1. Calcolare il valore delle serie:

   a) $\sum_{n=0}^{\infty} 5^{-n}$;

   b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{5^{n+1}}$;

   c) $\sum_{n=2}^{\infty} (3x)^n$.

2. Dire per quali $a > 0$ i seguenti integrali impropri risultano essere finiti:

   a) $\int_1^{\infty} \frac{x^{3a}+2}{x^a-1}\, dx$;

   b) $\int_2^{\infty} \frac{1+x^{2a}}{e^x}\, dx$.

3. Studiare il comportamento dell'integrale improprio:

   a) $\int_1^{\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x}\, dx$;

   b) $\int_0^{\pi} \frac{1}{\sin x}\, dx$;

   c) $\int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{x}}\, dx$.

4. Studiare il comportamento della serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$.

5. Un punto si muove nel piano con la seguente legge oraria:
$$P(t) := (t^3 - 3t, 3t^2)\,.$$
   a) Calcolare la velocità del punto ad ogni istante t ed il suo modulo.
   b) Calcolare lo spazio percorso tra l'istante $t = 0$ e $t = 1$.
   c) Il punto occupa due volte la stessa posizione?