Versione: 25 maggio 2012

Università di Pisa

Corso di laurea in Scienze Geologiche

Raccolta di esercizi per il corso di

Matematica

a.a. 2011/12

Giovanni Alberti

GIOVANNI ALBERTI
Dipartimento di Matematica
Università di Pisa
largo Pontecorvo 5
56127 Pisa
www.dm.unipi.it/~alberti

Questa è una raccolta degli esercizi assegnati durante il corso di Matematica per la laurea triennale in Scienze Geologiche nell'anno accademico 2011/12. Gli esercizi sono suddivisi in gruppi corrispondenti all'incirca ad argomenti distinti.

Programma del corso. Sono riportati in corsivo gli argomenti non fondamentali.

1. Funzioni, grafici, numeri complessi
   1.1 Funzioni e grafici di funzioni: dominio di definizione, funzione inversa. Funzioni elementari: funzioni lineari, potenze, esponenziali, logaritmi, funzioni trigonometriche (seno, coseno, tangente) e funzioni trigonometriche inverse.
   1.2 Operazioni sui grafici di funzioni. Interpretazione di equazioni e disequazioni in termini di grafici di funzioni. Grafici logaritmici e semi-logaritmici.
   1.3 Coordinate polari di un punto nel piano. Numeri complessi. Rappresentazione esponenziale dei numeri complessi.

2. Derivate e integrali
   2.1 Derivata di una funzione: significato geometrico ed interpretazione fisica. Derivate delle funzioni elementari e regole per il calcolo delle derivate.
   2.2 Applicazione delle derivate allo studio dei grafici di funzioni. Individuazione dei punti di massimo e di minimo di una funzione.
   2.3 Calcolo dei limiti di funzioni. Metodo di de l'Hôpital. Confronto tra i comportamenti asintotici di esponenziali, potenze e logaritmi. Notazione di Landau ("o" piccolo).
   2.4 Sviluppo di Taylor e parte principale di una funzione. Fattoriale, coefficienti binomiali e formula del binomio di Newton. *Rappresentazione delle costanti π ed e come somme infinite tramite gli sviluppi di Taylor di $\arctan x$ ed e^x.*
   2.5 Definizione dell'integrale definito di una funzione in termini di area del sottografico. Teorema fondamentale del calcolo integrale. Primitive delle funzioni elementari e regole per il calcolo delle primitive (integrali indefiniti) e degli integrali definiti. Calcolo dell'area di una figura piana. *Calcolo del volume di una figura solida.*

3. Equazioni differenziali
   3.1 Esempi di equazioni differenziali tratti dalla meccanica; significato dei dati iniziali.
   3.2 Equazioni a variabili separabili. Equazioni lineari del primo ordine. Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti, omogenee e non omogenee.
   3.3 *Equazione dell'oscillatore armonico smorzato e forzato, risonanza.*

4. Vettori e matrici
   4.1 Vettori nel piano, nello spazio, e in dimensione qualune. Somma di vettori. Prodotto scalare di vettori: definizione analitica e geometrica. Esempi di grandezze vettoriali: spostamento, velocità, accelerazione, forza.
   4.2 Matrici. Somma, prodotto, determinante ed inversa. Risoluzione dei sistemi di n equazioni lineari in n incognite tramite vettori e matrici.
   4.3 Prodotto vettoriale nello spazio: definizione geometrica ed analitica.

1. Funzioni e grafici

[versione corretta: 20/11/2011]

---

1. Trovare, senza usare la calcolatrice, il numero intero che meglio approssima $\log_{10}(75.486)$ per difetto (in altre parole, la parte intera di questo logaritmo).

2. Determinare il dominio di definizione della funzione $\log(e^x - 1)$.

3. Determinare il dominio di definizione della funzione $\sqrt{\log x + 2}$.

4. Risolvere l'equazione $\sqrt{x} = x - 2$.

5. Risolvere la disequazione $\dfrac{x+1}{1-x} \geq x$.

6. Risolvere la disequazione $\dfrac{x+1}{3+2x-x^2} \geq 0$.

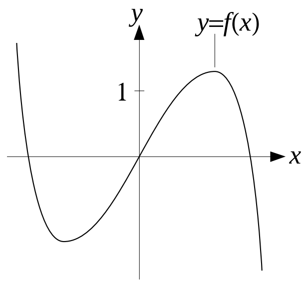
7. Sia f la funzione data nella figura accanto. Risolvere *graficamente* le seguenti equazioni e disequazioni:

   a) $f(x) = 0$,

   b) $f(x) = 1$,

   c) $f(x) \leq 0$,

   d) $f(x) \geq 1$.



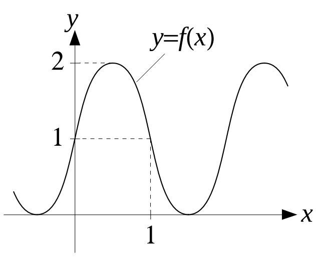
8. Disegnare il grafico delle seguenti funzioni:

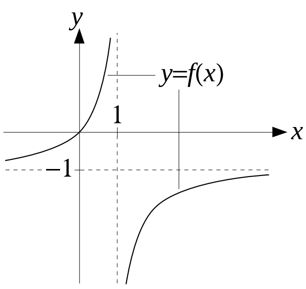
   a) e^{-x}, b) $(x+1)^3$, c) $\dfrac{1}{x} + 1$, d) $2 + 2\sin(x)$, e) $\dfrac{1}{x-2} - 1$,

   f) $\cos(\pi - x) - 1$, g) $\dfrac{\pi}{2} - \arctan x$, h) $\arctan(x+1) - \dfrac{\pi}{4}$, i) $\tan(x/\pi)$,

   l) $\log(2x)$, m) $\log \dfrac{1}{x^2}$, n) $|\sin x|$, o) $2 + \log|x|$, p) $e^{1-x} - e$.

9. Proporre delle formule per le funzioni nelle figure sottostanti:

   a) 

   b) 

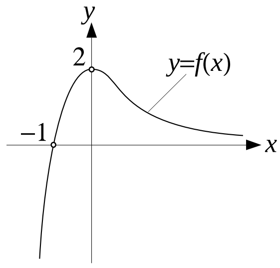
10. Risolvere le seguenti disequazioni:

    a) $\log(3x) \geq 1$, b) $\arctan(x^2) \geq \dfrac{\pi}{4}$, c) $e^{x(x-1)} \geq 1$, d) $\dfrac{2 - \log x}{4 - x^2} \leq 0$.

11. Trovare le soluzioni comprese tra $-\pi$ e π dell'equazione $|\tan x| = 1$.

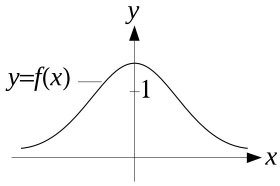
12. Sia $f(x)$ la funzione data nella figura accanto. Disegnare il grafico delle seguenti funzioni:

    a) $f(-x)$, b) $-f(-x)$, c) $f(x-1)$,
    d) $2 - f(x)$, e) $f(-x) - 2$, f) $\frac{1}{2}f(x)$,
    g) $1 - \frac{1}{2}f(x)|$, h) $f(2x-2)$,
    l) $|f(x)|$, m) $f(|x|)$.



13. Sia f la funzione data nella figura accanto. Risolvere *graficamente* le seguenti equazioni e disequazioni:

    a) $f(x) = \frac{1}{2}$, b) $f(x) \geq \frac{1}{2}$,
    c) $f(x) = x$, d) $f(x) \geq x$,
    e) $f(x) = -x$, f) $f(x) \geq -x$,
    g) $f(x) = x^2$, h) $f(x) \geq x^2$.



14. Sia f la funzione considerata nell'esercizio precedente. Disegnare l'insieme dei punti (x, y) tali che $x^2 \leq y \leq f(x)$.

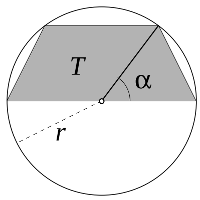
15. Disegnare il grafico della funzione $y = \sin(2x)$.

16. Determinare le soluzioni della disequazione $\sin(2x) \geq 1/2$ comprese tra 0 e 2π.

17. Disegnare l'insieme dei punti (x, y) che soddisfano ciascuna delle seguenti condizioni:

    a) $1 - x^2 \leq y \leq x^2 - 1$, b) $y \leq e^x$ e $y \leq e^{-x}$, c) $|x| \leq 1$ e $y \leq 1$,
    d) $|x| \leq 1$ o $y \leq 1$, e) $y \leq e^x$ e $x \leq e^y$, f) $x + y \leq 1$ e $y - x \leq 1$,
    g) $|x| \leq 1$ e $|y| \leq 1$, h) $|x + y| \leq 1$ e $|x - y| \leq 1$.

18. Sia T il trapezio disegnato nella figura sottostante. Calcolare il l'area e il perimetro di T in funzione del raggio r e dell'angolo α.



19. Trovare la formula per calcolare $\tan^2 x$ a partire da di $\sin x$.

20. Trovare le formule per calcolare $\sin x$ e $\cos x$ a partire da $\tan x$.

21. Risolvere la disequazione $\sin\left(\dfrac{4}{1+x^2}\right) \geq \dfrac{1}{2}$.

22. Risolvere la disequazione $\tan\big(\exp(-x^2)\big) \leq 1$.

23. Risolvere *graficamente* la disequazione $\cos x \geq x^2 - 1$.

24. [*Esercizio difficile*] Fare un disegno approssimativo del grafico delle seguenti funzioni:

    a) $e^x \sin x$, b) $e^{-x} \sin x$, c) $\dfrac{1}{1+x^2}$, d) $\sin(\pi e^x)$, e) $\log(1 + e^x)$.

2. Numeri complessi e altri argomenti

[versione corretta: 12/12/2011]

---

1. Determinare le coordinate polari r e α dei seguenti punti del piano, dati in coordinate cartesiane:

   a) $(1,-1)$, b) $(-2,0)$, c) $(-1,\sqrt{3})$, d) $(0,-3)$, e) $\big(-\sqrt{2},-\sqrt{6}\big)$.

2. Determinare le coordinate cartesiane dei seguenti punti del piano, dati in coordinate polari:

   a) $\begin{cases} r=2 \\ \alpha=\frac{\pi}{3} \end{cases}$, b) $\begin{cases} r=2^{3/2} \\ \alpha=-\frac{7\pi}{4} \end{cases}$, c) $\begin{cases} r=4 \\ \alpha=-\frac{8\pi}{3} \end{cases}$, d) $\begin{cases} r=5 \\ \alpha=\frac{3\pi}{2} \end{cases}$, e) $\begin{cases} r=5 \\ \alpha=-\frac{\pi}{2} \end{cases}$.

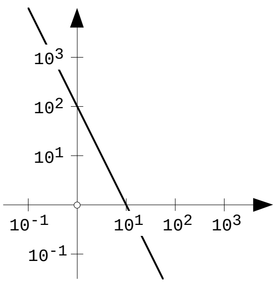
3. Disegnare l'insieme dei punti la cui coordinata polare r soddisfa $r \le 2$. [*Ricordare il significato geometrico di r.*]

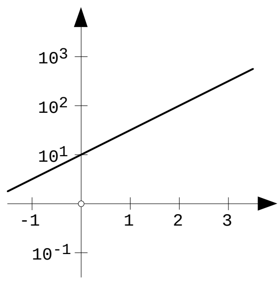
4. Disegnare l'insieme dei punti le cui coordinate polari r e α soddisfano $1 \le r \le 2$ e $0 \le \alpha \le \frac{3\pi}{4}$.

5. Sia T il triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,0)$ e $)(0,\sqrt{3})$. Caratterizzare i punti che appartengono a T in termini di equazioni e disequazioni sulle coordinate cartesiane x e y.

6. Sia T il triangolo considerato nell'esercizio precedente. Caratterizzare i punti di T in termini di equazioni e disequazioni sulle coordinate polari r e α.

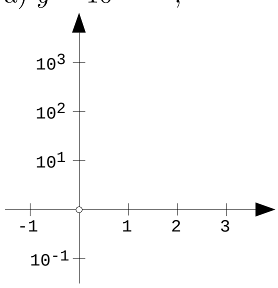
7. Per ciascuno dei grafici sottostanti, scrivere la formula della funzione ivi rappresentata. [*Prestare attenzione alle scale utilizzate in questi grafici!*]

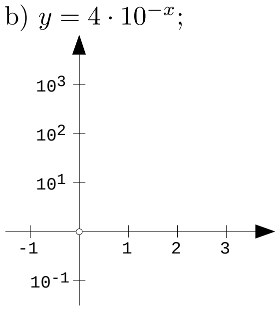
   a)
   

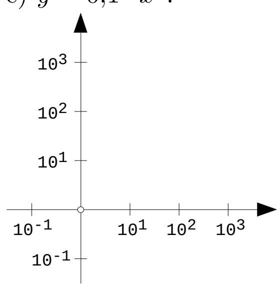
   b)
   

8. Disegnare nelle ficure sottostanti il grafico di ciascuna delle seguenti funzioni:

   a) $y = 10^{1+x/2}$; b) $y = 4 \cdot 10^{-x}$; c) $y = 0{,}1 \cdot x^2$.

9. Calcolare z_1+z_2, z_1-z_2, $z_1 \cdot z_2$ e z_1/z_2 per le seguenti coppie di numeri complessi:

   a) $z_1 = 3i$ e $z_2 = 1-i$, b) $z_1 = 2+3i$ e $z_2 = 2-3i$, c) $z_1 = 5+i$ e $z_2 = -4i$.

10. Svolgere i seguenti calcoli:

    a) $\dfrac{4}{1+3i} + \dfrac{4}{1-3i}$, b) $(5i+2)^2 - (5i-2)^2$, c) $\left(\dfrac{1+3i}{1-3i}\right)^2$.

11. Trovare tutte le soluzioni complesse dell'equazione $z^2 - 4z + 5 = 0$.

12. Trovare tutte le soluzioni complesse dell'equazione $z^2 = 1 + i$. [*Traccia: posto* $z = x + iy$, *semplificando l'equazione* $(x+iy)^2 = 1 + i$ *si ottiene* $(x^2 - y^2) + 2xyi = 1 + i$, *che conduce a due equazioni separate:* $x^2 - y^2 = 1$ *e* $2xy = 1$.]

13. Trovare le radici complesse dell'equazione $z^2 - 6z + 10 = 0$.

14. Trovare le radici complesse dell'equazione $z^2 + 4iz - 5 = 0$.

15. Per i seguenti numeri complessi z, scrivere il modulo $r = |z|$ e l'argomento α:

    a) $z := -2 - 2i$, b) $z := -1 + i\sqrt{3}$, c) $z := \sqrt{6} + i2\sqrt{2}$, d) $z := -4i$.

16. Dato un numero complesso $z = x+iy$, si ricordi che il numero complesso coniugato è $\bar{z} := x-iy$. Dimostrare che $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ e $1/z = \bar{z}/|z|^2$.

17. Dette r e α sono le coordinate polari del numero complesso z, si ha che $z = re^{i\alpha}$, dove si è posto $e^{i\alpha} := \cos\alpha + i\sin\alpha$. Dimostrare le seguenti formule:

    a) $\bar{z} = re^{-i\alpha}$ e $1/z = r^{-1}e^{-i\alpha}$,

    b) $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2\, e^{i(\alpha_1+\alpha_2)}$,

    c) $z^n = r^n e^{in\alpha}$ per ogni intero positivo n,

    d) $z^{-n} = r^{-n}e^{-in\alpha}$ per ogni intero positivo n.

18. Calcolare i seguenti numeri utilizzando la notazione esponenziale:

    a) $(1 - i\sqrt{3})^8$, b) $(-1+i)^{-6}$, c) $(1+i)^{-10}$, d) $\left(\dfrac{\sqrt{2}+i\sqrt{6}}{2(1+i)}\right)^6$.

19. Scrivere in forma esponenziale il numero complesso $8i$, e quindi trovare le radici cubiche di $8i$, vale a dire le soluzioni complesse dell'equazione $z^3 = 8i$.

20. Trovare le soluzioni complesse dell'equazione $z^4 + 4 = 0$

21. Dati due numeri complessi z_1 e z_2, verificare che il modulo $|z_1 - z_2|$ è uguale alla distanza tra z_1 e z_2, visti come punti del piano cartesiano.

22. Disegnare l'insieme dei numeri complessi z (visti come punti del piano cartesiano) tali che $1 \le |z| \le 2$.

23. Disegnare l'insieme dei numeri complessi z tali che $|z - (1+i)| \le \sqrt{2}$.

24. Per ciascuna delle seguenti disequazioni disegnare l'insieme dei numeri complessi z che la soddisfano:

    a) $|z-2| = 2$, b) $|z-2i| \ge 2$, c) $|z-2| = |z+2|$, d) $|z+i| \le |z+1| \le 2$.

3. Derivate

[versione: 10/12/2011]

---

1. Determinare l'insieme di definizione e la derivata delle seguenti funzioni:

   a) $e^{2x} + x\sin x$, b) $\sqrt{x+1}$, c) $\sqrt[3]{2x}$, d) $\dfrac{1}{(1+x)^4}$, e) $x^3 \log x$,

   f) $\arctan(x^2)$, g) $\sin^3 x$, h) $\log(\cos x)$, i) $\sin(2\pi x^2)$, l) $\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$,

   m) $\dfrac{1}{\sqrt{\log x}}$, n) $\log(\log x)$, o) $\dfrac{\log(\cos x)}{\sin x}$, p) $(\sin x^2)^2$, q) $\exp(\sin(\log x))$.

2. Fatte le dovute semplificazioni, calcolare la derivata delle seguenti funzioni:

   a) $\sqrt{x^4}$, b) $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}$, c) $\log(e^x)$, d) $\sin^2(1/x) + \cos^2(1/x)$, e) $\sin(\arcsin(2x))$,

   f) $e^{2\log x}$, g) $\log(x^2 + 2x^4) - \log(x + 2x^3)$, h) $2^{1-2x}4^x$, i) $\log\left(\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}\right)$.

3. Calcolare le derivate prima, seconda e terza delle seguenti funzioni:

   a) e^{2x}, b) $\dfrac{1}{2+x}$, c) $\log(3x)$, d) $\sqrt{1+x}$, e) $\sin x$, f) $\cos x$.

4. Dato un intero qualunque n, calcolare la derivata di ordine n di ciascuna delle funzioni nell'esercizio precedente.

5. Verificare che $x^x = e^{x\log x}$ e usare questa identità per calcolare la derivata di x^x.

6. Calcolare la derivata di $(x^x)^x$.

7. Scrivere le equazioni delle rette tangenti al grafico di $y = e^{-x}$ nei punti di ascissa $0, 1, -1$.

8. Trovare il numero a per cui la retta tangente al grafico della funzione $y = e^x$ nel punto di ascissa a passa anche per l'origine.

9. Dato $a > 0$, calcolare l'area del triangolo T_a delimitato dagli assi cartesiani e dalla retta tangente al grafico di $y = 1/x$ nel punto di ascissa a.

10. Tra tutte le retta tangenti al grafico di $y = \log x$, trovare quella che passa per l'origine.

11. Calcolare i seguenti limiti usando se necessario le informazioni fornite di grafici delle funzioni elementari coinvolte:

    a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}$, b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \log x$, c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan x$, d) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x$, d) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x$.

12. Per ciascuna delle seguenti funzioni, dire se sono crescenti, decrescenti, o altro:

    a) e^{1-2x}, b) $x^2(1+x)$, c) $\arctan(1-x^3)$, d) $\log(1/x)$, e) $e^{\sin x}$.

13. Trovare i punti di massimo e di minimo assoluto della funzione $f(x) = x^3(4-3x)$ relativamente all'intervallo $0 \le x \le 2$.

14. Trovare i punti di massimo e di minimo assoluto della funzione $f(x) = x^3 - 12x$ relativamente all'intervallo $-3 \le x \le 5$.

15. Per ciascuna delle seguenti funzioni, studiare il segno della derivata, trovare i punti in cui questa si annulla e dire se si tratta di punti di massimo locale, minimo locale o altro:

    a) $x^2 - 2x + 3$, b) $\log(x^2 + 1)$, c) $x^4 + 2x^2 + 3$, d) e^{-x^2}.

16. Disegnare sommariamente il grafico di ciascuna delle funzioni date nell'esercizio precedente, usando (e provando a motivare) i seguenti fatti: quando x tende a $+\infty$ o a $-\infty$, le prime tre funzioni tendono a $+\infty$ mentre l'ultima tende a 0.

17. Per ciascuna delle seguenti funzioni, dire se sono convesse, concave, o altro:

    a) $x - e^x$, b) $e^{(x^2)}$, c) $\sin x$, d) $2 + x - x^4$, e) $\dfrac{1}{1 + x^6}$, f) $e^x + e^{-x}$.

18. a) Disegnare il grafico di $f(x) = x^3 - 3x - 1$ limitatamente all'intervallo $-2 \le x \le 3$.

    b) Determinare, al variare di $a \in \mathbb{R}$ il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = a$ comprese tra -2 e 3.

19. a) Per ogni numero reale $a \ge 0$, scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di $y = e^{-x}$ nel punto di ascissa a, e quindi calcolare l'area del triangolo delimitato da tale retta e dagli assi cartesiani.

    b) Determinare per quale valore di a tale area risulta essere massima.

    c) Determinare per quale valore di a tale area risulta essere minima.

20. a) Tra tutti i rettangoli di area 1 trovare quello di perimetro minimo. [*Suggerimento: partendo dalla formula per l'area di un rettangolo, calcolare l'altezza in funzione della base.*]

    b) Tra tutti i rettangoli di perimetro 1 trovare quello di area massima. [*Suggerimento: partendo dalla formula per il perimetro di un rettangolo, calcolare l'altezza in funzione della base.*]

21. a) Tra tutti i triangoli rettangoli di area 1 trovare quello di perimetro minimo.

    b) Tra tutti i triangoli rettangoli di perimetro 1 trovare quello di area massima.

22. a) Disegnare approssimativamente il grafico della funzione $f(x) = x^3 - 3x + 2$ relativamente alla semiretta $x \ge 0$ (se serve, usare il fatto che la funzione tende a $+\infty$ quando $x \to +\infty$).

    b) Dimostrare che $x^3 - 3x + 2 \ge 0$ per ogni numero reale $x \ge 0$.

    c) Dimostrare che $y^3 + 2z^3 \ge 3yz^2$ per ogni coppia di numeri reali positivi y, z. [*Suggerimento: dividere la disuguaglianza da dimostrare per z^3 e usare il punto b).*]

4. Limiti e studi di funzioni

[versione estesa: 25/3/2012]

Richiamo delle nozioni fondamentali

Definizione. Date due funzioni f e g, si dice che $f(x)$ è *trascurabile* rispetto a $g(x)$ quando x tende ad un dato x_0 (che può essere anche $+\infty$ o $-\infty$) se

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0\,;$$

in tal caso si scrive $f(x) \ll g(x)$ oppure $f(x) = o(g(x))$ (quest'ultima espressione si legge "$f(x)$ è o piccolo di $g(x)$"). In particolare $f(x) = o(1)$ significa semplicemente che $f(x)$ tende a 0.

Si dice invece che $f(x)$ è *asintoticamente equivalente* a $g(x)$ per x che tende ad x_0, e si scrive $f(x) \sim g(x)$, se

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1\,.$$

Queste nozioni sono utili per confrontare due funzioni che tendono a zero (dette quindi funzioni infinitesime, o più semplicemente infinitesimi) oppure due funzioni che tendono a infinito (dette infiniti) per x che tende a x_0. Negli esercizi che seguono x_0 vale 0 oppure $\pm\infty$.

Proposizione. Valgono i seguenti fatti (si sottointende che x tende ad un certo x_0 assegnato, e che tutti i limiti in questione esistano):

(i) f_1 è asintoticamente equivalente a f_2 se e solo se è possibile scrivere f_1 come f_2 più un resto trascurabile rispetto a f_2 stessa, ovvero se
$$f_1(x) = f_2(x) + o(f_2(x))\,.$$

(ii) Se f ed f_2 sono asintoticamente equivalenti allora
$$\lim_{x\to x_0} f_1(x) = \lim_{x\to x_0} f_2(x)\,.$$

(iii) Se $f_1 \sim f_2$ e $g_1 \sim g_2$, allora $f_1 \cdot g_1 \sim f_2 \cdot g_2$ ed in particolare
$$\lim_{x\to x_0} f_1(x)\, g_1(x) = \lim_{x\to x_0} f_2(x)\, g_2(x)\,.$$
Analogamente si ha $f_1/g_1 \sim f_2/g_2$ e
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f_2(x)}{g_2(x)}\,.$$

L'enunciato (iii) è noto come "principio di sostituzione" (degli inifiniti o degli infinitesimi), e può essere riassunto dicendo che nel calcolare il limite di un prodotto (o rapporto) di funzioni, possiamo liberamente sostituire ad uno o più fattori una funzione asintoticamente equivalente.

Regola di de l'Hôpital. Date due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ che tendono entrambe a 0 o entrambe a $\pm\infty$ quando $x \to x_0$, allora

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

Confronto delle funzioni elementari. Quando x tende a $+\infty$ le funzioni esponenziali, le potenze ed il logaritmo sono tutte infinite o infinitesime, e si pone quindi il problema di confrontarle; vale dunque che:

(i) $x^a \ll x^b$ per $a < b$;
(ii) $e^{ax} \ll e^{bx}$ per $a < b$;
(iii) $\log x \ll x^a \ll e^{bx}$ per $a > 0$ e $b > 0$.

Viceversa per x che tende a zero si ha

(iv) $x^a \ll x^b$ per $a > b$;

(ii) $\log x \ll x^{-a}$ per $a > 0$.

Usando il fatto che $a^x = e^{\log a \cdot x}$, l'enunciato (ii) implica che $a^x \ll b^x$ per $0 < a < b$, mentre (iii) implica che $\log x \ll x^a \ll b^x$ per $a > 0$ e $b > 1$.

Esercizi

1. Calcolare i seguenti limiti:

   a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2+4}$, b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^x}{1+x}$, c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-3x}$, d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} 1 + x^3 \sin x$,

   e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 2^{1+x^2}$, f) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^4-4}$, g) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^2 - e^{2x}$, h) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \log(x+x^2)$,

   i) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-2/x}$, l) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \arctan x$, m) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^3 e^x$, n) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \cos(e^x)$,

   o) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \arctan(1+x^3)$, p) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{x+1}$, q) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 1-x\log x$, r) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \log(1-\cos x)$,

   s) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \log(\log x)$, t) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \sqrt{1-\log x}$, u) $\displaystyle\lim_{x\to\pi^+} \frac{1}{\sin x}$, v) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 2\sin(1/x^3)$.

2. Verificare che i seguenti limiti non esistono:

   a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$, b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sin x$, c) $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2} \tan x$, d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^x \sin x$.

3. Per ciascuna delle seguenti funzioni trovare una funzione della forma ax^b oppure ae^{bx} che sia asintoticamente equivalente quando $x \to +\infty$ [*per esempio:* $(2x+1)^2 \sim 4x^2$]:

   a) $x^3 + 2x - 2$, b) e^{2x+1}, c) $(x+\log x)^2$, d) $5x^4 - 3e^x$, e) $\sin x - 2x$,

   f) $\sqrt{4x^2+5}$, g) 2^{-x}, h) $\displaystyle\frac{2^x+1}{4^x-1}$, i) $\displaystyle\frac{x^2+x-1}{2-x-x^4}$, l) $2^x - 4^x$, m) $\log(2e^x+1)$.

4. Per ciascuna delle seguenti funzioni trovare una funzione della forma ax^b che sia asintoticamente equivalente quando $x \to 0$:

   a) $x^3 + 2x$, b) $x^2 + \displaystyle\frac{2}{x^3}$, c) $\sqrt{x}$, d) $\displaystyle\frac{1+x}{x-x^2}$, e) $\displaystyle\frac{e^x}{x}$, f) $x^2\cos x - x^3$,

   g) $\displaystyle\frac{2}{\sin x}$, h) $\displaystyle\frac{e^x-1}{x^2}$, i) $\sqrt{x-x^2}$, l) $\sin(x^4)$, m) $e^{3x^2}-1$, n) $x\sin(x^4+2x^2)$.

5. Ciascuna delle seguenti funzioni è data dalla somma di diversi addendi. Tra questi, individuare quello rispetto al quale tutti gli altri sono trascurabili quando $x \to +\infty$ [*per esempio, se la funzione è $x - 2x^2 + \log x$, l'addendo cercato è $-2x^2$*]:

   a) $x^3 + 2x$, b) $e^x - x^{10}$, c) $\sqrt{x} + \sin x$, d) $x^2 + x^{-1} + e^{-x}$, e) $\log x + \log(\log x)$,

   f) $\displaystyle\frac{x^2}{x+1} + x^2$, g) $\displaystyle\frac{1}{1+x} + \log x + 2\sin x$, h) $2 + \displaystyle\frac{1}{\sqrt{x}} + 2^{-x}$, i) $e^{-x} + \displaystyle\frac{1}{x^4}$.

6. Per ciascuna delle funzioni da a) ad e) nell'esercizio precedente, individuare l'addendo rispetto al quale tutti gli altri sono trascurabili quando $x \to 0^+$.

7. Per ciascuna delle seguenti coppie di funzioni $f(x)$ e $g(x)$, dire se si ha $f \sim g$, $f \ll g$, $f \gg g$ o altro quando $x \to +\infty$:

   a) $x^3 + 1$ e $x(x^2 - 2x)$, b) $x^4 + e^{-x}$ e $x^3 + e^{-x}$, c) $\displaystyle\frac{1}{x^2+1}$ e x^{-3},

   d) $\displaystyle\frac{1}{2x^2+1}$ e $\displaystyle\frac{x}{4x^3+1}$, e) $3x^2 + 1$ e 2^x, f) $1 + e^{-x}$ e $2 + x$,

g) $2^x + x^2$ e $4^x - x$, h) $x \log x$ e $x + 1$, i) $1 - \dfrac{1}{x^2+1}$ e $1 + \log x$.

8. Per ciascuna delle seguenti coppie di funzioni $f(x)$ e $g(x)$, dire se si ha $f \sim g$, $f \ll g$, $f \gg g$ o altro quando $x \to 0$:

   a) x^3 e $x^3 + \sqrt{x}$, b) $\dfrac{x^2 - 4x}{x^4 - 2x^2}$ e $\dfrac{2}{x}$, c) $e^x - 1$ e $\dfrac{x^2}{\sin x}$, d) $\dfrac{1}{x^2+1}$ e x^{-2}.

9. Per ciascuna delle seguenti funzioni, dire se sono convesse, concave, o altro:

   a) $x - e^x$, b) $\exp(x^2)$, c) $\sin x$, d) $2 + x - x^4$, e) $\dfrac{1}{1+x^6}$, f) $e^x + e^{-x}$.

10. Per ciascuna delle seguenti funzioni determinare l'insieme di definizione, calcolare i limiti agli estremi dell'intervallo o degli intervalli che formano tale insieme, ed infine tracciare approssimativamente il grafico, individuando i punti di massimo e minimo (assoluti o locali):

    a) $x^3 - 3x + 1$, b) $\log(x^2 + 1)$, c) e^{-x^2}, d) $x^4 + 2x^2 + 3$, e) $\dfrac{1}{1+x^4}$,

    f) $\dfrac{x^6}{1+x^6}$, g) $e^x + e^{-x}$, h) $\dfrac{1}{x^2-1}$, l) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$, m) $x \log x$. n) $x^2 \log x$.

11. a) Disegnare il grafico della funzione $f(x) := x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 1$.
    b) Determinare il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = 3$.
    c) Determinare il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = 2$.
    d) Per ogni numero reale a, determinare il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = a$.
    e) Per ogni numero reale a, determinare il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = a$ comprese tra -2 e 3.

12. Si consideri la funzione $f(x) := x^2 + \dfrac{1}{x}$.
    a) Determinare l'insieme di definizione di f.
    b) Calcolare i limiti di f per x che tende a $+\infty, -\infty, 0^+, 0^-$.
    c) Disegnare il grafico di f.
    d) Dire quante sono le soluzioni dell'equazione $f(x) = a$ al variare di $a \in \mathbb{R}$.

13. Disegnare approssimativamente il grafico della funzione $f(x) = e^x - x$ e usare quanto fatto per dimostrare che $e^x \geq x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

14. a) Dimostrare che $e^x \geq 2x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
    b) Dire per quali $a \geq 0$ si ha che $e^x \geq ax$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

15. a) Disegnare il grafico della funzione $f(x) := \dfrac{1 + \log x}{x}$.
    b) Calcolare il valore massimo assunto da $f(x)$ per $x > 0$.
    c) Dire per quali i numeri reali a si ha che $ax \geq 1 + \log x$ per ogni $x > 0$.

16. Dimostrare che $x \log x \geq x - 1$ per ogni $x > 0$. [*Suggerimento: ricondursi allo studio del grafico di un'opportuna funzione.*]

17. Applicando la regola di de l'Hôpital si ottiene che

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\log x}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1/x}{1} = +\infty \,.$$

    Verificare che il primo limite è uguale in realtà a $-\infty$, e spiegare cosa non va nel ragionamento fatto sopra.

5. Sviluppi di Taylor e parti principali

[versione: 11/3/2012]

Richiamo delle nozioni fondamentali

Parte principale. Data una funzione $f(x)$, se esistono a e b numeri reali con $a \neq 0$ tali che

$$f(x) \sim ax^b \quad \text{per } x \to 0,$$

allora si dice che la potenza ax^b, è la *parte principale* di $f(x)$ per $x \to 0$. Analoga definizione vale quando x tende a $+\infty$.

Retta tangente all'infinito. Data una funzione $f(x)$, se esistono a e b numeri reali tali che

$$f(x) = ax + b + o(1) \quad \text{per } x \to +\infty,$$

allora la retta di equazione $y = ax + b$ risulta essere la retta tangente al grafico di f all'infinito (per la precisione a $+\infty$). Analoga definizione vale quando x tende a $-\infty$.

Sviluppo di Taylor. Data una funzione f ed un numero intero positivo d, si può scrivere f come un polinomio di grado minore o uguale a d più un resto trascurabile rispetto a x^d per $x \to 0$, vale a dire

$$f(x) = P_d(x) + o(x^d)\,. \tag{1}$$

Per la precisione esiste un'unico polinomio P_d per cui vale questa formula, ed è dato da

$$P_d(x) := f(0) + \frac{D^1 f(0)}{1!}x^1 + \frac{D^2 f(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{D^d f(0)}{d!}x^d\,,$$

dove $D^d f$ indica la derivata di ordine d di f e l'espressione $d!$ indica il *fattoriale* di d, vale a dire il prodotto $d! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ (per convenzione si pone $0! := 1$).

Osservazioni. (i) Lo sviluppo di Taylor può essere calcolato nella vicinanza di un qualunque punto x_0, ma non ci limitiamo per semplicità al caso $x_0 = 0$. Da qui in poi parleremo quindi di sviluppi di Taylor senza specificare "nel punto 0".

(ii) Il termine a destra dell'uguale nella (1) si chiama *sviluppo di Taylor* di ordine d di f (nel punto 0), mentre P_d si chiama *polinomio di Taylor* di ordine d di f.

(iii) Si noti che se una funzione f può essere scritta come $f(x) = P(x) + o(x^d)$ con P polinomio di grado minore o uguale a d, allora P è necessariamente il polinomio di Taylor di ordine d di f.

(iv) È possibile scrivere uno sviluppo di Taylor "di ordine infinito" considerando la somma (infinita) di tutti i monomi $D^n f(0)\, x^n/n!$ con n intero (senza fermarsi a quello di grado d). Tale espressione viene chiamata sviluppo di Taylor di ordine infinito, o più propriamente serie di Taylor, della funzione f; in alcuni casi (ma non sempre) questa somma infinita può essere effettivamente calcolata e coincide con $f(x)$.

Sviluppi di alcune funzioni elementari. È utile ricordare i seguenti sviluppi di Taylor (dove d è un numero intero positivo e il simbolo $\pm$ significa $+$ o $-$ a seconda della scelta di d):

(i) $e^x = 1 + \frac{1}{1!}x^1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^2 + \cdots + \frac{1}{d!}x^d + o(x^d)$;

(ii) $\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots \pm \frac{1}{d!}x^d + o(x^{d+1})$ con d pari;

(iii) $\sin x = \frac{1}{1!}x^1 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots \pm \frac{1}{d!}x^d + o(x^{d+1})$ con d dispari;

(iv) $(1 + x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots \pm x^d + o(x^d)$;

(v) $\log(1 + x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots \pm \frac{1}{d}x^d + o(x^d)$;

(iv) $(1+x)^a = 1+\binom{a}{1}x^1+\binom{a}{2}x^2+\binom{a}{3}x^3+\cdots+\binom{a}{d}x^d+o(x^d)$ dove a è un numero reale qualunque e si è posto

$$\binom{a}{d} := \frac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-d+1)}{d!}$$

L'espressione $\binom{a}{d}$ si legge "a su di" ed è chiamata coefficiente binomiale di indici a e d (il perché sarà chiarito dal prossimo paragrafo). Si noti che se n è un numero intero positivo allora

$$\binom{n}{d} := \frac{n!}{d!\,(n-d)!}\,.$$

Si osservi inoltre che questa formula ha senso pure per $d = 0$, e che

$$\binom{n}{d} = \binom{n}{n-d}\,; \quad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1\,; \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n\,.$$

Binomio di Newton. Dato n intero positivo, la potenza $(a+b)^n$ può essere scritta come somma di monomi della forma $a^{n-k}b^k$ tramite la formula del binomio di Newton:

$$(a+b)^n = \sum_{d=0}^{n} \binom{n}{d} a^{n-d} b^d\ .$$

Esercizi

1. Utilizzando gli sviluppi di Taylor delle funzioni elementari dati sopra, calcolare lo sviluppo di Taylor di ordine 8 delle seguenti funzioni:

   a) $\dfrac{1}{1-x^4}$, b) $\exp(2x^3)$, c) $\dfrac{1}{1+2x^2}$, d) $\sin(x^2)$, e) $\cos(x^3)$, f) $x^3\sin x$,

   g) $\log(1-2x^2)$, h) $x^2\exp(-x^2)$, i) $\sqrt[3]{1-3x^3}$, l) $\exp(x^2)+\exp(-x^2)$.

2. Partendo dal fatto che lo sviluppo di Taylor di ordine 1 di e^y è $1+y$ saremmo tentati di dedurre che quello di $e^{x+1} = 1+(x+1) = 2+x$. Spiegare perché questo ragionamento è sbagliato, e calcolare correttamente lo sviluppo di ordine 1 di e^{x+1}.

3. Calcolare lo sviluppo di Taylor di ordine 3 della funzione $\tan x$ a partire dalla definizione, e calcolare quindi lo sviluppo di Taylor di ordine 6 di $\tan(x^2)$.

4. Calcolare lo sviluppo di Taylor di ordine 6 delle seguenti funzioni:

   a) $x^2\sin^2 x$, b) $\sqrt{1-x^2\sin x}$, c) $(x-\sin x)^2$, d) $\exp(\sin(x^2))$, e) $\log(\cos(x^3))$.

5. Determinare la parte principale per $x\to 0$ delle seguenti funzioni:

   a) $\sin(3x)$, b) e^x-1, c) $1-\cos(2x)$, d) $\log(1-x)$, e) $(1-x^2)^a-1$,

   f) $\dfrac{1}{e^{2x}-1}$, g) $e^x+e^{-x}-2$, h) $\dfrac{x}{\sin(x^4)}$, i) $\dfrac{1}{x}+2+x^3$, l) $\dfrac{e^x}{\sin x}$,

   m) $\dfrac{x^2}{2-x^2}$, n) $(x-\sin x)^{-4}$, o) $x-\sin x$, p) $e^x-\sqrt{1+2x}$, q) $\dfrac{1}{\cos x}-1$,

   r) $\sin x-\log(1+x)$, s) $1-\sqrt[3]{1-x^2}$, t) $(\sin x)^2-\sin(x^2)$, u) $\exp(x^2)-\cos(2x)$.

6. Calcolare i seguenti limiti utilizzando dove necessario quanto fatto nell'esercizio precedente:

   a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^x-1}$, b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin^5 x}{x^4}$, c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\exp(x^4)-1}{1-\cos(x^2)}$, d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\log(1-2x)}$,

   e) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}$, f) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x-\sin x}$, g) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\exp(x^2)-1}{1-\cos x}$, h) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{\log(1+x^2)}$,

   i) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2\sin(1/x)$, l) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\sqrt{1-1/x}$, m) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\sin(e^{-x})$.

   [*Nei punti i) e l) conviene applicare il cambio di variabile* $t=1/x$.]

7. Determinare la parte principale per $x \to 0^+$ delle seguenti funzioni:

   a) $\dfrac{\cos x}{x} + \log x$, b) $\sqrt{x^2 + x^3}$, c) $\big(x + \sqrt{x^3}\big)^3$, d) $(\log x + 1/x)^4$.

8. Determinare la parte principale per $x \to +\infty$ delle seguenti funzioni:

   a) $x^4 + x \sin x + 3$, b) $x + \log x + 2e^{-x}$, c) $x\,\sin(1/x^2)$, d) $\sqrt{1 + \dfrac{1}{x}} - 1$,

   e) $\dfrac{x^2 - 2}{x + 3\log x}$, f) $1 - e^{1/x}$, g) $2x^3 + e^{-x}x^5$, h) $\cos\Big(\dfrac{1}{x+1}\Big)$.

   [*Nei punti c), d) e f) conviene applicare il cambio di variabile* $t = 1/x$ *e determinare con i metodi già visti la parte principale per* $t \to 0$ *della funzione così ottenuta.*]

9. Determinare la parte principale per $x \to +\infty$ di $\log(1 + e^x)$. [*Suggerimento: raccogliere* e^x *nell'argomento del logaritmo.*]

10. Determinare la parte principale per $x \to +\infty$ della funzione
$$f(x) := \sqrt{x+1} - \sqrt{x}\,.$$
   [*Mettere in evidenza* $\sqrt{x}$ *e poi ricondursi alla funzione nel punto d) dell'esercizio precedente.*]

11. Sia a un numero positivo. Determinare la parte principale per $x \to +\infty$ della funzione
$$f(x) := (x+1)^a - (x-1)^a\,.$$

12. Determinare la parte principale per $x \to 0$ della funzione
$$f(x) := \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\,.$$
   [*Scrivere* $f(x)$ *come un'unica frazione e calcolare separatamente le parti principali di numeratore e denominatore.*]

13. Per ciascuna delle seguenti funzioni calcolare la parte principale per $x \to +\infty$, dire se esiste la retta tangente al grafico, sempre per $x \to +\infty$, ed in caso affermativo determinarne l'equazione:

   a) $x + \dfrac{1}{x}$, b) $\sqrt{x^3 + 1}$, c) $x - \log x$, d) $x^2 - 2x + 1$, e) $\dfrac{x^2 + 1}{3x^2 - 2}$,

   f) $x\,\exp(1/x)$, g) $\dfrac{x^2 - 1}{x + 2}$, h) $\sqrt{x^2 + a}$ con $a \in \mathbb{R}$, i) $x^2 \log\Big(1 + \dfrac{1}{x}\Big)$,

   l) $x^2 \sin\Big(\dfrac{1}{x-1}\Big)$, m) $x^2 \exp(1/x)$, n) $\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$, o) $\sqrt{x^4 + x^3} - \sqrt{x^4 - x^3}$.

14. Calcolare i seguenti limiti (attenzione, non tutti richiedono l'uso di parti principali e sviluppi di Taylor):

   a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{e^x}$, b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(\sin x^2)^3}{1 + x^6}$, c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} + \frac{1}{x\log x}$, d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x - x}$,

   e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x + \sin x}{1 + x^2}$, f) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x - \log x}{x + \log x}$, g) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x - \log x}{x + \log x}$, g) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\sin(e^x)}{e^{2x}}$.

15. Dimostrare le seguenti regole per l'uso degli "o piccoli" (in tutte si sottintende che x converge allo stesso x_0):
   a) se $f(x) = o(g(x))$ e $g(x) = o(h(x))$, allora $f(x) = o(h(x))$;
   b) se $f(x) = o(g(x))$ e $g(x) \sim c \cdot h(x)$ con c costante diversa da 0, allora $f(x) = o(h(x))$;
   c) se $f_1(x) = o(g(x))$ e $f_2(x) = o(g(x))$, allora $f_1(x) + f_2(x) = o(g(x))$;
   d) se $f_1(x) = o(g_1(x))$ e $f_2(x) = o(g_2(x))$, allora $f_1(x) \cdot f_2(x) = o(g_1(x) \cdot g_2(x))$;
   e) se $f_1(x) = o(g_1(x))$, allora $f_1(x) \cdot f_2(x) = o(g_1(x) \cdot f_2(x))$.

16. Sia f una funzione, e per ogni intero $d = 0, 1, \dots$ sia a_d il coefficiente di x^d nello sviluppo di Taylor di f, e sia b_d il corrispondente coefficiente nello sviluppo della derivata f'. Verificare che
$$b_d = (d + 1)a_{d+1} \quad \text{per ogni } d = 0, 1, \dots$$
Usare questo fatto per dimostrare che il polinomio di Taylor di ordine d di f' coincide con la derivata del polinomio di Taylor di ordine $d + 1$ di f.

17. a) Una funzione f si dice *pari* se $f(-x) = f(x)$ per ogni x. Far vedere che se f è pari allora $D^k f(-x) = D^k f(x)$ per ogni intero k pari, e $D^k f(-x) = -D^k f(x)$ per ogni intero k dispari.
b) Dedurne che se f è pari allora $D^k f(0) = 0$ per ogni intero k dispari, e quindi lo sviluppo di Taylor di f contiene solo i monomi di grado pari.
c) Dimostrare analogamente che se f è *dispari*, vale a dire che $f(-x) = -f(x)$ per ogni x, allora lo sviluppo di Taylor di f contiene solo i monomi di grado dispari.

18. a) Calcolare lo sviluppo di Taylor di ordine infinito di $1/(1 + x^2)$.
b) Calcolare lo sviluppo di Taylor di ordine infinito di $\arctan x$.
c) Utilizzando quanto fatto al punto b), mostrare che
$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$
[*Suggerimento: per a) partire dallo sviluppo (noto!) di* $1/(1 + x)$; *per b) usare lo sviluppo di* $1/(1 + x^2)$ *e il fatto che questa funzione è la derivata di* $\arctan x$.]

6. Integrali

[versione: 20/4/2012]

---

1. Calcolare i seguenti integrali definiti utilizzando la tabella delle primitive elementari:

$$\text{a) } \int_0^2 e^x\,dx, \qquad \text{b) } \int_1^e \log x\,dx, \qquad \text{c) } \int_0^\pi \sin x\,dx, \qquad \text{d) } \int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2}.$$

2. Calcolare i seguenti integrali definiti utilizzando un opportuno cambio di variabili (qui come negli esercizi che seguono, la lettera a indica un generico numero reale positivo):

$$\text{a) } \int_0^2 e^{-x}\,dx, \qquad \text{b) } \int_0^{\pi/a} \sin(ax)\,dx, \qquad \text{c) } \int_0^1 (1+3x)^{-1/2}\,dx, \qquad \text{d) } \int_{-1}^1 \frac{dx}{1+4x^2},$$

$$\text{e) } \int_{-1}^1 x\,e^{1+ax^2}\,dx, \qquad \text{f) } \int_0^1 \frac{\log^4 x}{x}\,dx, \qquad \text{g) } \int_0^1 x^2\left(1+x^3\right)^a dx, \qquad \text{h) } \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin^3 x}\,dx.$$

3. Calcolare i seguenti integrali definiti utilizzando la formula di integrazione per parti:

$$\text{a) } \int_0^1 xe^x\,dx, \qquad \text{b) } \int_1^e (1+x^a)\log x\,dx, \qquad \text{c) } \int_0^\pi x^2\sin x\,dx, \qquad \text{d) } \int_1^e \frac{\log x}{x^a}\,dx.$$

4. Calcolare le seguenti primitive (integrali indefiniti) tramite un opportuno cambio di variabili:

$$\text{a) } \int e^{3x+1}\,dx, \qquad \text{b) } \int \sqrt{1-2x}\,dx, \qquad \text{c) } \int \cos^a x\,\sin x\,dx, \qquad \text{d) } \int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx,$$

$$\text{e) } \int xe^{x^2+1}dx, \qquad \text{f) } \int \frac{1}{1+4x^2}\,dx, \qquad \text{g) } \int x\sqrt{1-x^2}\,dx, \qquad \text{h) } \int \frac{x}{1+x^4}\,dx.$$

5. Calcolare le seguenti primitive usando la formula di integrazione per parti:

$$\text{a) } \int x^a\log x\,dx, \qquad \text{b) } \int xe^{-2x}\,dx, \qquad \text{c) } \int x^2\cos x\,dx, \qquad \text{d) } \int e^x\sin x\,dx.$$

6. Calcolare le seguenti primitive:

$$\text{a) } \int 1+2\log(x^a)\,dx, \qquad \text{b) } \int \frac{x+1}{2x}\,dx, \qquad \text{c) } \int x(2+e^{2x})\,dx, \qquad \text{d) } \int (1-x)\,\sin(2x)\,dx,$$

$$\text{e) } \int \sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\,dx, \qquad \text{f) } \int \frac{1}{\sqrt[3]{(1-2x)^2}}\,dx, \qquad \text{g) } \int x\sqrt{1-x}\,dx.$$

7. Calcolare i seguenti integrali impropri:

$$\text{a) } \int_0^2 \log x\,dx, \qquad \text{b) } \int_0^\infty \frac{dx}{e^x}, \qquad \text{c) } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}, \qquad \text{d) } \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}, \qquad \text{e) } \int_1^\infty x^{-a}\,dx,$$

$$\text{f) } \int_1^\infty \log x\,dx, \qquad \text{g) } \int_0^1 \frac{1}{x^a}\,dx, \qquad \text{h) } \int_{-\infty}^0 e^{ax}\,dx, \qquad \text{i) } \int_0^\infty \frac{1}{x^a}\,dx, \qquad \text{l) } \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+4x^2},$$

$$\text{m) } \int_0^1 x\,\log x\,dx, \qquad \text{n) } \int_{-\infty}^\infty xe^{-x}dx, \qquad \text{o) } \int_0^\infty \frac{x}{1+x}\,dx, \qquad \text{p) } \int_1^\infty \sin x\,dx.$$

8. Calcolare $\displaystyle\int \frac{\log^a x}{x}\,dx$. [*Suggerimento: usare il cambio di variabili* $y = \log x$.]

9. Calcolare $\displaystyle\int \frac{dx}{4+x^2}$. [*Suggerimento: usare il cambio di variabili* $x = 2y$.]

10. Calcolare $\displaystyle\int \sin^3 x\, dx$.

    [*Scrivere la funzione* $\sin^3 x$ *come* $\sin x(1-\cos^2 x)$ *ed usare il cambio di variabili* $y = \cos x$.]

11. Calcolare $\displaystyle\int \log^2 x\, dx$.

    [*Tentare le seguenti strade: a) usare il cambio di variabili* $y = \log x$ *e poi la formula di integrazione per parti; b) applicare direttamente la formula di integrazione per parti scegliendo come funzione da integrare* 1 *e come funzione da derivare* $\log^2 x$.]

12. Calcolare $\displaystyle\int \sin^2 x\, dx$.

    [*Tentare le seguenti strade: a) usare l'identità* $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$*; b) scrivere* $\sin^2 x$ *come* $1 - \cos x \cdot \cos x$ *ed integrare per parti il secondo addendo scegliendo come funzione da integrare* $\cos x$ *e come funzione da derivare pure* $\cos x$.]

13. Calcolare $\displaystyle\int \cos^2 x\, dx$. [*Analogo al precedente*].

14. Calcolare $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\, dx$. [*Usare il cambio di variabili* $x = \sin y$ *e l'esercizio precedente.*]

15. Calcolare $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2-4}$. [*Usare l'identità* $\frac{4}{x^2-4} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}$.]

16. Calcolare $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x+1}{e^x-1} dx$. [*Usare l'identità* $\frac{a+1}{a-1} = \frac{2a}{a-1} - 1$ *e il cambio di variabili* $y = e^x - 1$.]

17. a) Disegnare la figura piana A delimitata dai grafici delle funzioni $y = x^2 - 1$ e $y = 1 - x^2$.
    b) Calcolare l'area di A.

18. Per ciascuna delle seguenti condizioni, disegnare l'insieme A dei punti (x, y) che la soddisfano, e quindi calcolare l'area di A:
    a) $x^2 \le y \le 4 - x^2$;
    b) $e^{2y} \le x \le e^y$;
    c) $1 - \cos x \le y \le \cos x$ e $0 \le x \le 2\pi$;
    d) $|y| \le 1/x^2$ e $x > 0$;
    e) $|y| \le 1/x^2$;
    f) $0 \le y(1 + x^2) \le 2x$ e $y \le x$.

19. Sia V la figura nel piano xy delimitata superiormente dal grafico di e^{-x}, inferiormente dall'asse delle x, e a sinistra dall'asse delle y. Sia quindi V la figura solida ottenuto facendo ruotare A attorno all'asse delle x. Calcolare il volume di V.

20. Sia A come nell'esercizio precedente, e sia V la figura solida ottenuto facendo ruotare A attorno all'asse delle y (invece che attorno all'asse delle x). Calcolare il volume di V.

21. Sia V l'insieme dei punti (x, y, z) nello spazio che soddisfano
$$x^2 + y^2 \le \frac{1}{1+z^2} .$$
    a) Verificare che per ogni $z \in \mathbb{R}$ la sezione di V ad altezza z è un cerchio di raggio $1/\sqrt{1+z^2}$.
    b) Tracciare un disegno approssimativo di V.
    c) Calcolare il volume di V.

7. Equazioni differenziali

[versione: 25/5/2012]

Richiamo delle nozioni fondamentali

In un'equazione differenziale l'incognita da determinare è una funzione (e non un numero) che indicheremo solitamente con $x(t)$, o semplicemente x. L'equazione è un'identità che coinvolge la funzione x e le sue derivate $\dot{x}, \ddot{x}, \dots$, e una soluzione è una qualunque funzione x che soddisfa questa identità per tutti i valori di t nel suo dominio di definizione.

Per esempio, una soluzione dell'equazione differenziale $\ddot{x}(t)e^{x(t)} + t^2(x(t))^3 = 0$ è la funzione $x(t) := \log t$. Per semplificare la notazione si omette di solito di esplicitare la dipendenza di x dalla variabile indipendente t, scrivendo quindi x al posto di $x(t)$ e così via; in questo modo l'equazione precedente diventa $\ddot{x}\, e^x + t^2\dot{x}^3 = 0$.

Equazioni differenziali del primo ordine. Si chiamano equazioni differenziali del primo ordine tutte quelle che si possono ricondurre alla forma

$$\dot{x} = f(t, x)\,, \tag{1}$$

vale a dire quelle per cui si riesce ad esprimere la derivata $\dot{x}$ tramite una formula che coinvolge solamente t e x.

Tipicamente le soluzioni di un'equazione differenziale del primo formano una famiglia (infinita) di funzioni dipendente da un parametro. Inoltre, scelti dei numeri t_0 e x_0, risulta essere univocamente determinata la soluzione dell'equazione (1) che soddisfa la *condizione iniziale*

$$x(t_0) = x_0\,. \tag{2}$$

Quanto appena affermato è il contenuto del teorema di esistenza ed unicità (o teorema di Cauchy) per le equazioni differenziali del primo ordine; l'enunciato preciso di questo teorema è piuttosto complesso e quindi lo omettiamo.

Si noti che la maggior parte delle equazioni differenziali non può essere risolto con formule esplicite ma solo numericamente, vale a dire utilizzando un computer ed un apposito software per disegnare il grafico delle soluzioni. Tra le poche equazioni del primo ordine che si possono risolvere esplicitamente considereremo solo quelle a variabili separabili e quelle lineari.

Equazioni a variabili separabili. Un'equazione differenziale del primo ordine si dice *a variabili separabili* se può essere ricondotta alla forma

$$\dot{x} = f(t) \cdot g(x)\,. \tag{3}$$

Per risolvere quest'equazione, portiamo $g(x)$ a sinistra dell'uguale, e quindi calcoliamo gli integrali indefiniti (primitive) di entrambe i membri dell'equazione così ottenuta cambiando la variabile da t ad x per quello di sinistra:

$$\frac{\dot{x}}{g(x)} = f(t) \quad \Rightarrow \quad \int \frac{\dot{x}}{g(x)}\, dt = \int f(t)\, dt + c \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dx}{g(x)} = \int f(t)\, dt + c$$

(la presenza della costante c è dovuta al fatto che due primitive della stessa funzione non sono necessariamente uguali, ma differiscono per una costante.)

Supponendo di aver trovato una primitiva F di f ed una primitiva G di $1/g$, otteniamo quindi

$$G(x) = F(t) + c \quad \text{con } c \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Per concludere basta quindi esplicitare x. Supponendo di conoscere un'inversa H della funzione G, applichiamo la H ad entrambi i membri della (4), ottenendo infine la formula risolutiva

$$x(t) = H(F(t) + c) \quad \text{con } c \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Abbiamo dunque una famiglia di soluzioni che dipende dal parametro c.

Osservazioni. (i) Nel procedimento spiegato sopra si suppone implicitamente che la funzione g non si annulli mai, in modo da poter liberamente dividere per $g(x)$. Nel caso che la funzione f si annulli per qualche valore x_0, si vede subito che la funzione costante $x(t) := x_0$ risolve l'equazione (3); le altre soluzioni si trovano invece con il metodo illustrato in precedenza.

(ii) Se oltre all'equazione (3) viene specificata anche una condizione iniziale tipo la (2), è possibile determinare il valore della costante c che appare nelle formule (4) e (5) ponendo $t = t_0$ direttamente nella (4) ed ottenendo cosí l'identità $G(x_0) = F(t_0) + c$ da cui si ricava $c = G(x_0) - F(t_0)$.

Equazioni lineari del primo ordine. Un'equazione del primo ordine si dice *lineare* se può essere ricondotta alla forma

$$\dot{x} + a(t)\,x = b(t)\,. \tag{6}$$

La funzione $a(t)$ è detta *coefficiente* dell'equazione, mentre $b(t)$ è chiamata *termine noto.*

Per risolvere questa equazione la moltiplichiamo per il fattore $e^{A(t)}$ dove $A(t)$ è una qualunque primitiva della funzione $a(t)$. In questo modo il termine di sinistra dell'equazione coincide con la derivata del prodotto $e^{A(t)}x$:

$$e^{A(t)}\dot{x} + a(t)\,e^{A(t)}x = e^{A(t)}b(t) \quad \Rightarrow \quad \big(e^{A(t)}x\big)' = e^{A(t)}b(t)\,.$$

Quindi $e^{A(t)}x$ deve essere una primitiva di $e^{A(t)}b(t)$, vale a dire

$$e^{A(t)}x = \int e^{A(t)}b(t)\,dt + c\,,$$

e dividendo per $e^{A(t)}$ otteniamo infine la formula risolutiva generale

$$x(t) = e^{-A(t)}\left[\int e^{A(t)}b(t)\,dt + c\right] \quad \text{con } c \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

Vale la pena di sottolineare alcuni casi particolari di questa formula: se la funzione b è identicamente nulla (nel qual caso l'equazione (6) si dice *omogenea*) allora la (7) diventa

$$x(t) = ce^{-A(t)} \quad \text{con } c \in \mathbb{R}. \tag{7'}$$

Se invece a è una costante (nel qual caso l'equazione (6) si dice *a coefficienti costanti*), allora la (7) diventa

$$x(t) = e^{-at}\left[\int e^{at}b(t)\,dt + c\right] \quad \text{con } c \in \mathbb{R}. \tag{7''}$$

Equazioni del secondo ordine. Si chiamano *equazioni differenziali del secondo ordine* tutte quelle che si possono ricondurre alla forma

$$\ddot{x} = f(t, x, \dot{x})\,, \tag{8}$$

vale a dire quelle per cui si riesce ad esprimere la derivata seconda $\ddot{x}$ tramite una formula che coinvolge solamente t, x e $\dot{x}$.

Tipicamente le soluzioni dell'equazione differenziale (8) sono una famiglia di funzioni dipendente da *due* parametri, e scelti dei numeri t_0, x_0 e x_1, è univocamente determinata la soluzione dell'equazione (8) che soddisfa le condizioni iniziali

$$x(t_0) = x_0 \quad \text{e} \quad \dot{x}(t_0) = x_1\,. \tag{9}$$

Equazioni lineari del secondo ordine. Tra le equazioni del secondo ordine ci limitiamo a considerare quelle *lineari*, vale a dire quelle che possono essere ricondotte alla forma

$$\ddot{x} + a(t)\,\dot{x} + b(t)\,x = c(t)\,. \tag{10}$$

Le funzioni $a(t)$ e $b(t)$ vengono chiamate *coefficienti* dell'equazione, mentre $c(t)$ viene detta *termine noto.*

L'equazione (10) si dice *omogenea* se il termine noto $c(t)$ è identicamente nullo. Si dice invece *a coefficienti costanti* se a e b sono costanti (ovvero non dipendono da t). Infine si chiama *equazione omogenea associata* alla (10) l'equazione differenziale ottenuta sostituendo $c(t)$ con 0.

In questo corso risolviamo solo le equazioni a coefficienti costanti omogenee oppure con un termine noto $c(t)$ di tipo particolare.

Equazioni omogenne a coefficienti costanti. Consideriamo ora l'equazione omogenea a coefficienti costanti

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0\,. \tag{11}$$

Cominciamo con due semplici osservazioni:

(a) se x è una soluzione della (11) e c è un numero reale, allora anche la funzione cx è una soluzione della (11);
(b) se x_1 e x_2 sono soluzioni della (11) allora anche la somma x_1+x_2 è una soluzione della (11).
(c) le precedenti osservazioni mostrano che date due soluzioni x_1 e x_2 dell'equazione (11) si ottiene una famiglia a due parametri di soluzioni ponendo

$$x := c_1x_1 + c_2x_2 \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{12}$$

Questa formula ci da in effetti *tutte* le soluzioni della (11) a patto che x_1 e x_2 non siano una multipla dell'altra (altrimenti la (12) darebbe luogo a niente altro che i multipli di una sola funzione, vale a dire una famiglia di funzioni ad un parametro "mascherata" da famiglia a due parametri).

Per risolvere l'equazione (11) non ci resta quindi che trovarne due soluzioni che non siano una multipla dell'altra. Le cerchiamo tra le funzioni del tipo $x = e^{\lambda t}$ con λ parametro reale. In tal caso si ha $\dot{x} = \lambda e^{\lambda t}$ e $\ddot{x} = \lambda^2 e^{\lambda t}$, e sostituendo queste espressioni nel termine di sinistra della (11) otteniamo

$$(\lambda^2 + a\lambda + b)e^{\lambda t} = 0\,.$$

Chiaramente questa uguaglianza è verificata per ogni t se il polinomio $\lambda^2 + a\lambda + b$ vale 0, e questo avviene quando λ è una delle sue due radici. Abbiamo dunque ottenuto le due soluzioni cercate.

Riassumendo, lo schema per la soluzione dell'equazioni lineare omogenea a coefficienti costanti (11) è il seguente: si scrive l'*equazione caratteristica* ad esso associata

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0\,, \tag{13}$$

e se ne calcolano le radici λ_1 e λ_2. Allora $e^{\lambda_1 t}$ e $e^{\lambda_2 t}$ sono due soluzioni della (11), e la soluzione generale è data da

$$x(t) = c_1e^{\lambda_1 t} + c_2e^{\lambda_2 t} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{14}$$

Questo schema va bene se l'equazione (13) ammette due soluzioni reali distinte, ovvero quando il discriminante $\Delta = a^2 - 4b$ è positivo, ma va opportunamente modificato se Δ è nullo o negativo.

Caso 1: $\Delta = 0$. In tal caso l'equazione caratteristica (13) ammette un'unica soluzione reale λ; una soluzione della (11) è sempre $e^{\lambda t}$, mentre una seconda soluzione è $te^{\lambda t}$ (è facile verificare che questa è una soluzione, meno facile è capire da dove salta fuori). Pertanto la formula risolutiva diventa

$$x(t) = c_1e^{\lambda t} + c_2te^{\lambda t} = e^{\lambda t}(c_1 + c_2t) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{14'}$$

Caso 2: $\Delta < 0$. In tal caso l'equazione (13) ammette due soluzioni *complesse* che possono essre scritte nella forma $\lambda_{1,2} = s \pm \omega i$, e due soluzioni della (11) sono $e^{st}\cos(\omega t)$ e $e^{st}\sin(\omega t)$. Pertanto la formula risolutiva diventa

$$x(t) = e^{st}(c_1\cos(\omega t) + c_2\sin(\omega t)) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{14"}$$

Osservazioni. (i) Per capire da dove vengono le soluzioni $e^{st}\cos(\omega t)$ e $e^{st}\sin(\omega t)$ utilizzate nella formula (14"), possiamo partire dalla soluzioni $x_1 := e^{\lambda_1 t}$ ed $x_2 := e^{\lambda_2 t}$. In questo caso λ_1 e λ_2 sono i numeri complessi $s \pm \omega i$ e quindi, ricordando la definizione di esponenziale di un numero immaginario,

$$x_1 = e^{st+\omega ti} = e^{st}\,e^{\omega ti} = e^{st}(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t))$$

e analogamente

$$x_2 = e^{st}(\cos(-\omega t) + i\sin(-\omega t)) = e^{st}(\cos(\omega t) - i\sin(\omega t))\,.$$

Pertanto

$$e^{st}\cos(\omega t) = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{e} \quad e^{st}\sin(\omega t) = \frac{x_1 - x_2}{2i}\,,$$

e siccome x_1 e x_2 risolvono la (11), lo stesso vale per $e^{st}\cos(\omega t)$ e $e^{st}\sin(\omega t)$ (bisogna usare di nuovo le osservazioni (a) e (b) nel paragrafo precedente).

(ii) Dati due numeri reali c_1, c_2, indichiamo con r e α le coordinate polari del punto del piano con coordinate cartesiane (c_2, c_1). Si vede allora che la soluzione (14") diventa

$$x(t) = re^{st}\, \sin(\omega t + \alpha)\,. \tag{14*}$$

(iii) Il fatto che per trovare la soluzione generale di un'equazione lineare omogenea del secondo ordine basta trovare due soluzioni x_1 ed x_2 e poi applicare la formula (12) vale anche quando i coefficienti a e b non sono costanti. Manca però un metodo per trovare x_1 ed x_2.

Equazioni a coefficienti costanti non omogenee. Consideriamo ora l'equazione non omogenea a coefficienti costanti

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = c(t)\,. \tag{15}$$

Cominciamo con due semplici osservazioni:

(a) se $\bar{x}$ risolve la (15) e $\tilde{x}$ risolve l'equazione omogenea associata, vale a dire la (11), allora la somma $x := \bar{x} + \tilde{x}$ risolve la (15);

(b) pertanto, avendo trovato data una soluzione $\bar{x}$ della (15), la soluzione generale è la si ottiene sommando a $\bar{x}$ la soluzione generale (che indichiamo con x_{om}) dell'equazione omogenea associata, ovvero

$$x = \bar{x} + x_{\text{om}}\,. \tag{16}$$

Il problema a questo punto diventa quello di trovare almeno *una* soluzione dell'equazione non omogenea (15). Quando il termine noto $c(t)$ appartiene ad alcune particolari classi di funzioni elencate nella colonna di sinistra della tabella sottostante, è possibile trovare una soluzione della (15) nella corrispondente classe di funzioni nella colonna di destra:

termine noto $c(t)$	**soluzione particolare** $\bar{x}(t)$
costante	costante
polinomio di grado d	polinomio di grado d
multiplo di e^{mt}	
se e^{mt} non risolve l'equazione omogenea	ae^{mt}
se e^{mt} risolve l'eq. omogenea ma te^{mt} no	ate^{mt}
se e^{mt} e te^{mt} risolvono l'eq. omogenea	at^2e^{mt}
multiplo di $\sin(\omega t)$ più multiplo di $\cos(\omega t)$	
se $\sin(\omega t)$ non risolve l'equazione omogenea	$a\sin(\omega t) + b\cos(\omega t)$
se $\sin(\omega t)$ risolve l'equazione omogenea	$t(a\sin(\omega t) + b\cos(\omega t))$
multiplo di $e^{mt}\sin(\omega t)$ più multiplo di $e^{mt}\cos(\omega t)$	
se $e^{mt}\sin(\omega t)$ non risolve l'equazione omogenea	$e^{mt}(a\sin(\omega t) + b\cos(\omega t))$
se $e^{mt}\sin(\omega t)$ risolve l'equazione omogenea	$te^{mt}(a\sin(\omega t) + b\cos(\omega t))$

Dunque la procedura per risolvere l'equazione non omogenea a coefficienti costanti, almeno nel caso in cui il termine noto appartiene ad una delle classi elencate sopra, è la seguente: prima si scrive e si risolve l'equazione omogenea associata, e poi si cerca una soluzione particolare dell'equazione non omogenea seguendo le indicazioni date in tabella.

Esempi. (i) Risolviamo l'equazione

$$\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = 3t + 1\,. \tag{17}$$

L'equazione omogenea associata è $\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = 0$, l'equazione caratteristica è $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ ed ha un'unica soluzione (doppia) $\lambda = 2$. Quindi la soluzione generale dell'equazione omogenea associata è $x_{\text{om}} = e^{2t}(c_1 + c_2 t)$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Siccome il termine noto $3t + 1$ è un polinomio di grado 1, la nostra tabella ci dice di cercare una soluzione dell'equazione non omogenea (17) tra i polinomi di grado 1, vale a dire una soluzione della forma $\bar{x} = at + b$.

Sostituendo quest'espressione nell'equazione otteniamo $0 - 4a + 4(at + b) = 3t + 1$ ovvero $(4a - 3)t + (4b - 4a - 1) = 0$, e chiaramente questa identità è verificata per ogni t se i coefficiente $4a - 3$ e $4b - 4a - 1$ sono entrambi nulli, ovvero per $a = 3/4$ e $b = 1$.

Dunque $\frac{3}{4}t + 1$ è una particolare soluzione della (17); si ottiene infine la soluzione generale aggiungendo tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata, vale a dire

$$x(t) = \frac{3}{4}t + 1 + e^{2t}(c_1 + c_2 t) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(ii) Risolviamo l'equazione

$$\ddot{x} - x = 6e^{2t}\,. \tag{18}$$

L'equazione omogenea associata è $\ddot{x} - x = 0$, l'equazione caratteristica è $\lambda^2 - 1 = 0$ ed ha soluzioni $\lambda_{1,2} = \pm 1$. Quindi la soluzione generale dell'equazione omogenea associata è $x_{\text{om}} = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Siccome il termine noto $6e^{2t}$ è un multiplo di e^{2t}, la nostra tabella ci dice di cercare una soluzione dell'equazione non omogenea (18) della forma $\bar{x} = ae^{2t}$ (notare che e^{2t} non risolve l'equazione omogenea). Sostituendo quest'espressione nell'equazione otteniamo $4ae^{2t} - ae^{2t} = 6e^{2t}$ ovvero $(3a - 6)e^{2t} = 0$, e chiaramente questa identità è verificata per ogni t se il coefficiente $3a - 6$ è nullo, cioè per $a = 2$. Dunque $2e^{2t}$ è una soluzione della (18) e la soluzione generale è

$$x(t) = 2e^{2t} + c_1 e^t + c_2 e^{-t} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(iii) Modifichiamo ora il termine noto dell'equazione nell'esempio precedente:

$$\ddot{x} - x = -2e^t\,. \tag{19}$$

In questo caso la tabella ci dice di cercare una soluzione particolare della (18) tra le funzioni del tipo $\bar{x} = ate^t$ (infatti, come visto al punto precedente, e^t è una soluzione dell'equazione omogenea, ma te^t non lo è). Sostituendo quest'espressione nell'equazione otteniamo $a(t + 2)e^t - ate^t = -2e^t$ ovvero $(2a + 2)e^t = 0$, e chiaramente questa identità è verificata per ogni t se il coefficiente $2a + 2$ è nullo, ovvero per $a = -1$. Dunque $-te^t$ è una particolare soluzione della (19), e la soluzione generale è

$$x(t) = -te^t + c_1 e^t + c_2 e^{-t} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Osservazione. Se il termine noto $c(t)$ si scrive come la somma di due termini noti $c_1(t)$ e $c_2(t)$ per cui si sanno trovare delle soluzioni particolari x_1 e x_2 (per esempio usando la solita tabella), allora una soluzione particolare per il termine noto $c(t)$ è data dalla somma $x_1 + x_2$. Per esempio, una soluzione particolare per l'equazione $\ddot{x} + 2x = 4t - 3e^t$ è data dalla somma di una soluzione particolare di $\ddot{x} + 2x = 4t$ (per esempio $2t$), e di una soluzione particolare di $\ddot{x} + 2x = -3e^t$ (per esempio $-e^t$).

Ancora sulle equazioni lineari del primo ordine. La formula risolutiva (7) per le equazioni differenziali lineari del primo ordine è molto generale ma richiede di calcolare un integrale indefinito che talvolta risulta essere piuttosto complicato. Per questa ragione, nel caso dell'equazione lineare a coefficienti costanti del primo ordine

$$\dot{x} + ax = b(t)$$

può essere più semplice utilizzare una formula risolutiva analoga a quella per le equazioni lineari a coefficienti costanti del secondo ordine, vale a dire

$$x(t) = \bar{x}(t) + ce^{-at} \quad \text{con } c \in \mathbb{R},$$

dove ce^{-at} è la soluzione dell'equazione omogenea associata $\dot{x} + ax = 0$ e $\bar{x}$ è una soluzione particolare dell'equazione non omogenea. Quest'ultima può essere trovata seguendo la stessa procedura utilizzata per le equazioni del secondo ordine (in questo caso il termine noto è $b(t)$).

Esercizi

1. Verificare le seguenti affermazioni (senza ricorrere ad alcuna formula risolutiva):
a) $x(t) := \sin^2 t$ risolve l'equazione $\dot{x}^2 = 4x(1-x)$;
b) $x(t) := (t+c)^{-2}$ risolve l'equazione $\dot{x}^2 = 4x^3$ per ogni $c \in \mathbb{R}$;
c) $x(t) := \log t$ risolve l'equazione $\ddot{x}\, e^x + t^2 \dot{x}^3 = 0$;
d) $x(t) := ce^{-t^2/2}$ risolve l'equazione $\ddot{x} = (t^2-1)x$ per ogni $c \in \mathbb{R}$.

2. Determinare per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $x(t) := t^a$ risolve l'equazione $t^2\ddot{x} - 6x = 0$.

3. Determinare per quali $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione $x(t) := ae^{bt}$ risolve l'equazione $\ddot{x} - 4x = e^t$.

4. Per ciascuna delle seguenti equazioni differenziali dire se sono a variabili separabili, lineari del primo ordine, lineari del secondo ordine, o altro; nel caso di quelle lineari specificare se sono omogenee e/o a coefficienti costanti:

   a) $\dot{x}x^2 = t$, b) $\dot{x} - 2x^2 = t$, c) $\dot{x} - 2x^2 = 0$, d) $\ddot{x} = tx + e^t$, e) $\ddot{x} + t\dot{x} + 3t^2 x = 0$,
   f) $\ddot{x} = t^2 x$, g) $\ddot{x} = 3x + 4\dot{x}$, h) $\dot{x} = -2x + e^t$, i) $\dot{x} = x^2 + t^2$, l) $\ddot{x} = tx$.

5. Risolvere le seguenti equazioni differenziali a variabili separabili:

   a) $\dot{x} = \dfrac{t}{x}$, b) $\dot{x} = x^2 + 1$, c) $\dot{x} = e^x \cos t$, d) $\dot{x} = e^t x$, e) $\dot{x} = t^2 x^2$.

6. a) Per ciascuna delle equazioni differenziali nell'esercizio precedente trovare la soluzione che soddisfa la condizione iniziale $x(0) = 1$.
b) Cercare le soluzioni delle equazioni d) ed e) che soddisfano la condizione iniziale $x(1) = 0$.

7. Si consideri l'equazione a variabili separabili $\dot{x} = f(t)\, g(x)$ e un numero x_0 tale che $g(x_0) = 0$. Verificare che la soluzione dell'equazione che soddisfa la condizione iniziale $x(0) = x_0$ è la funzione costante $x(t) := x_0$.

8. Risolvere le seguenti equazioni lineari del primo ordine utilizzando la formula (7):

   a) $\dot{x} - 4x = 8$, b) $\dot{x} + 2tx = 0$, c) $\dot{x} + \dfrac{x}{t+1} = 6t$, d) $\dot{x} - e^t x = 0$.

9. Per ciascuna delle equazioni differenziali nell'esercizio precedente trovare la soluzione che soddisfa la condizione iniziale $x(0) = 1$.

10. Verificare direttamente—vale a dire senza utilizzare alcuna formula risolutiva—le seguenti proprietà delle equazioni lineari omogenee del primo e secondo ordine (cioè quelle della forma $\dot{x} + a(t)\, x = 0$ oppure $\ddot{x} + a(t)\, \dot{x} + b(t)\, x = 0$):
a) Se x è una soluzione dell'equazione allora ogni multiplo di x è pure una soluzione;
b) Se x_1 e x_2 sono soluzioni dell'equazione la somma $x_1 + x_2$ è pure una soluzione;
c) se a e b sono costanti, la funzione $e^{\lambda t}$ è una soluzione se λ risolve l'equazione caratteristica associata (vale a dire $\lambda + a = 0$ per quella del primo ordine e $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ per quella del secondo ordine).

11. Per ciascuna delle seguenti equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti, scrivere l'equazione caratteristica, risolverla, e quindi determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale:

    a) $\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = 0$, b) $\ddot{x} - 2\dot{x} - 3x = 0$, c) $\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = 0$, d) $\ddot{x} + 9x = 0$;
    e) $\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 0$, f) $\ddot{x} - 4x = 0$, g) $\dot{x} + 2x = 0$, h) $\dot{x} - 3x = 0$.

12. Trovare le soluzioni dei seguenti problemi ai dati iniziali:

$$\text{a) } \begin{cases} \dot{x} + x = 0 \\ x(0) = 2 \end{cases}, \quad \text{b) } \begin{cases} \ddot{x} - 4x = 0 \\ x(0) = 2 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}, \quad \text{c) } \begin{cases} \ddot{x} + x = 0 \\ x(0) = -2 \\ \dot{x}(0) = 1 \end{cases}, \quad \text{d) } \begin{cases} \ddot{x} + 2\dot{x} + x = 0 \\ x(0) = 1 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}.$$

13. a) Verificare direttamente che la funzione te^{2t} risolve l'equazione omogenea $\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = 0$.
b) Verificare che se l'equazione caratteristica $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ ha un'unica soluzione reale λ allora $te^{\lambda t}$ risolve l'equazione differenziale $\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0$. [*Si osservi che in questo caso* $\Delta = 0$, *e quindi* $b = a^2/4$ *e* $\lambda = -a/2$.]

14. Verificare direttamente che le funzioni $e^t \sin t$ e $e^t \cos t$ risolvono l'equazione $\ddot{x} - 2\dot{x} + 2x = 0$.

15. a) Trovare i valori del parametro a per cui la funzione $x(t) := t^a$ risolve l'equazione lineare omogenea a coefficienti *non costanti*
$$\ddot{x} - \frac{2\dot{x}}{t} + \frac{2x}{t^2} = 0\,.$$
b) Scrivere la soluzione generale di quest'equazione.
c) Trovare la soluzione che soddisfa le condizioni iniziali $x(1) = 0$ e $\dot{x}(1) = 1$.

16. a) Dati c_1, c_2 numeri reali, indichiamo con r e α le coordinate polari del punto del piano con coordinate cartesiane (c_2, c_1). Dimostrare che per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha
$$c_1 \cos x + c_2 \sin x = r\, \sin(x + \alpha)\,.$$
b) Utilizzare quanto fatto al punto a) per ottenere la formula (14*).
c) Utilizzare quanto fatto al punto a) per disegnare il grafico di $x(t) := \sin t + \sqrt{3}\, \cos t$.
d) Utilizzare quanto fatto al punto a) per disegnare il grafico di $x(t) := e^{-t}(\sin t + \sqrt{3}\, \cos t)$.

17. Trovare una soluzione particolare per ciascuna delle seguenti equazioni lineari non omogenee utilizzando le indicazioni della tabella data sopra (per le prime equazioni queste indicazioni sono esplicitate tra parentesi):
a) $\ddot{x} - \dot{x} - x = 3e^{2t}$ [cercare $\bar{x}$ della forma $\bar{x} = ae^{2t}$];
b) $\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = e^t$ [cercare $\bar{x}$ della forma $\bar{x} = ate^t$];
c) $\dot{x} - x = 4e^{3t}$ [cercare $\bar{x}$ della forma $\bar{x} = ae^{3t}$];
d) $\dot{x} + 2x = e^{-2t}$ [cercare $\bar{x}$ della forma $\bar{x} = ate^{-2t}$];
e) $\ddot{x} - x = 9\sin(2t)$ [cercare $\bar{x}$ della forma $\bar{x} = a\cos(2t) + b\sin(2t)$];
f) $\dot{x} + x = 3t$;
g) $\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = e^{-t}$;
h) $\ddot{x} - 2\dot{x} + x = e^t$;
i) $\dot{x} + 2x = 4\cos(2t)$;
l) $\ddot{x} + 3x = 6$.

18. Siano x_1 e x_2 rispettivamente soluzioni delle equazioni lineari non omogenee
$$\ddot{x} + a(t)\,\dot{x} + b(t)\,x = c_1(t) \quad \text{e} \quad \ddot{x} + a(t)\,\dot{x} + b(t)\,x = c_2(t)\,.$$
Verificare che $x_1 + x_2$ risolve l'equazione
$$\ddot{x} + a(t)\,\dot{x} + b(t)\,x = c_1(t) + c_2(t)\,.$$

19. a) Trovare la soluzione generale dell'equazione $\dot{x} + 2x = 0$.
b) Trovare una soluzione particolare dell'equazione $\dot{x} + 2x = 2t - 3e^t$. [*Si suggerisce di cercare separatamente una soluzione di* $\dot{x} + 2x = 2t$ *ed una di* $\dot{x} + 2x = -3e^t$, *e poi applicare quanto fatto nell'esercizio precedente.*]
c) Scrivere la soluzione generale dell'equazione $\dot{x} + 2x = 2t - 3e^t$.

20. Si consideri l'equazione lineare del primo ordine
$$\dot{x} + 4x = 16t\,. \tag{20}$$
a) Risolvere l'equazione omogenea associata alla (20).
a) Trovare una soluzione particolare della (20).
c) Scrivere la soluzione generale della (20).
d) Trovare la soluzione della (20) che soddisfa la condizione iniziale $x(0) = 1$.

21. Si consideri l'equazione lineare del secondo ordine

$$\ddot{x} + x = e^{-2t}\,. \tag{21}$$

a) Risolvere l'equazione omogenea associata alla (21).
a) Trovare una soluzione particolare della (21).
c) Scrivere la soluzione generale della (21).
d) Trovare la soluzione della (21) che soddisfa le condizioni iniziali $x(0) = 1$ e $\dot{x}(0) = 0$.

22. Si consideri l'equazione lineare del secondo ordine

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = 1 + \sin t\,. \tag{22}$$

a) Risolvere l'equazione omogenea associata alla (22).
a) Trovare una soluzione particolare della (22).
c) Scrivere la soluzione generale della (22).

23. Trovare le soluzioni dei seguenti problemi ai dati iniziali:

$$\text{a)} \begin{cases} \dot{x} = x^2 \cos t \\ x(0) = 1 \end{cases} , \quad \text{b)} \begin{cases} \ddot{x} - x = 2t \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases} , \quad \text{c)} \begin{cases} \dot{x} + 2x = 4 \\ x(0) = 1 \end{cases} , \quad \text{d)} \begin{cases} \dot{x} = 3t^2(1 + x^2) \\ x(0) = 1 \end{cases} .$$

24. Utilizzando il cambio di variabile $x = tz$ risolvere l'equazione differenziale

$$\dot{x} = \frac{x}{t} + \frac{t}{2x}\,.$$

8. Vettori e matrici

[versione: 25/5/2012]

Richiamo delle nozioni fondamentali

Vettori. Dato un numero intero positivo n, un vettore di dimensione n è una sequenza di n numeri reali, ed è indicato solitamente con una lettera sormontata da una freccia

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)\,.$$

I numeri $x_1, x_2, \dots$ sono detti coordinate (o componenti) del vettore $\vec{x}$; per le precisione, x_i è la coordinata i-esima di $\vec{x}$. Si indica con $\mathbb{R}^n$ l'insieme di tutti i possibili vettori.

Sui vettori si definiscono le seguenti operazioni.

(i) *Prodotto di un vettore per un numero*: dati un vettore $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ e un numero reale c, si pone

$$c\vec{x} := (cx_1, \dots, cx_n)\,.$$

(ii) *Somma di vettori*: dati due vettori $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ e $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$, si pone

$$\vec{x} + \vec{y} := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)\,.$$

La definizione di $\vec{x} - \vec{y}$ è analoga.

(iii) *Norma di un vettore*: dato un vettore $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$, la norma (o lunghezza) di $\vec{x}$ è il numero reale

$$|\vec{x}| := \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}\,.$$

(iv) *Prodotto scalare di vettori*: dati due vettori $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ e $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$, si pone

$$\vec{x} \cdot \vec{y} := x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n\,;$$

in particolare $|\vec{x}| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$. Si ricordi che, detto α l'angolo compreso tra $\vec{x}$ e $\vec{y}$, il prodotto scalare $\vec{x} \cdot \vec{y}$ è anche dato dalla formula

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}|\,|\vec{y}|\,\cos\alpha\,.$$

(v) *Derivazione di una grandezza vettoriale*: se $\vec{x}$ è un vettore le cui coordinate dipendono da una variabile t, ovvero

$$\vec{x} = \vec{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))\,,$$

allora la derivata di $\vec{x}$ rispetto alla variabile t è data da

$$\dot{\vec{x}} = \dot{\vec{x}}(t) := (\dot{x}_1(t), \dots, \dot{x}_n(t))\,.$$

Matrici. Dati m ed n numeri interi positivi, una matrice $m \times n$ è un sistema di $m \cdot n$ numeri reali organizzati in una tabella rettangolare di m righe ed n colonne:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}.$$

Il numero che appare all'intersezione della riga i-esima (contata a partire dall'alto) e della colonna j-esima (contata da sinistra), è detto componente (o coordinata, o elemento) di indici i, j della matrice A, ed è indicato talvolta con $A_{i,j}$.

L'insieme delle matrici $m \times n$ è indicato con $\mathbb{R}^{m \times n}$. Le matrici $1 \times n$ vengono anche dette *vettori riga*, e quelle $m \times 1$ *vettori colonna.* Si parla di matrici *quadrate* quando $m = n$.

Sulle matrici si definiscono le seguenti operazioni.

(i) *Prodotto di una matrice per un numero*: data A matrice $m \times n$ di coordinate $a_{i,j}$ e c numero reale, allora cA è la matrice $m \times n$ la cui coordinata di indici i, j è data da $ca_{i,j}$. Per esempio

$$3\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot (-1) & 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot (-2) & 3 \cdot 0 & 3 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ -6 & 0 & 12 \end{pmatrix} .$$

(ii) *Somma di due matrici*: date A e B matrici $m \times n$ di coordinate $a_{i,j}$ e $b_{i,j}$ rispettivamente, allora $A + B$ è la matrice $m \times n$ la cui coordinata di indici i, j è data da $a_{i,j} + b_{i,j}$. Per esempio

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & -1+2 \\ -2+1 & 0-3 \\ 2-4 & 3+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} .$$

La definizione di $A - B$ è analoga.

(iii) *Prodotto di matrici*: date A matrice $m \times n$ di coordinate $a_{i,j}$ e B matrice $n \times p$ di coordinate $b_{i,j}$, allora AB è la matrice $m \times p$ la cui coordinata di indici i, j è data dal prodotto scalare della riga i-esima di A per la colonna j-esima di B, intese come vettori di dimensione n, vale a dire

$$(AB)_{i,j} := a_{i,1}b_{1,j} + \cdots + a_{i,2}b_{2,j} .$$

Per esempio,

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 4 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \\ 2 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 2 \cdot 2 + 0 \cdot 3 \\ (-2) \cdot 0 + 3 \cdot 1 & (-2) \cdot 2 + 3 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 14 \\ 0 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} .$$

Si noti che anche quando il prodotto AB è definito, può succedere che il prodotto BA non lo sia (questo è il caso per le matrici nell'esempio qui sopra). Quand'anche AB e BA fossero definite e della stessa dimensione, non è detto che siano uguali.

Matrice identità e matrice inversa. La matrice identità $n \times n$, indicata solitamente con I, è quella i cui elementi sulla diagonale sono uguali a 1 e gli altri sono 0 (per diagonale di una matrice quadrata si intende sempre quella che congiunge il vertice in alto a sinistra con quello in basso a destra), ovvero $I_{i,j} = 1$ per ogni coppia di indici i, j tali che $i = j$, e $I_{i,j} = 0$ altrimenti. Quindi per $n = 3$ la matrice I è data da

$$I := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per ogni matrice A si ha allora che $AI = IA = A$ (se A è una matrice $m \times n$, allora la prima I in questa formula è $n \times n$ e la seconda è $m \times m$).

Date A e B matrici $n \times n$, diciamo che B è l'*inversa* di A se $AB = I$ e $BA = I$ (in effetti basta che valga una sola di queste identità affinché sia vera anche l'altra). Se esiste, la matrice inversa è univocamente determinata, e viene indicata con A^{-1}.

Determinante e inversa di una matrice 2 × 2. Data A matrice 2×2 con coordinate $a_{i,j}$, il determinante di A è

$$\det A := a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1} .$$

Si ha inoltre che A è invertibile (cioè esiste l'inversa di A) se e solo se $\det A \neq 0$, e

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{2,2} & -a_{1,2} \\ -a_{2,1} & a_{1,1} \end{pmatrix} .$$

Per esempio,

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-4) - (-2) \cdot 3 = 2$$

e

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3/2 & 1/2 \end{pmatrix} .$$

Determinante e inversa di una matrice 3 × 3. Data A matrice 3×3 con coordinate $a_{i,j}$, il determinante di A può essere definito (e calcolato) in vari modi, per esempio usando il cosiddetto "sviluppo secondo la prima riga"

$$\det A := +a_{1,1} \det \begin{pmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} - a_{1,2} \det \begin{pmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{pmatrix} + a_{1,3} \det \begin{pmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{pmatrix} .$$

In questa formula, gli addendi sono sommati a segni alterni, e l'addendo j-esimo è dato dall'elemento j-esimo della prima riga, vale a dire $a_{1,j}$, moltiplicato per il determinante della matrice 2×2 che si ottiene rimuovendo la prima riga e la colonna j-esima di A. Si ottiene una formula analoga prendendo al posto della prima riga una qualunque altra riga o colonna, con la differenza che il segno del primo addendo deve essere $+$ se si tratta di una riga (o colonna) di ordine dispari, e $-$ altrimenti.

Usiamo per esempio lo sviluppo secondo la seconda colonna per calcolare il seguente determinante:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = -3 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = 2 . \tag{1}$$

Si ha inoltre che A è invertibile se e solo se $\det A \neq 0$, e

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tilde{A}$$

dove $\tilde{A}$ è la matrice 3×3 ottenuta in questo modo: la coordinata di indici i, j di $\tilde{A}$ è uguale al determinante della matrice 2×2 ottenuta rimuovendo la riga j-esima la colonna i-esima di A (attenzione allo scambio di i e j) moltiplicato per 1 o -1 a seconda che $i + j$ sia pari o dispari. La matrice $\tilde{A}$ è chiamata *trasposta coniugata* di A.

Nel caso della matrice nella formula (1) l'inversa è quindi

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} +\det\left(\begin{smallmatrix} 0 & -4 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix}\right) & -\det\left(\begin{smallmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix}\right) & +\det\left(\begin{smallmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -4 \end{smallmatrix}\right) \\ -\det\left(\begin{smallmatrix} 3 & -4 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right) & +\det\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right) & -\det\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{smallmatrix}\right) \\ +\det\left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right) & -\det\left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right) & +\det\left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{smallmatrix}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -6 \\ -3 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & -9/2 \end{pmatrix} .$$

Osservazione. Quanto detto nel paragrafo precedente per le matrici 3×3 si estende alle matrici $n \times n$ con n qualunque. Ovviamente, già per una matrice 4×4 i conti sono assai lunghi: la formula per il determinante richiede il calcolo dei determinanti di 4 matrici 3×3, e la formula per la matrice trasposta coniugata richiede il calcolo dei determinanti di 16 matrici 3×3.

Significato geometrico del determinante. Dati $\vec{x}$ e $\vec{y}$ vettori nel piano, indichiamo con α l'angolo compreso tra $\vec{x}$ e $\vec{y}$ e con P il parallelogrammo da essi generato, vale a dire quello di vertici 0, $\vec{x}$, $\vec{y}$ e $\vec{x} + \vec{y}$. Allora

$$\text{Area}(P) = |\vec{x}|\,|\vec{y}| \sin\alpha = \left| \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \right| . \tag{2}$$

Analogamente, dati $\vec{x}$, $\vec{y}$ e $\vec{z}$ vettori nello spazio e detto P il parallelepipedo da essi generato, si ha che

$$\text{Volume}(P) = \left| \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} \right| . \tag{3}$$

Prodotto vettoriale. Dati $\vec{x}$ e $\vec{y}$ vettori nello spazio, il prodotto vettoriale $\vec{x} \times \vec{y}$ è il vettore dato da

$$\vec{x} \times \vec{y} := \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = (x_2 y_3 - y_2 x_3, x_3 y_1 - y_3 x_1, x_1 y_2 - y_1 x_2) ,$$

dove e_1, e_2, e_3 sono i versori fondamentali dello spazio.

Il vettore $\vec{x} \times \vec{y}$ è univocamente individuato dalle seguenti proprietà geometriche: a) la norma è uguale a $|\vec{x}|\,|\vec{y}| \sin\alpha$ (come sopra, α è l'angolo compreso tra $\vec{x}$ e $\vec{y}$); b) è ortogonale sia a $\vec{x}$ che a $\vec{y}$; c) il verso è determinato dalla regola della mano destra.

Sistemi di equazioni del primo ordine. Un sistema di m equazioni di primo grado in n incognite $x_1, x_2, \dots, x_n$ si può scrivere in generale nella forma

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = c_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = c_2 \\ \quad \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = c_m \end{cases}$$

dove $a_{i,j}$ sono i coefficienti delle equazioni e c_i i termini noti. Indicando con A la matrice di coordinate $a_{i,j}$ (matrice dei coefficienti), con $\vec{x}$ il vettore colonna di coordinate x_i (vettore delle incognite) e con $\vec{c}$ il vettore colonna di coordinate c_i (vettore dei termini noti), possiamo riscrivere il sistema nella forma

$$A\vec{x} = \vec{c}.$$

Quindi, se la matrice A è *quadrata* (cioè $m = n$) e *invertibile* (cioè se $\det A \neq 0$),

$$\vec{x} = A^{-1}\,\vec{c}, \tag{4}$$

e questa formula permette quindi di risolvere il sistema, cioè di trovare i valori delle incognite x_i a partire da $\vec{c}$ e dall'inversa di A.

Esercizi

Negli esercizi che seguono le lettere b e c indicano generici numeri reali.

1. Calcolare le lunghezze (o norme) dei seguenti vettori:
   a) $(-4, 3)$, b) $(1, -2, 2)$, c) $(c+2, c-2, 1)$, d) $(c^2-1, 2c)$.

2. Svolgere i seguenti calcoli:
   a) $-4 \cdot (1, 0) + (3, 2)$, b) $(1, 0, 2, 1) - (-1, 2, -3, 4)$, c) $(1, c, -2c) - c \cdot (1/c, 1, 2)$.
   d) $(-2, 0) \cdot (3, 2)$, e) $(1, 0, 2, 4) \cdot (-1, 2, -3, 2)$, f) $(1, c, -2c) \cdot (3, 2, 1)$.

3. Calcolare le norme dei vettori $(1, 2)$ e $(1, -3)$ e l'angolo tra essi compreso.

4. Calcolare le norme dei vettori $(1, 0, 2, 0)$ e $(3, -1, 1, -3)$ e l'angolo tra essi compreso.

5. Dire per quali valori di c i vettori $(c, 2)$ e $(1, 2-c)$ sono ortogonali.

6. Dire per quali valori di b e c i vettori $(b, c, 2)$, $(-1+c, -b, b+1)$ sono ortogonali.

7. Dire per quali valori di c l'angolo compreso tra i vettori $(c^2-1, 2c, 0)$ e $(2, 2, 1)$ è pari a $2\pi/3$.

8. Calcolare la derivata rispetto alla variabile t dei seguenti vettori:
   a) $(t^2, t-1, \sin t)$; b) $(1, e^t, e^{-t})$; c) $(\cos(2t), \sin(2t))$; d) $(te^{2t}, \log(1+t^2), t^2-1)$.

9. Si consideri un punto del piano la cui posizione all'istante t è data da
   $$\vec{x}(t) := \big(r\cos(\omega t + \alpha), r\sin(\omega t + \alpha)\big)\,,$$
   Dove r, ω, α sono numeri reali con r positivo.
   a) Calcolare la velocità $\vec{v}$ e l'accelerazione $\vec{a}$ del punto all'istante t.
   b) Verificare che il punto si muove sulla circonferenza di raggio r con centro nell'origine.
   c) Dimostrare che $|\vec{v}|$ e $|\vec{a}|$ sono costanti.
   d) Dimostrare che $\vec{v}$ è ortogonale a $\vec{a}$.

10. Si consideri un punto nello spazio che si muove con velocità costante in modulo. Dimostrare che l'accelerazione (come vettore) è sempre perpendicolare alla velocità. [*Suggerimento: osservare che "velocità costante in modulo" significa*
    $$v_1^2(t) + v_2^2(t) + v_3^2(t) = \mathit{costante};$$

derivare quindi questa uguaglianza rispetto alla variabile t.]

11. Siano dati $\vec{x}$ e $\vec{y}$ vettori di dimensione n che dipendono dalla variabile t. Dimostrare, almeno per $n = 2$, la seguente formula per la derivata del prodotto scalare $\vec{x} \cdot \vec{y}$:
$$\big[\vec{x}(t) \cdot \vec{y}(t)\big]' = \dot{\vec{x}}(t) \cdot \vec{y}(t) + \vec{x}(t) \cdot \dot{\vec{y}}(t)\,.$$

12. Calcolare $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

13. Posto $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $B := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, verificare che $AB \neq BA$.

14. Date A matrice $m \times n$ e B matrice $p \times q$, dire quali condizioni bisogna imporre su m, n, p, q affinché si verifichino i seguenti fatti:
a) il prodotto AB è ben definito;
b) il prodotto BA è ben definito;
c) i prodotti AB e BA sono ben definiti;
d) i prodotti AB e BA sono ben definiti e di uguali dimensioni.

15. Calcolare i seguenti prodotti di matrici:
$$\text{a)}\ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \text{b)}\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}; \qquad \text{c)}\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

16. Calcolare il determinante e l'inversa di $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$.

17. Dire per quali a la matrice $\begin{pmatrix} -3 & a \\ 1-a & 2 \end{pmatrix}$ è invertibile, e calcolarne l'inversa.

18. Date A e B matrici $n \times n$ la formula di Binet dice che
$$\det(AB) = \det A \cdot \det B\,.$$
Dimostrare questa formula per $n = 2$.

19. Calcolare il determinante e l'inversa di $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

20. Calcolare il determinante della seguente matrice sviluppandolo secondo la prima colonna (o l'ultima riga):
$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

21. Una matrice A di dimensioni $n \times n$ e coefficienti $a_{i,j}$ si dice *triangolare superiore* se $a_{i,j} = 0$ per tutte le coppie di indici i, j tali che $i > j$, ovvero se gli elementi situati al di sotto della diagonale sono tutti nulli (come per esempio nella matrice dell'esercizio precedente). Verificare, almeno nei casi $n = 2, 3, 4$, che il determinante di una matrice triangolare superiore A è uguale a $a_{1,1} \cdot a_{2,2} \cdots a_{n,n}$, vale a dire il prodotto degli elementi sulla diagonale.

22. Calcolare l'area del triangolo di vertici $(0, 0)$, $(2, 1)$ e $(1, 2)$. [*Suggerimento: si noti che questo triangolo è metà del parallelogramma P generato dai vettori* $(2, 1)$ *e* $(1, 2)$*; calcolare quindi l'area di P usando la formula (2).*]

23. Calcolare l'area del triangolo di vertici $(-2,3)$, $(2,1)$ e $(1,2)$.

24. Calcolare i prodotti vettoriali $(3,-1,0) \times (2,-1,2)$ e $(4,-2,1) \times (3,-1,-2)$.

25. Usare quanto fatto nell'esercizio precedente per calcolare l'area del triangolo di vertici $(0,0,0)$, $(3,-1,0)$, $(2,-1,2)$, e l'area del triangolo di vertici $(-1,1,2)$, $(3,-1,3)$, $(2,0,0)$. [*Usare il fatto che la norma di $\vec{x} \times \vec{y}$ è uguale all'area del parallelogrammo P generato da $\vec{x}$ e $\vec{y}$.*]

26. Dati due generici vettori $\vec{x}$ e $\vec{y}$ nello spazio, partire dalle definizioni di prodotto vettoriale e prodotto scalare per dimostrare che $\vec{x} \cdot (\vec{x} \times \vec{y}) = 0$ e $\vec{y} \cdot (\vec{x} \times \vec{y}) = 0$. Dedurne che $\vec{x} \times \vec{y}$ è ortogonale sia a $\vec{x}$ che a $\vec{y}$.

27. Scrivere nella forma $A\vec{x} = \vec{c}$ i seguenti sistemi di equazioni lineari di primo grado

$$\text{a)} \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ -x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ 5x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases} ; \quad \text{b)} \begin{cases} x_1 + x_2 = x_3 + x_4 \\ 3 - x_4 + 3x_3 = x_1 \\ x_2 - x_1 = 1 - 4x_4 \\ 2 + x_2 - x_3 = x_3 - x_1 \end{cases} ; \quad \text{c)} \begin{cases} x_1 + x_2 - 1 = 0 \\ x_3 - 2 = x_2 \\ 3x_3 = 5 + 2x_4 \end{cases} ;$$

28. Scrivere ciascuno dei seguenti sistemi nella forma $A\vec{x} = \vec{c}$ e risolverli usando la formula (4):

$$\text{a)} \begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 4 \end{cases} ; \quad \text{b)} \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ 2x_2 - x_1 = 4 \end{cases} ; \quad \text{a)} \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + a = 0 \\ x_2 - 4 = x_1 + 2x_2 - a \end{cases} .$$

29. Scrivere il seguente sistema nella forma $A\vec{x} = \vec{c}$ e risolverlo usando la formula (4):

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3 = 0 \\ 2 - x_1 + x_2 = 4 \\ x_2 = x_1 - x_3 \end{cases} .$$