Versione: 19 maggio 2010

Università di Pisa
Corso di laurea in Scienze Biologiche

Raccolta di esercizi per l'insegnamento di

Matematica (corso C)

a.a. 2009/10

Giovanni Alberti

Giovanni Alberti
Dipartimento di Matematica
Università di Pisa
largo Pontecorvo 5
56127 Pisa
www.dm.unipi.it/~alberti

Introduzione

Questa è una raccolta degli esercizi assegnati durante il corso di Matematica C (laurea triennale in Scienze Biologiche) nell'a.a. 2009/10. Gli esercizi sono suddivisi in "raccolte" corrispondenti grosso modo ad argomenti distinti.

Programma del corso.

Sono riportati in corsivo gli argomenti non fondamentali.

1. Funzioni, grafici, numeri
   - 1.1 Funzioni e grafici di funzioni: dominio di definizione, funzione inversa. Funzioni elementari: funzioni lineari, potenze, esponenziali, logaritmi, funzioni trigonometriche (seno, coseno, tangente) e funzioni trigonometriche inverse.
   - 1.2 Operazioni sui grafici di funzioni. Interpretazione di equazioni e disequazioni in termini di grafici di funzioni. Grafici logaritmici e semi-logaritmici.
   - 1.3 Numeri complessi. Coordinate polari di un punto nel piano. Rappresentazione esponenziale dei numeri complessi.

2. Nozioni di statistica descrittiva
   - 2.1 Propagazione degli errori.
   - 2.2 Media e varianza di un insieme finito di dati numerici. Medie pesate. Mediana e moda.
   - 2.3 Rappresentazione grafica di un insieme di dati, diagrammi e istogrammi. Metodo dei minimi quadrati e retta di regressione.

3. Derivate, integrali ed equazioni differenziali
   - 3.1 Derivata di una funzione: significato geometrico ed interpretazione fisica. Derivate delle funzioni elementari e regole per il calcolo delle derivate.
   - 3.2 Applicazione delle derivate allo studio dei grafici di funzioni. Individuazione dei punti di massimo e di minimo di una funzione.
   - 3.3 Calcolo dei limiti di funzioni. Metodo di de l'Hôpital. Confronto tra i comportamenti asintotici di esponenziali, potenze e logaritmi. Notazione di Landau ("o" piccolo).
   - 3.4 Sviluppo di Taylor e parte principale di una funzione. *Rappresentazione delle costanti π ed e come somme infinite tramite gli sviluppi di Taylor di* $\arctan x$ *ed* e^x*.* Fattoriale, coefficienti binomiali e formula del binomio di Newton.
   - 3.5 Definizione di integrale definito di una funzione in termini di area del sottografico. Teorema fondamentale del calcolo integrale. Primitive delle funzioni elementari e regole per il calcolo delle primitive (integrali indefiniti) e degli integrali definiti. *Calcolo di aree e volumi.*
   - 3.6 Esempi di equazioni differenziali. Significato dei dati iniziali. Equazioni a variabili separabili. Equazioni lineari del primo ordine. Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti, omogenee e non omogenee. *Esempi di equazioni differenziali tratti dalla fisica.*

4. Elementi di probabilità
   - 4.1 Disposizioni, permutazioni, combinazioni.
   - 4.2 Definizione di probabilità su uno spazio di eventi elementari finito; probabilità uniforme. Eventi indipendenti e probabilità condizionata. Probabilità di unione ed intersezione di un numero finito di eventi indipendenti. Formula di Bayes. Esperimenti ripetuti. Esempi standard di modelli probabilistici (lancio di due dadi, lancio di n monete, etc.).
   - 4.3 Variabili aleatorie. Valore atteso, varianza e covarianza. Indipendenza; valore atteso e varianza per la somma di due o più variabili aleatorie indipendenti. Disuguaglianza di Chebyshev. Media campionaria e legge (debole) dei grandi numeri.

4.4 Principali distribuzioni di probabilità: di Bernoulli, binomiale, geometrica, di Poisson.

4.5 Variabili aleatorie con distribuzioni continue; valore atteso e varianza. Distribuzione uniforme, esponenziale, normale (o Gaussiana). *Il Teorema del limite centrale.*

1. Trovare, senza usare la calcolatrice, il numero intero che meglio approssima $\log_{10}(75.486)$ per difetto (in altre parole, la parte intera di questo logaritmo).

2. Determinare il dominio di definizione della funzione $\log(e^x - 1)$.

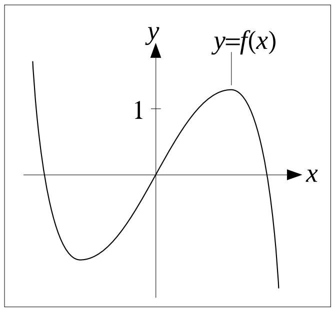
3. Determinare il dominio di definizione della funzione $\sqrt{\log x + 2}$.

4. Risolvere l'equazione $\sqrt{x} = x - 2$.

5. Risolvere la disequazione $\dfrac{x+1}{1-x} \geq x$.

6. Risolvere la disequazione $\dfrac{x+1}{3+2x-x^2} \geq 0$.

7. Sia f la funzione data nella figura accanto. Individuare graficamente le soluzioni delle seguenti equazioni e disequazioni:
a) $f(x) = 0$;
b) $f(x) = 1$;
c) $f(x) \leq 0$;
d) $f(x) \geq 1$.



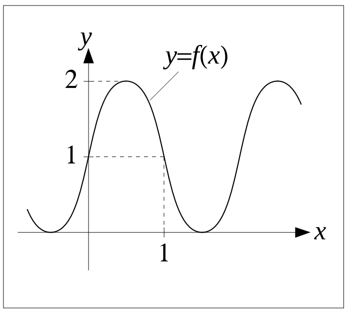
8. Disegnare il grafico delle seguenti funzioni:

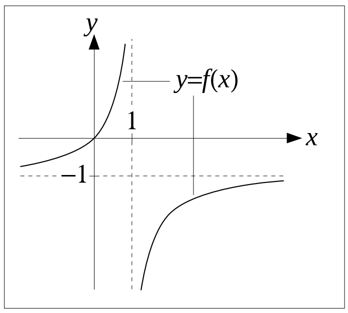
$$\text{a) } e^{-x}\ , \quad \text{b) } (x+1)^3\ , \quad \text{c) } \frac{1}{x}+1\ , \quad \text{d) } 2+2\sin(x)\ , \quad \text{e) } \frac{1}{x-2}-1\ ,$$

$$\text{f) } \cos(\pi - x) - 1\ , \quad \text{g) } \frac{\pi}{2} - \arctan x\ , \quad \text{h) } \arctan(x+1) - \frac{\pi}{4}\ , \quad \text{i) } \tan(x/\pi)\ .$$

$$\text{l) } \log(2x)\ , \quad \text{m) } \log\frac{1}{x^2}\ , \quad \text{n) } |\sin x|\ , \quad \text{o) } 2+\log|x|\ , \quad \text{p) } e^{1-x} - e\ .$$

9. Proporre delle formule per le funzioni nelle seguenti figure:

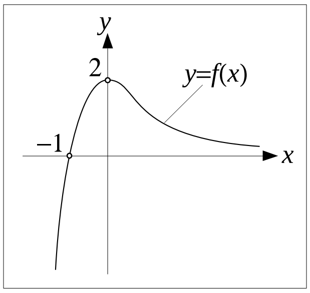
a) 

b) 

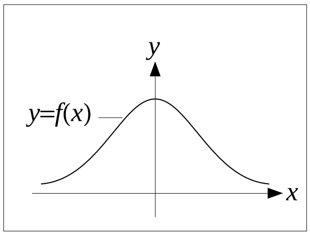
10. Risolvere le seguenti disequazioni:

$$\text{a) } \log(3x) \geq 1\ , \quad \text{b) } \arctan(x^2) \geq \frac{\pi}{4}\ , \quad \text{c) } e^{x(x-1)} \geq 1\ , \quad \text{d) } \frac{2-\log x}{4-x^2} \leq 0\ .$$

11. Sia $f(x)$ la funzione data nella figura accanto. Disegnare il grafico delle seguenti funzioni:
a) $f(-x)$;
b) $-f(-x)$;
c) $f(x+1)$;
d) $2-f(x)$;
e) $f(-x)-2$;
f) $|f(x)|$;
g) $f(|x|)$.



12. Sia f la funzione data nella figura accanto. Individuare graficamente le soluzioni delle seguenti equazioni e disequazioni:
a) $f(x)=x$;
b) $f(x)\geq x$;
c) $f(x)\geq -x$;
d) $f(x)\geq x^2$.



13. a) Trovare le soluzioni dell'equazione $|\tan x|=1$ comprese tra 0 e π;
b) trovare le soluzioni della stessa equazione comprese tra $-\pi$ e π.

14. a) Disegnare il grafico della funzione $y=\sin(2x)$.
b) Determinare le soluzioni della disequazione $\sin(2x)\geq 1/2$ comprese tra 0 e 2π.

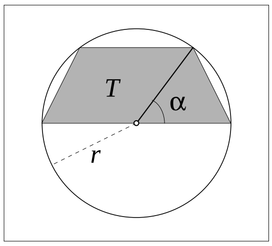
15. Disegnare l'insieme dei punti (x,y) che soddisfano ciascuna delle seguenti condizioni:

$$\text{a) } 1-x^2\leq y\leq x^2-1\ ;\quad \text{b) } y\leq e^x \text{ e } y\leq e^{-x}\ ;\quad \text{c) } |x|\leq 1 \text{ e } y\leq 1\ ;$$

$$\text{d) } |x|\leq 1 \text{ o } y\leq 1\ ;\quad \text{e) } y\leq e^x \text{ e } x\leq e^y\ ;\quad \text{f) } x+y\leq 1 \text{ e } y-x\leq 1\ ;$$

$$\text{g) } |x|\leq 1 \text{ e } |y|\leq 1\ ;\quad \text{h) } |x+y|\leq 1 \text{ e } |x-y|\leq 1\ .$$

16. Calcolare il l'area e il perimetro del trapezio T nella figura accanto in funzione del raggio r e dell'angolo α.



17. a) Trovare la formula per calcolare $\tan^2 x$ partendo solo da $\sin x$ (non utilizzando quindi $\cos x$).
b) Trovare la formula per calcolare $\tan x$ partendo da $\cos x$.
c) Trovare la formula per calcolare $\sin x$ partendo da $\tan x$.
d) Trovare la formula per calcolare $\cos x$ partendo da $\tan x$.

18. Risolvere la disequazione $\sin\left(\dfrac{4}{1+x^2}\right)\geq\dfrac{1}{2}$.

19. [*Difficile*] Fare un disegno approssimativo del grafico delle seguenti funzioni:

$$\text{a) } e^x\sin x\ ,\quad \text{b) } e^{-x}\sin x\ ,\quad \text{c) } \frac{1}{1+x^2}\ ,\quad \text{d) } \sin(\pi e^x)\ ,\quad \text{e) } \log(1+e^x)\ .$$

1. Determinare le coordinate *polari* r e θ dei seguenti punti del piano, dati in coordinate *cartesiane*:

$$\text{a) } (1,-1)\ ; \quad \text{b) } (-2,0)\ ; \quad \text{c) } (-1,\sqrt{3})\ ; \quad \text{d) } (0,-3)\ ; \quad \text{e) } \big(-\sqrt{8},-\sqrt{6}\big)\ .$$

2. Determinare le coordinate *cartesiane* dei seguenti punti del piano, dati in coordinate *polari*:

$$\text{a) } \begin{cases} r=2 \\ \theta=\frac{\pi}{3} \end{cases} ; \quad \text{b) } \begin{cases} r=2^{3/2} \\ \theta=-\frac{7\pi}{4} \end{cases} ; \quad \text{c) } \begin{cases} r=4 \\ \theta=-\frac{8\pi}{3} \end{cases} ; \quad \text{d) } \begin{cases} r=5 \\ \theta=\frac{3\pi}{2} \end{cases} ; \quad \text{e) } \begin{cases} r=5 \\ \theta=-\frac{\pi}{2} \end{cases} .$$

3. Disegnare l'insieme dei punti (x,y) la cui coordinata polare r soddisfa $r \le 2$. [*Ricordare il significato geometrico di r.*]

4. Disegnare l'insieme dei punti (x,y) le cui coordinate polari r e θ soddisfano $1 \le r \le 2$ e $0 \le \theta \le \pi$.

5. Calcolare z_1+z_2, z_1-z_2, $z_1 \cdot z_2$ e z_1/z_2 per le seguenti coppie di numeri complessi:

$$\text{a) } z_1=3i \text{ e } z_2=1-i\ ; \quad \text{b) } z_1=2+3i \text{ e } z_2=2-3i\ ; \quad \text{c) } z_1=5+i \text{ e } z_2=-4i\ .$$

6. Svolgere i seguenti calcoli:

$$\text{a) } \frac{4}{1+3i}+\frac{4}{1-3i}\ ; \quad \text{b) } (5i+2)^2-(5i-2)^2\ ; \quad \text{c) } \Big(\frac{1+3i}{1-3i}\Big)^2\ .$$

7. Trovare tutte le soluzioni complesse dell'equazione $z^2-4z+5=0$.

8. Trovare tutte le soluzioni complesse dell'equazione $z^2=1+i$. [*Traccia: posto $z=x+iy$, semplificando l'equazione $(x+iy)^2=1+i$ si ottiene $(x^2-y^2)+2xyi=1+i$, che conduce a due equazioni separate: $x^2-y^2=1$ e $2xy=1$.*]

9. Per i seguenti numeri complessi z, scrivere il modulo $r=|z|$ e l'argomento θ:

$$\text{a) } z:=-2-2i\ , \quad \text{b) } z:=-1+i\sqrt{3}\ , \quad \text{c) } z:=\sqrt{6}+i2\sqrt{2}\ , \quad \text{d) } z:=-4i\ .$$

10. Dato un numero complesso $z=x+iy$, si indica con $\bar{z}$ il numero complesso *coniugato*, vale a dire $\bar{z}:=x-iy$. Dimostrare che $z\cdot\bar{z}=|z|^2$ e $1/z=\bar{z}/|z|^2$.

11. Posto per definizione $e^{i\theta}:=\cos\theta+i\sin\theta$, se r e θ sono le coordinate polari di z si ha allora che $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)=re^{i\theta}$. Dimostrare quanto segue
a) $\bar{z}=re^{-i\theta}$ e $1/z=r^{-1}e^{-i\theta}$;
b) $e^{i\theta_1}\cdot e^{i'\theta_2}=e^{i(\theta_1+\theta_2)}$;
c) $z_1\cdot z_2=r_1r_2\,e^{i(\theta_1+\theta_2)}$;
d) $z^n=r^ne^{in\theta}$ per ogni intero positivo n;
e) $z^n=r^ne^{in\theta}$ per ogni intero *negativo* n.

12. Calcolare i seguenti numeri utilizzando la notazione esponenziale:

$$\text{a) } (1-i\sqrt{3})^8\ ; \quad \text{b) } (-1+i)^{-6}\ ; \quad \text{c) } (1+i)^{-10}\ ; \quad \text{d) } \Big(\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{6}}{2(1+i)}\Big)^6\ .$$

13. a) Scrivere in forma esponenziale il numero complesso $8i$.
    b) Trovare le radici cubiche complesse di $8i$, vale a dire le soluzioni dell'equazione $z^3 = 8i$.

14. Trovare le soluzioni complesse dell'equazione $z^3 = -1 + i$

15. Disegnare l'insieme dei numeri complessi z, visti come punti del piano cartesiano, tali che $|z| \leq 2$. [*Si ricordi che $|z|$ rappresenta la distanza del punto z dall'origine.*]

16. Dati due numeri complessi z_1 e z_2, verificare che il modulo $|z_1 - z_2|$ è uguale alla distanza tra z_1 e z_2, visti come punti del piano cartesiano.

17. Disegnare l'insieme dei numeri complessi z, tali che $|z-(1+i)| \leq \sqrt{2}$. [*Utilizzare l'esercizio precedente oppure scrivere $z = x + iy$ e risolvere la disequazione.*]

18. Disegnare l'insieme dei numeri complessi z che soddisfano ciascuna delle seguenti disequazioni:

$$\text{a) } |z-2| \leq 2 \ , \quad \text{b) } |z-2i| \geq 2 \ , \quad \text{c) } |z-2| \leq |z+2| \ , \quad \text{d) } |z+2i| \leq |z| \leq 2 \ .$$

Richiamo delle nozioni fondamentali

Si indica con $x = v \pm e$ una qualunque quantità x di cui si sa per certo solo che è approssimata dal valore v con un margine d'errore inferiore ad e, vale a dire che x può essere qualunque numero compreso tra $v - e$ e $v + e$, ovvero che appartiene all'intervallo $[v - e, v + e]$.

Tipicamente si usa questa notazione per indicare una grandezza x per cui, avendola misurata con un'opportuno strumento, si ottiene una misura v con un margine d'errore e dovuto alla precisione dello strumento stesso (per esempio, misurando una lunghezza con un comune righello il margine di errore è di 1 millimetro, cioè la distanza minima tra due tacche).

In questa notazione v viene chiamato *valore* ed e *errore assoluto* (da non confondere ovviamente con la costante di Nepero $e = 2{,}718\ldots$). Si chiama invece *errore relativo* il rapporto $e^{\mathrm{rel}} := e/v$ (qui e in seguito si suppone per semplicità che v sia un numero positivo, altrimenti l'errore relativo è dato da $e^{\mathrm{rel}} := e/|v|$). Chiaramente si ha che $e = v\, e^{\mathrm{rel}}$ e quindi x può essere scritti equivalentemente in uno dei seguenti modi:

$$x = v \pm e = v \pm v\, e^{\mathrm{rel}} = v(1 \pm e^{\mathrm{rel}}) \ .$$

Date due grandezze $x_1 = v_1 \pm e_1$ e $x_2 = v_2 \pm e_2$, ci si chiede con quale errore la somma dei valori $v_1 + v_2$ approssima la somma delle grandezza $x_1 + x_2$: la risposta è data dalle seguente formula:

$$x_1 + x_2 = v_1 + v_2 \pm (e_1 + e_2) \ ,$$

vale a dire che

$$e_{\mathrm{somma}} = e_1 + e_2 \ .$$

Analogamente per la differenza si ha che:

$$x_1 - x_2 = v_1 - v_2 \pm (e_1 + e_2) \quad \text{ovvero} \quad e_{\mathrm{diff}} = e_1 + e_2 \ .$$

Moltiplicando il numero $x = v \pm e$ per una costante positiva c nota esattamente (cioè senza alcun errore) si ha che

$$cx = cv \pm ce = cx(1 \pm e^{\mathrm{rel}})$$

ovvero moltiplicando una grandezza per una costante l'errore relativo resta invariato mentre l'errore assoluto viene moltiplicato per la stessa costante.

Passando invece al prodotto di due grandezze entrambe note a meno di errore si ha che

$$x_1 x_2 = v_1 v_2 \pm (v_2 e_1 + v_1 e_2 + e_1 e_2) \quad \text{ovvero} \quad e_{\mathrm{prod}} = v_2 e_1 + v_1 e_2 + e_1 e_2 \ , \tag{1}$$

ed esprimendo l'ultima formula in termini di errori relativi otteniamo

$$e^{\mathrm{rel}}_{\mathrm{prod}} = e^{\mathrm{rel}}_1 + e^{\mathrm{rel}}_2 + e^{\mathrm{rel}}_1 e^{\mathrm{rel}}_2 \ . \tag{2}$$

Si noti che se gli errori relativi sono sufficientemente piccoli, tra gli addendi a destra dell'uguale $e^{\mathrm{rel}}_1 e^{\mathrm{rel}}_2$ può essere trascurato in quanto nettamente inferiore agli altri due; si ottiene così una formula meno precisa della precedente ma nettamente più semplice:

$$e^{\mathrm{rel}}_{\mathrm{prod}} \simeq e^{\mathrm{rel}}_1 + e^{\mathrm{rel}}_2 \quad \text{ovvero} \quad e_{\mathrm{prod}} \simeq v_2 e_1 + v_1 e_2 \ . \tag{3}$$

Per il reciproco di una grandezza x si ha invece

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{v} \pm \frac{e}{v(v-e)} \quad \text{ovvero} \quad e_{\mathrm{rec}} = \frac{e}{v(v-e)} \ , \quad e^{\mathrm{rel}}_{\mathrm{rec}} = \frac{e^{\mathrm{rel}}}{1 - e^{\mathrm{rel}}} \ ; \tag{4}$$

e se l'errore relativo e^{rel} è sufficientemente piccolo possiamo semplificare le ultime due formule come segue:

$$e_{\text{rec}} \simeq \frac{e}{v^2} \; ; \quad e_{\text{rec}}^{\text{rel}} \simeq e^{\text{rel}} \; . \tag{5}$$

Infine, per quanto riguarda il rapporto si ha che

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{v_1}{v_2} \pm \frac{v_2 e_1 + v_1 e_2}{v_2(v_2 - e_2)} \quad \text{ovvero} \quad e_{\text{rapp}} = \frac{v_2 e_1 + v_1 e_2}{v_2(v_2 - e_2)} \; , \quad e_{\text{rapp}}^{\text{rel}} = \frac{e_1^{\text{rel}} + e_2^{\text{rel}}}{1 - e_2^{\text{rel}}} \; ; \tag{6}$$

e in versione semplificata

$$e_{\text{rapp}} \simeq \frac{v_2 e_1 + v_1 e_2}{v_2^2} \; , \quad e_{\text{rapp}}^{\text{rel}} \simeq e_1^{\text{rel}} + e_2^{\text{rel}} \; . \tag{7}$$

Esercizi

Nel dare i risultati degli esercizi che seguono fare anche gli opportuni arrotondamenti.

1. Dire quali delle seguenti espressioni sono corrette:

   a) $1{,}135 = 1{,}1 \pm 5 \cdot 10^{-2}$; b) $1{,}135 = 1{,}2 \pm 5 \cdot 10^{-2}$; c) $49{,}1\,\text{m} = 48\,\text{m}\,(1 \pm 2\%)$;

   d) $1{,}6109\,\text{m}^2 = 1{,}6\,\text{m}^2 \pm 100\,\text{cm}^2$; e) $112\,\text{sec} = 2\,\text{min} \pm 10\,\text{sec}$; f) $6{,}62 = 7(1 \pm 5\%)$.

2. Per le grandezze che seguono scrivere l'errore assoluto nella stessa unità di misura del valore e poi calcolare l'errore relativo, esprimendolo sia come percentuale che in notazione scientifica:

   a) $1{,}25\,\text{km} \pm 50\,\text{m}$; b) $1{,}6\,\text{m}^2 \pm 40\,\text{cm}^2$; c) $8\,\text{min} \pm 15\,\text{sec}$; d) 43 ± 2 .

3. In ciascuno dei seguenti casi calcolare l'errore assoluto partendo da quello relativo; specificare quindi l'intervallo dei valori ammissibili:

   a) $v = 2{,}1\,\text{m}$, $e^{\text{rel}} = 0,1$; b) $v = 30\,\text{sec}$, $e^{\text{rel}} = 8 \cdot 10^{-2}$; c) $v = 2\,\text{sec}$, $e^{\text{rel}} = 5\%$.

4. Completare i seguenti arrotondamenti:
   a) $x = 36{,}4872 \pm 0{,}06421 = \ldots \pm 0{,}07 = \ldots \pm 0{,}1$;
   b) $x = 1{,}2876729 \cdot 10^{-3} \pm 4{,}3172335 \cdot 10^{-5} = \ldots \pm 5 \cdot 10^{-5} = \ldots \pm 10^{-4}$;
   c) $x = 15{,}346\,\text{sec} \pm 0{,}0352\,\text{sec} = (\ldots \pm 0{,}04)\,\text{sec} = (\ldots \pm 10^{-1})\,\text{sec}$;
   d) $x = 12{,}4396\,\text{m} \pm 7{,}31\,\text{cm} = \ldots\,\text{m} \pm 8\,\text{cm} = \ldots\,\text{m} \pm 10\,\text{cm}$.

5. Una certa lunghezza x è stata misurata in due modi diversi ottenendo $x = 12{,}1\,\text{m} \pm 30\,\text{cm}$ e $x = 11{,}6\,\text{m} \pm 0{,}4\,\text{m}$. Quali sono i possibili valori di x?

6. Far vedere che se $x = 2,1 \pm 0{,}1$, allora si ha pure $x = 2 \pm 0{,}2$. Far vedere con un esempio che il contrario non è vero, cioè che se $x = 2 \pm 0{,}2$ allora non è detto che $x = 2,1 \pm 0{,}1$.

7. Date le grandezze $x_1 = 2{,}1\,\text{m} \pm 2\,\text{cm}$ e $x_2 = 5{,}2\,\text{m} \pm 5\,\text{cm}$, trovarne la somma calcolando sia l'errore assoluto che quello relativo.

8. Prese x_1 e x_2 come nell'esercizio precedente, trovarne il prodotto calcolando sia l'errore assoluto che quello relativo utilizzando le formule precise (1) e (2). Dare i risultati sia

in forma esatta che arrotondati, e poi confrontarli con quelli ottenuti tramite le formule semplificate (3).

9. Ripetere quanto fatto nell'esercizio precedente per il rapporto x_2/x_1.

10. Calcolare il volume di un parallelepipedo con lati di lunghezza 1,2 m, 2,7 m e 4,3 m. Sapendo che le misure dei lati hanno un margine di errore di 5 cm, determinare l'errore assoluto e relativo per il valore del volume. Confrontare i risultati ottenuti utilizzando la formula precisa per l'errore del prodotto e quella semplificata.

11. Si vuole calcolare l'area di un rettangolo con un errore relativo del 5%, ed un lato è già stato misurato con un errore relativo del 3%. Con quale errore relativo bisogna misurare la lunghezza dell'altro lato? Rispondere utilizzando per l'errore del prodotto sia la formula precisa che quella semplificata, e confrontare quindi i risultati.

12. Per fare alcuni calcoli a mano si decide di approssimare il numero π con il valore 3,14.
a) Quali sono l'errore assoluto e l'errore relativo in questa sostituzione (arrotondati ad una sola cifra significativa)?
b) Quali sono gli errori relativi ed assoluti che si ottengono calcolando il valore di π^2 e π^4, sempre arrotondati ad una sola cifra significativa?

13. Le dimensioni di una piscina a forma di parallelepipedo sono state misurate come segue: lunghezza= $25\,\mathrm{m} \pm 10\,\mathrm{cm}$, larghezza= $10\,\mathrm{m} \pm 10\,\mathrm{cm}$, profondità= $2\,\mathrm{m} \pm 1\,\mathrm{cm}$. Determinare il volume della piscina e calcolarne l'errore relativo ed assoluto utilizzando per l'errore del prodotto sia la formula precisa che quella semplificata.

14. a) Supponiamo di voler calcolare il volume della piscina nell'esercizio precedente con un errore relativo inferiore a 1,5%, e di poter rimisurare con maggior precisione solo la profondità. Quali sono l'errore relativo e assoluto che possiamo permetterci nella misurazione? [*Utilizzare solo la formula semplificata per l'errore del prodotto.*]
b) E se invece volessimo calcolare il volume con un errore relativo inferiore a 1%?

15. Un contenitore cilindrico pieno fino all'orlo ha capacità pari a 1 litro, calcolata con errore relativo del 3%. Il diametro (interno) della base risulta inoltre essere di $10\,\mathrm{cm} \pm 1\,\mathrm{mmm}$. Calcolare l'altezza del contenitore e il corrispondente errore sia relativo che assoluto. [*Utilizzare le formule semplificate per l'errore di prodotto e rapporto.*]

16. Dati $x_1 = 14{,}3 \pm 0{,}8$ e $x_2 = 17{,}1 \pm 1{,}1$, calcolare il valore e l'errore assoluto di
$$\frac{x_1^2}{2x_2} + \frac{x_2^2}{3x_1}\ .$$
[*Utilizzare le formule semplificate per l'errore di prodotto e rapporto.*]

17. a) Verificare che la formula (1) per l'errore assoluto del prodotto non può essere migliorata, vale a dire che presi due intervalli di valori $v_1 \pm e_1$ e $v_2 \pm e_2$ qualunque esistono sempre delle grandezze x_1, x_2 in questi intervalli per cui $v_1 v_2$ approssima $x_1 x_2$ con un errore esattamente uguale a $e_{\mathrm{prod}} = v_2 e_1 + v_1 e_2 + e_1 e_2$.

b) Verificare che lo stesso discorso si applica anche alla formula (4) per l'errore assoluto del reciproco e alla formula (6) per l'errore assoluto del rapporto.

18. Supponiamo che le grandezze x_1 e x_2 siano state misurate con errori relativi inferiori a 10%. Dimostrare che l'arrotondamento ad una cifra significativa dell'errore relativo del prodotto dato dalla formula esatta (2) e di quello dato dalla formula approssimata (3) coincidono.

19. Dati $x_1 = v_1 \pm e_1$ e $x_2 = v_2 \pm e_2$, far vedere che

$$x_1 x_2 = (v_1 v_2 + e_1 e_2) \pm (v_1 e_2 + v_2 e_1) \ . \tag{8}$$

Si verifichi che questa formula è più precisa della formula (1), nel senso che l'intervallo dei valori ammissibili per $x_1 x_2$ che ne deriva è contenuto propriamente nell'intervallo che si ottiene dalla (1).

[*Anche se più precisa della* (1), *questa formula è meno significativa, perché quello che ci interessa veramente valutare è l'errore che si introduce sostituendo* $x_1 x_2$ *con il prodotto dei valori* $v_1 v_2$, *e non tanto con* $v_1 v_2 + e_1 e_2$; *si osservi inoltre che se gli errori relativi sono piccoli, le due formule producono a meno di arrotondamento gli stessi risultati. Ciò detto, è bene tenere presente che in alcuni testi viene indicata come formula per l'errore del prodotto la* (8) *e non la* (1).]

20. a) Ricavare la formula (6) a partire dalle formule (1), (2) e (4).
b) Ricavare la formula semplificata (7) a partire dalle formula semplificate (3) e (5).

21. a) Utilizzando la formula semplificata (3) per l'errore relativo del prodotto di due fattori, fare vedere che la formula semplificata per l'errore relativo del prodotto di n fattori $x_1, \dots, x_n$ è

$$e^{\text{rel}}_{\text{prod}} = e^{\text{rel}}_1 + \cdots + e^{\text{rel}}_n \ .$$

b) Supponendo che gli errori relativi siano tutti inferiori al 5%, dare una stima della differenza tra il valore dell'errore relativo dato dalla formula sopra e quello dato dalla formula esatta.

c) Supponendo che gli errori relativi siano tutti inferiori al 5%, per quali n possiamo usare la formula semplificata data sopra al posto di quella esatta se vogliamo che l'arrotondamento dell'errore ad una cifra significativa sia corretto?

Richiamo delle nozioni fondamentali

Si consideri una sequenza di dati numerici $x_1, x_2, \dots, x_N$. La *media* (aritmetica) di questi numeri, indicata con $\mathrm{med}(x_i)$ o semplicemente con m se è chiaro dal contesto a quali dati ci si riferisce, è

$$m = \mathrm{med}(x_i) := \frac{x_1 + \cdots + x_N}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i \ ,$$

mentre la *varianza*, indicata con $\mathrm{var}(x_i)$ o semplicemente con σ^2, è

$$\begin{aligned} \sigma^2 = \mathrm{var}(x_i) &: = \mathrm{med}((x_i - m)^2) \\ &= \frac{(x_1 - m)^2 + \cdots + (x_N - n)^2}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (x_i - m)^2 \ . \end{aligned}$$

Infine la *deviazione standard*, indicata con σ, è la radice quadrata della varianza. Per il calcolo della varianza risulta spesso utile la seguente formula

$$\mathrm{var}(x_i) = \mathrm{med}(x_i^2) - (\mathrm{med}(x_i))^2 \ . \tag{1}$$

Avendo ordinato i dati $x_1, \dots, x_N$ in ordine crescente, la *mediana* è definita come il valore del termine di mezzo (se N è dispari) ovvero la media dei due termini di mezzo (se N è pari), vale a dire

$$\text{mediana} := \begin{cases} x_{\frac{N+1}{2}} & \text{se } N \text{ è dispari,} \\ \frac{1}{2}(x_{\frac{N}{2}} + x_{\frac{N}{2}+1}) & \text{se } N \text{ è pari.} \end{cases}$$

Supponiamo ora che i dati $x_1, \dots, x_N$ siano stati raggruppati in classi sulla base del valore: detti $y_1, \dots, y_n$ i possibili valori, si dice *frequenza assoluta* del valore y_j il numero N_j di dati uguali a y_j, e *frequenza relativa* il rapporto $p_j := n_j/N$. La media e la varianza dei dati x_i si possono calcolare a partire dai valori y_j e dalle loro frequenze relative utilizzando le seguenti formule (corrispondenti a medie "pesate"):

$$\mathrm{med}(x_i) = \sum_{j=1}^{n} p_j y_j \quad \text{e} \quad \mathrm{var}(x_i) = \sum_{j=1}^{n} p_j (y_i - \mathrm{med}(x_i))^2 \ . \tag{2}$$

In questo contesto si chiama *classe mediana* il valore y_j con la seguente proprietà: i dati con valore strettamente inferiore a y_i sono meno della metà del totale e lo stesso vale per i dati con valore strettamente superiore. In questo contesto si chiama *classe modale* o *moda* il valore y_i con la massima frequenza (assoluta o relativa).

Covarianza e correlazione. Si considerino due sequenze di dati numerici con ugual numero di elementi: $x_1, \dots, x_N$ e $y_1, \dots, y_N$. La *covarianza* di queste due sequenze è definita da

$$\mathrm{cov}(x_i; y_i) := \mathrm{med}\big((x_i - \mathrm{med}(x_i)) \cdot (y_i - \mathrm{med}(y_i))\big) \ ;$$

si dimostra che

$$\mathrm{cov}(x_i; y_i) = \mathrm{med}(x_i \cdot y_i) - \mathrm{med}(x_i) \cdot \mathrm{med}(y_i) \ .$$

Il *coefficiente di correlazione* (di Pearson, o di Bravais-Pearson) delle due sequenze è invece

$$\mathrm{corr}(x_i; y_i) := \frac{\mathrm{cov}(x_i; y_i)}{\sqrt{\mathrm{var}(x_i) \cdot \mathrm{var}(y_i)}} \ ;$$

questo numero è sempre compreso tra -1 e 1.

La retta di regressione. Consideriamo ora una sequenza di punti nel piano cartesiano

$$p_1 = (x_1, y_1),\ p_2 = (x_2, y_2),\ \dots\ ,\ p_N = (x_N, y_N)\ ,$$

ed indichiamo con m la media delle ascisse $x_1, \dots, x_N$. Tra tutte le rette di equazione

$$y = a(x - m) + b\ , \tag{3}$$

dove a e b sono i parametri che individuano la retta (si noti che il valore di m è fissato) si cerca quella che "meglio approssima" i punti dati. Per la precisione si cercano i valori di a e b che rendono minima la seguente quantità:

$$f(a, b) := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (a(x_i - m) - y_i)^2\ . \tag{4}$$

Si dimostra che i valori cercati sono:

$$a := \frac{\mathrm{cov}(x_i; y_i)}{\mathrm{var}(x_i)} \quad \text{e} \quad b := \mathrm{med}(y_i)\ . \tag{5}$$

La retta che si ottiene dalla formula (3) prendendo di a e b come in (4) si chiama *retta di regressione* (o anche *retta dei minimi quadrati*) associata alle sequenze di dati $x_1, \dots, x_N$ e $y_1, \dots, y_N$.

Per questa retta, cioè per questi particolari valori a e b, la quantità f definita dalla formula (4) vale

$$\mathrm{var}(y_i) \cdot \left[1 - (\mathrm{corr}(x_i; y_i))^2\right]\ . \tag{6}$$

Pertanto la retta di regressione approssima i punti dati tanto meglio quanto più il coefficiente di correlazione si avvicina a $+1$ o a -1, e il caso peggiore possibile si ha quando il coefficiente di correlazione vale 0.

Esercizi

1. Calcolare media, mediana e varianza dei seguenti dati numerici:

   3,1 ; 2,8 ; 3,0 ; 2,6 ; 3,0 ; 3,5 ; 3,2 ; 3,4 ; 3,0 ; 3,4 .

2. Viene fatta una statistica del numero di incidenti d'auto che vedono coinvolti durante l'anno gli abitanti di un paese, ottenendo i seguenti risultati:
   nessun incidente: 94% degli abitanti;
   un incidente: 5% degli abitanti;
   due incidenti: 1% degli abitanti.
   Calcolare media, mediana e varianza del numero di incidenti per abitante.

3. Nella tabella sottostante sono riportate le statistiche degli esami dati da un certo gruppo di studenti dello stesso corso di laurea durante il primo anno di università (la tabella dice

quanti studenti non hanno dato neanche un esame, quanti ne hanno dato uno solo, quanti due e così via):

esami dati:	0	1	2	3	4	5	6	7	più di 7
numero studenti:	36	4	26	34	44	30	16	10	0

a) Determinare la frequenza relativa per ogni numero nella prima riga.
b) Calcolare media e varianza del numero di esami per studente.
c) Determinare le classi mediane e modali.
[*In questo particolare caso si hanno due classi mediane, quella degli studenti che hanno dato 3 esami e quella degli studenti che ne hanno dati 4: pertanto la mediana del numero di esami per studente risulta essere* 3,5.]

4. Nella tabella sottostante sono riportati, per ciascuno degli otto corsi del primo anno di un certo corso di laurea, il numero di crediti ed il numero di studenti che hanno passato l'esame durante l'anno (il numero degli iscritti al primo anno è 90):

corso:	A	B	C	D	E	F	G	H
crediti:	12	3	9	6	6	6	6	12
studenti:	19	78	36	51	29	47	31	33

a) Calcolare media, mediana e varianza del numero di crediti assegnati per esame.
b) Calcolare il numero medio di esami dati per studente.
c) Calcolare il numero medio di crediti ottenuti per studente.
d) Spiegare perché, a partire dai dati a disposizione, non è possibile calcolare la mediana e la varianza del numero di esami dati per studente.
[*La spiegazione più convincente consiste nel far vedere che sono compatibili con i dati a disposizione diverse situazioni in cui la varianza e la mediana differiscono.*]

5. Calcolare la media e la varianza delle seguenti lunghezze:

$$1{,}05\,\mathrm{m}\ ;\ 60\,\mathrm{cm}\ ;\ 0{,}9\,\mathrm{m}\ ;\ 75\,\mathrm{cm}\ ;\ 950\,\mathrm{mm}\ .$$

6. a) Sapendo che le lunghezze date nell'esercizio precedente sono state calcolate con un errore di 5 mm, calcolare l'errore della media.
b) E se invece l'errore è di 2 cm per le prime tre misure e di 5 mm per le altre due?

7. Nella tabella sottostante sono riportati i redditi annui dei contribuenti di un piccolo paese, suddivisi in fasce (kEU sta per migliaia di euro):

fascia di reddito (in kEU):	0-5	5-10	10-15	15-20	20-30	30-40	40-50
numero di contribuenti:	35	14	20	33	18	10	7

a) Calcolare la frequenza relativa di ogni fascia di reddito.
b) Determinare il più piccolo intervallo di valori a cui deve appartenere il reddito medio (si noti che in mancanza di informazioni più precise non è possibile calcolarne il valore esatto).

c) I redditi in ciascuna fascia possono essere espressi con un valore più un errore (ad esempio, i redditi della fascia più alta sono pari a 45 ± 5 migliaia di euro). Calcolare la media dei redditi usando questa espressione e confrontare il risultato con quanto fatto al punto b).

8. Suddividiamo i dati numerici

$$1{,}2 \; ; 7{,}5 \; ; 3{,}4 \; ; 3{,}3 \; ; 9{,}1 \; ; 1{,}2 \; ; 4{,}7 \; ; 4{,}8 \; ; 3{,}4 \; ; 2{,}5 \; ;$$
$$3{,}8 \; ; 4{,}6 \; ; 6{,}6 \; ; 3{,}1 \; ; 8{,}7 \; ; 1{,}9 \; ; 9{,}8 \; ; 9{,}2 \; ; 3{,}7 \; ; 2{,}6 \; .$$

in cinque classi: la prima corrisponde ai numeri compresi tra 0 e 2, la seconda ai numeri compresi tra 2 e 4, e così via.
a) Calcolare la frequenza assoluta e relativa di ciascuna classe.
b) Determinare la classe mediana e la classe modale.
c) Calcolare la media di questi dati.
d) I dati nella prima classe sono approssimabili come 1 ± 1, quelli nella seconda sono approssimabili come 3 ± 1, e così via. Calcolare la media di questi dati utilizzando questa approssimazione e confrontare il risultato con la media esatta.

9. Calcolare il coefficiente di correlazione per le sequenze di valori di x e y date sotto:

x:	1,1	1,1	1,4	1,9	2,6	3,1	3,1	3,4	3,9	4,6
y:	-5,1	-5,4	-4,2	-3,3	-2,4	-1,1	-1,3	0,2	1,3	2,4

10. Si considerino le sequenze di valori di x e y date nella seguente tabella:

x:	-1	0	2	3	6
y:	2,5	2	1	0,5	-1

a) Calcolare $\mathrm{med}(x_i)$, $\mathrm{var}(x_i)$, $\mathrm{med}(y_i)$, $\mathrm{var}(y_i)$, $\mathrm{cov}(x_i; y_i)$, $\mathrm{corr}(x_i; y_i)$.
b) Scrivere l'equazione della retta di regressione corrispondente ai punti (x_i, y_i).
c) Disegnare nel piano cartesiano la retta di regressione ed i punti dati.

11. Ripetere quanto fatto nell'esercizio precedente per le tabelle

a)

x:	-1	0	2	3	6
y:	2,6	2,1	1	0,4	$-1,1$

, b)

x:	1	4	7	2	6
y:	5	3	5	1	1

.

12. Trovare la costante a per cui la funzione $y = ax^2$ approssima meglio le sequenze di valori di x e y date nella seguente tabella:

x:	4	1,5	2,2	3,2	2,5	1
y:	7,7	1,1	2,4	5,4	2,9	0,7

[*Si suggerisce di cercare la costante che meglio approssima i valori del rapporto y/x^2, vale a dire i numeri* 0,481 ; 0,489 ; 0,496 ; 0,527 ; 0,464 ; 0,7 . *Quale quantità dobbiamo valutare per capire se si tratta di una buona approssimazione?*]

13. Dimostrare che ogni funzione esponenziale $f(x) = ba^x$ si può scrivere come $f(x) = b\,e^{\alpha x}$ con α opportuno, e viceversa. Far vedere che lo stesso risultato vale sa al posto di e si usa 10 o una qualunque altra base.

14. a) Si disegna il grafico di una funzione $y = f(x)$ utilizzando la scala logaritmica in base 10 per la variabile y e si ottiene una retta con coefficiente angolare m. Far vedere che allora f deve essere una funzione esponenziale della forma $f(x) = ba^x$ con $a = 10^m$.
b) Come deve essere f se invece del logaritmo in base 10 si usa quello in base e?

15. a) Si disegna il grafico di una funzione $y = f(x)$ utilizzando la scala logaritmica in base 10 sia per la variabile y che per la x, e si ottiene una retta con coefficiente angolare m. Far vedere che in tal caso $f(x)$ deve essere una funzione della forma $f(x) = bx^m$.
b) Far vedere che vale lo stesso risultato a prescindere dalla base scelta per il logaritmo.

16. a) Riportare su un grafico cartesiano i punti definiti dalle sequenze di valori di x e y date nella seguente tabella utilizzando la scala logaritmica in base e per la variabile y:

x:	4	-1	0	1	3	-2
y:	7,6	0,2	0,5	1,1	4,2	0,1

b) Trovare con il metodo dei minimi quadrati la retta che meglio approssima i punti così disegnati.
c) Calcolare il coefficiente di correlazione necessario a capire se la retta trovata al punto b) fornisce o meno una buona approssimazione dei punti disegnati.
d) Utilizzare quanto fatto al punto b) per scrivere la funzione esponenziale della forma $y = ba^x$ che meglio approssima i dati forniti sopra.

17. a) Riportare su un grafico cartesiano i punti definiti dalle seguenti coppie di valori di x e y:

x:	0,9	1,1	3,1	5,3	6	8,1
y:	9,9	9,6	4,7	2,2	1,7	0,8

b) Ripetere l'operazione utilizzando la scala logaritmica in base e per la variabile y.
c) Ripetere l'operazione utilizzando la scala logaritmica in base e per entrambe le variabili.
d) In quale dei tre casi i punti disegnati sono meglio allineati? Rispondere a questa domanda calcolando gli opportuni coefficienti di correlazione.
e) Utilizzare quanto fatto al punto d) per decidere se i dati nella tabella sopra sono meglio approssimati da una legge di tipo lineare ($y = ax + b$), di tipo esponenziale ($y = ba^x$) oppure di tipo potenza ($y = bx^a$).
f) Trovare con il metodo dei minimi quadrati le rette che meglio approssimano i punti disegnati nei tre casi indicati sopra. Scrivere le corrispondenti leggi di tipo lineare, esponenziale e potenza.
g) Verificare che i risultati ottenuti nei punti d), e) e f) non cambiano se al posto del logaritmo in base e si usa il logaritmo in base 10.

18. Far vedere che se i numeri $x_1, \dots, x_N$ sono tutti uguali a c allora $\text{med}(x_i) = c$ e $\text{var}(x_i) = 0$.

19. Far vedere che se $\text{var}(x_i) = 0$ allora i numeri $x_1, \dots, x_N$ sono tutti uguali al loro valor medio.

20. a) Dati dei numeri $x_1, \dots, x_N$ compresi tra m ed M, dimostrare che $m \leq \mathrm{med}(x_i) \leq M$ e $\mathrm{var}(x_i) \leq (M - n)^2$.

    b) Far vedere con degli esempi che le stime per $\mathrm{med}(x_i)$ date al punto a) sono ottimali, cioè che è possibile avere sia $\mathrm{med}(x_i) = m$ che $\mathrm{med}(x_i) = M$.

    c) Far vedere che non si ha mai $\mathrm{var}(x_i) = (M - n)^2$; mostrare che tuttavia per un qualunque numero c strettamente più piccolo di $(M - n)^2$ si possono trovare dei dati x_i compresi tra m e M per cui $\mathrm{var}(x_i) > c$.

21. Esibire un insieme di dati con media 0 e scarto quadratico medio inferiore a 10^{-4} tale che uno dei dati sia maggiore di 10^5.

22. Dei dati $x_1, \dots, x_N$ si sa solo che hanno media 5 e scarto quadratico medio 2.

    a) Far vedere con un esempio che è possibile che qualche dato sia maggiore di 100.

    b) Detta p la percentuale dei dati che sono maggiori di 100, dare una stima dall'alto per p.

23. I dati $x_1, \dots, x_N$ hanno media m e scarto quadratico medio σ. Dato $c > 1$, dare una stima dall'alto sulla percentuale p dei dati maggiori di $m + c\sigma$.

24. Consideriamo due sequenze $x_1, \dots, x_N$ e $y_1, \dots, y_N$ e dei numeri reali a, b, c, d. Dimostrare che:

    a) $\mathrm{med}(x_i + a) = \mathrm{med}(x_i) + a$;

    b) $\mathrm{med}(a\, x_i) = a\, \mathrm{med}(x_i)$;

    c) $\mathrm{med}(a\, x_i + b) = a\, \mathrm{med}(x_i) + b$;

    d) $\mathrm{med}(x_i + y_i) = \mathrm{med}(x_i) + \mathrm{med}(y_i)$;

    e) $\mathrm{var}(x_i + a) = \mathrm{var}(x_i)$;

    f) $\mathrm{var}(a\, x_i) = a^2\, \mathrm{var}(x_i)$;

    g) $\mathrm{var}(a\, x_i + b) = a^2\, \mathrm{var}(x_i)$;

    h) $\mathrm{var}(x_i + y_i) = \mathrm{var}(x_i) + \mathrm{var}(y_i) + 2\,\mathrm{cov}(x_i; y_i)$;

    i) $\mathrm{cov}(x_i + a; y_i + b) = \mathrm{cov}(x_i; y_i)$;

    l) $\mathrm{cov}(ax_i; by_i) = ab\,\mathrm{cov}(x_i; y_i)$;

    m) $\mathrm{cov}(ax_i + b; cy_i + d) = ac\,\mathrm{cov}(x_i; y_i)$;

    n) $\mathrm{corr}(ax_i + b; cy_i + d) = \mathrm{corr}(x_i; y_i)$.

    [*La maggior parte delle formule è stata già dimostrata a lezione.*]

25. Far vedere che se il coefficiente di correlazione $\mathrm{corr}(x_i; y_i)$ è uguale a 1 o -1 allora esiste una retta che contiene tutti i punti (x_i, y_i). Viceversa, se i punti (x_i, y_i) appartengono alla stessa retta allora $\mathrm{corr}(x_i; y_i) = \pm 1$.

26. Utilizzare la formula (6) ed il fatto che la funzione f è sempre positiva (come risulta chiaramente dalla (4)) per dimostrare che il coefficiente di correlazione è un numero sempre compreso tra -1 e 1.

27. La formula (5) per il coefficiente angolare a della retta di regressione è priva di significato quando $\mathrm{var}(x_i) = 0$. Far vedere che in tal caso i punti (x_i, y_i) appartengono tutti alla stessa retta verticale.

28. Si considerino due sequenze di numeri positivi $x_1, \ldots, x_N$ e $y_1, \ldots, y_N$. Dimostrare che il valore del coefficiente di correlazione $\operatorname{corr}(x_i; \log_b y_i)$ è indipendente dalla scelta della base b. Dimostrare che lo stesso vale per per $\operatorname{corr}(\log_b x_i; \log_b y_i)$.

1. Determinare il dominio di definizione e la derivata delle seguenti funzioni:

a) $e^{2x} + x\sin x$, b) $\sqrt{x+1}$, c) $\sqrt[3]{2x}$, d) $\dfrac{1}{(1+x)^4}$, e) $x^3 \log x$,

f) $\arctan(x^2)$, g) $\sin^3 x$, h) $\log(\cos x)$, i) $\sin(2\pi x^2)$, l) $\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$,

m) $\dfrac{1}{\sqrt{\log x}}$, n) $\log(\log x)$, o) $\dfrac{\log(\cos x)}{\sin x}$, p) $(\sin x^2)^2$, q) $e^{\sin(\log x)}$.

2. Fatte le dovute semplificazioni, calcolare la derivata delle seguenti funzioni:

a) $\sqrt{x^4}$, b) $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}$, c) $\log(e^x)$, d) $\sin^2(1/x) + \cos^2(1/x)$, e) $\sin(\arcsin(2x))$,

f) $e^{2\log x}$, g) $\log(x^2 + 2x^4) - \log(x + 2x^3)$, h) $2^{1-2x}4^x$, i) $\log\left(\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}\right)$.

3. a) Verificare che $x^x = e^{x\log x}$ e usare questa identità per calcolare la derivata di x^x.
b) Calcolare la derivata di $(x^x)^x$.

4. Scrivere le equazioni delle rette tangenti al grafico di $y = e^{-x}$ nei punti di ascissa $0, 1, -1$.

5. Trovare il numero a per cui la retta tangente al grafico della funzione $y = e^x$ nel punto di ascissa a passa anche per l'origine.

6. Dato $a > 0$, calcolare l'area del triangolo T_a delimitato dagli assi cartesiani e dalla retta tangente al grafico di $y = 1/x$ nel punto di ascissa a.

7. Tra tutte le retta tangenti al grafico di $y = \log x$, trovare quella che passa per l'origine.

8. Calcolare i seguenti limiti "elementari":

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}$, b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \log x$, c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan x$, d) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x$, d) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x$.

9. Calcolare i seguenti limiti:

a) $\lim\limits_{x\to 1} x^x$, b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2+4}$, c) $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + e^{-3x}$, d) $\lim\limits_{x\to 0} 1 + x^3 \sin x$,

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan x$, f) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{x+1}$, g) $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - x\log x$, h) $\lim\limits_{x\to 0} \log(1-\cos x)$

,

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2/x}$, l) $\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan(1+x^3)$, m) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 e^x$, n) $\lim\limits_{x\to-\infty} \cos(e^x)$,

p) $\lim\limits_{x\to+\infty} \log(\log x)$, q) $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{1-\log x}$, r) $\lim\limits_{x\to\pi^+} \dfrac{1}{\sin x}$, s) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2\sin(1/x^3)$.

10. Verificare che i seguenti limiti non esistono:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}$, b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin x$, c) $\lim\limits_{x\to\pi/2} \tan x$, d) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x \sin x$.

11. Per ciascuna delle seguenti funzioni, studiare il segno della derivata, trovare i punti in cui questa si annulla e dire se si tratta di punti di massimo locale, minimo locale o altro:

$$\text{a) } x^2 - 2x + 3 \ , \quad \text{b) } \log(x^2+1) \ , \quad \text{c) } e^{-x^2} \ , \quad \text{d) } x^4 + 2x^2 + 3 \ .$$

12. Per ciascuna delle funzioni date nell'esercizio precedente, calcolare i limiti quando x tende a $+\infty$ e a $-\infty$ e disegnarne sommariamente il grafico.

13. Disegnare il grafico delle seguenti funzioni: a) $\dfrac{1}{1+x^2}$, b) $\dfrac{x^6}{1+x^6}$, c) $e^x + e^{-x}$.

14. Per ciascuna delle seguenti funzioni, dire se sono crescenti, decrescenti, o altro:

$$\text{a) } e^{1-2x} \ , \quad \text{b) } x^2(1+x) \ , \quad \text{c) } \arctan(1-x^3) \ , \quad \text{d) } \log(1/x) \ , \quad \text{e) } e^{\sin x} \ .$$

15. a) Per ciascuna delle funzioni nell'esercizio precedente tranne d) calcolare i limiti quando x tende a $+\infty$ e a $-\infty$ e disegnarne sommariamente il grafico.
    b) Calcolare i limiti della funzione d) nell'esercizio precedente per $x \to 0^+$ e per $x \to +\infty$, e disegnarne il grafico limitatamente alla semiretta $x > 0$.

16. Per ciascuna delle seguenti funzioni, dire se sono convesse, concave, o altro:

$$\text{a) } x - e^x \ , \quad \text{b) } e^{(x^2)} \ , \quad \text{c) } \sin x \ , \quad \text{d) } 2 + x - x^4 \ , \quad \text{e) } \frac{1}{1+x^6} \ , \quad \text{f) } e^x + e^{-x} \ .$$

17. Trovare i punti di massimo e di minimo della funzione $f(x) = x^3(4-3x)$ relativamente all'intervallo $0 \le x \le 2$.

18. Trovare i punti di massimo e di minimo della funzione $f(x) = x^3 - 12x$ relativamente all'intervallo $-3 \le x \le 5$.

19. a) Disegnare il grafico della funzione $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 1$.
    b) Determinare il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = 3$;
    c) Determinare il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = 2$;
    c) Determinare, al variare di $a \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = a$ comprese tra -2 e 3.

20. a) Disegnare il grafico di $f(x) = x^3 - 3x - 1$ limitatamente all'intervallo $-2 \le x \le 3$.
    b) Determinare, al variare di $a \in \mathbb{R}$ il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = a$ comprese tra -2 e 3.

21. Si consideri la funzione $f(x) := x^2 + \dfrac{1}{x}$.
    a) Determinare il dominio di definizione di f.
    b) Calcolare i limiti di f per x che tende a $+\infty, -\infty, 0^+, 0^-$.
    c) Disegnare il grafico di f.
    d) Dire quante sono le soluzioni dell'equazione $f(x) = a$ al variare di $a \in \mathbb{R}$.

22. a) Verificare che la funzione $f(x) = x(e^x - e)$ è convessa per $x \geq 0$, e disegnarne il grafico limitatamente alla semiretta $x > 0$. [*Non è possibile studiare il segno della derivata di f, ma è possibile tracciare il grafico di f calcolando $f(0)$ e $f'(0)$, ed usando il fatto che f è convessa e tende a $+\infty$ quando $x \to +\infty$.*]
b) Dimostrare che il punto di minimo di f è compreso tra 0,5 e 0,6, e che il valore minimo è inferiore a -1.
c) Determinare il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = a$ al variare del parametro reale a nell'intervallo $[-1, +\infty)$.

23. a) Per ogni numero reale $a \geq 0$, scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di $y = e^{-x}$ nel punto di ascissa a, e quindi calcolare l'area del triangolo delimitato da tale retta e dagli assi cartesiani.
b) Determinare per quale valore di a tale area risulta essere massima.
c) Determinare per quale valore di a tale area risulta essere minima.

24. a) Tra tutti i rettangoli di perimetro 1 trovare quello di area massima.
b) Tra tutti i rettangoli di area 1 trovare quello di perimetro minimo.

25. a) Tra tutti i triangoli rettangoli di perimetro 1 trovare quello di area massima.
b) Tra tutti i triangoli rettangoli di area 1 trovare quello di perimetro minimo. [*Punto difficile: si suggerisce di esprimere il perimetro in funzione di uno dei due angoli acuti del triangolo.*]

26. a) Disegnare approssimativamente il grafico della funzione $f(x) = x^3 - 3x + 2$ relativamente alla semiretta $x \geq 0$.
a) Dimostrare che $x^3 - 3x + 2 \geq 0$ per ogni numero reale $x \geq 0$.
b) Dimostrare che $y^3 + 2z^3 \geq 3yz^2$ per ogni coppia di numeri reali positivi y, z. [*Suggerimento: dividere la disuguaglianza da dimostrare per z^3 e usare il punto b).*]

27. a) Disegnare approssimativamente il grafico della funzione $f(x) = e^x - 1 - x$.
b) Dimostrare che $e^x \geq 1 + x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

28. a) Dimostrare che $e^x \geq 2x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
b) Dire per quali $a \geq 0$ si ha che $e^x \geq ax$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Richiamo delle nozioni fondamentali

Date due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, si dice che $f(x)$ è *trascurabile* rispetto a $g(x)$ quando x tende ad un dato x_0 (che può essere anche $\pm\infty$) se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \ ;$$

in tal caso si scrive $f(x) \ll g(x)$ oppure anche $f(x) = o(g(x))$ – quest'ultima espressione si legge "$f(x)$ è *o piccolo* di $g(x)$". Si dice invece che $f(x)$ è *asintoticamente equivalente* a $g(x)$ per x che tende ad x_0, e si scrive $f(x) \sim g(x)$, se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \ .$$

Si ricordi che $f(x)$ è asintoticamente equivalente a $g(x)$ se e solo se è possibile scrivere f come g più un resto trascurabile rispetto a g stessa, ovvero se

$$f(x) = g(x) + o(g(x)) \ .$$

Queste nozioni, come pure quelle che seguono, vengono solitamente utilizzate per confrontare due funzioni che tendono a zero (dette quindi funzioni infinitesime, o più semplicemente infinitesimi) due funzioni che tendono a infinito (dette infiniti) per x che tende a x_0. Tipicamente x_0 vale 0 oppure $\pm\infty$.

Parte principale. Se $f(x)$ è asintoticamente equivalente per $x \to x_0$ ed una funzione $g(x)$ particolarmente semplice o significativa, quest'ultima viene talvolta chiamata *parte principale* di $f(x)$ per $x \to x_0$. In particolare la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0$ (o per $x \to \pm\infty$) è la potenza ax^b con $a \neq 0$ se

$$f(x) \sim ax^b \quad \text{ovvero} \quad f(x) = ax^b + o(x^b) \ .$$

Principio di sostituzione. Se $f_1 \sim g_1$ e $f_2 \sim g_2$ per $x \to x_0$, allora $f_1 \cdot f_2 \sim g_1 \cdot g_2$ e $f_1/f_2 \sim g_1/g_2$. Questo fatto permette di determinare la parte principale di un prodotto (o di un rapporto) a partire da quelle dei fattori. Poiché due funzioni asintoticamente equivalenti hanno lo stesso limite, si ottiene inoltre che

$$\lim_{x \to x_0} f_1(x) \cdot f_2(x) = \lim_{x \to x_0} g_1(x) \cdot g_2(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{g_1(x)}{g_2(x)} \ .$$

In altre parole per calcolare il limite di un prodotto (o rapporto) di funzioni, possiamo sostituire ad uno o più fattori una funzione asintoticamente equivalente (questo è noto come principio di sostituzione degli infinito/infinitesimi). In particolare conviene sostituire ciascun fattore con la sua parte principale.

Regola di de l'Hôpital. Date due funzioni f e g che tendono entrambe a 0 o entrambe a $\pm\infty$ quando $x \to x_0$, allora

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \ .$$

Tra le altre cose, questo risultato torna utile per verificare se due funzioni sono asintoticamente equivalenti oppure trascurabili una rispetto all'altra; in particolare la si usa per dimostrare alcuni dei confronti contenuti nel paragrafo seguente.

Confronto delle funzioni elementari. Quando x tende a $+\infty$, le funzioni esponenziali, le potenze ed il logaritmo sono tutte infinite (o infinitesime) e si pone quindi il problema di confrontarle. Valgono in effetti i seguenti risultati:

$$\begin{array}{ll} x^a \ll x^b & \text{per } a < b, \\ a^x \ll b^x & \text{per } 1 \le a < b, \\ x^a \ll b^x & \text{per } a \text{ qualunque e } b > 1, \\ \log x \ll x^a & \text{per } a > 0. \end{array}$$

Viceversa per x che tende a zero si ha

$$\begin{array}{ll} x^a \ll x^b & \text{per } a > b, \\ \log x \ll x^{-a} & \text{per } a > 0. \end{array}$$

Sviluppo di Taylor. Data una funzione f ed un numero intero positivo n, si può scrivere f come un polinomio di grado minore o uguale a n più un resto trascurabile rispetto a x^n per $x \to 0$, vale a dire

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n) \tag{1}$$

dove

$$P_n(x) := f(0) + \frac{D^1 f(0)}{1!} x^1 + \frac{D^2 f(0)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{D^n f(0)}{n!} x^n \ ; \tag{2}$$

in quest'ultima formula $D^n f(x)$ indica la derivata di ordine n di f e $D^n f(0)$ indica il valore in 0 di questa derivata; $n!$ indica il *fattoriale* di n, vale a dire il prodotto $n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$. Il termine a destra dell'uguale nella (1) si chiama *sviluppo di Taylor* di ordine n di f in 0, mentre P_n si chiama *polinomio di Taylor* di ordine n di f in 0.

Si noti che se una funzione f può essere scomposta come $f(x) = P(x) + o(x^n)$ con P polinomio di grado minore o uguale a n, allora P è necessariamente il polinomio di Taylor di ordine n di f in 0.

Si noti infine che è possibile scrivere un polinomio di Taylor "di ordine infinito" considerando la somma (infinita) di tutti i monomi $D^n f(0)\, x^n/n!$, cioè senza fermarsi ad un particolare n. Tale espressione viene chiamata sviluppo di Taylor di ordine infinito o più propriamente *serie di Taylor* di f; in alcuni casi (ma non sempre) questa somma infinita può essere effettivamente calcolata e coincide con $f(x)$.

È utile ricordare i seguenti sviluppi di Taylor:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdots$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots$$

$$\log(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots$$

Infine per ogni $a \in \mathbb{R}$ si ha

$$(1+x)^a = \binom{a}{0} + \binom{a}{1} x + \binom{a}{2} x^2 + \binom{a}{3} x^3 + \binom{a}{4} x^4 + \cdots$$

dove si è posto

$$\binom{a}{0} := 1 \quad \text{e} \quad \binom{a}{n} := \frac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1)}{n!} \qquad \text{per } n = 1, 2, \dots$$

L'espressione $\binom{a}{n}$ si legge "a su enne"; questi numeri sono deti coefficienti binomiali (per ragioni che risulteranno chiare nel prossimo paragrafo).

Binomio di Newton. Dato N intero positivo, $(1+x)^N$ risulta essere un polinomio di grado N e pertanto deve coincidere con il suo sviluppo di Taylor di ordine N. Dunque

$$(1+x)^N = \binom{N}{0} + \binom{N}{1}x + \binom{N}{2}x^2 + \cdots + \binom{N}{N}x^N = \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} x^n \ . \tag{1}$$

Da questa si ottiene la formula del binomio di Newton:

$$(a+b)^N = \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} a^{N-n} b^n \ . \tag{2}$$

Approssimazione del valore di una funzione. Se la variabile x assume il valore v a meno di un errore δ, vale a dire che $x = v \pm \delta$, allora $f(x)$ è dato da $f(v)$ a meno di un errore $c\delta$ dove c è una qualunque costante tale che $|f'(t)| \leq c$ per ogni t nell'intervallo $[v-\delta, v+\delta]$. In altre parole

$$f(v \pm \delta) = f(v) \pm c\delta \ . \tag{3}$$

Si osservi che se $f'(v) \neq 0$ e δ è sufficientemente piccolo il valore $|f'(t)|$ con $t \in [v-\delta, v+\delta]$ è sostanzialmente uguale a $|f'(v)|$ e quindi la formula precedente può essere semplificata come segue:

$$f(v \pm \delta) = f(v) \pm |f'(v)|\delta \ . \tag{4}$$

Esercizi

1. Calcolare i seguenti limiti:

$$\text{a)} \lim_{x\to-\infty} e^{2x} \ ; \quad \text{b)} \lim_{x\to+\infty} \sqrt[4]{3x} \ ; \quad \text{c)} \lim_{x\to1^+} 1/(1-x)^3 \ ; \quad \text{d)} \lim_{x\to1} 1/(1-x)^4 \ ;$$

$$\text{e)} \lim_{x\to0} \cos(\pi e^x) \ ; \quad \text{f)} \lim_{x\to\pi} \tan(x/4) \ ; \quad \text{g)} \lim_{x\to0^+} \log^2 x \ ; \quad \text{h)} \lim_{x\to0^+} \log(\sqrt{x}) \ ;$$

$$\text{i)} \lim_{x\to+\infty} \arctan(e^x) \ ; \quad \text{l)} \lim_{x\to0^-} \arctan(1/x) \ ; \quad \text{m)} \lim_{x\to+\infty} x^2 \log x \ .$$

2. Dire se esistono i seguenti limiti, ed in caso affermativo calcolarli:

$$\text{a)} \lim_{x\to0} x^{-2} \ ; \quad \text{b)} \lim_{x\to+\infty} \sin x \ ; \quad \text{c)} \lim_{x\to-\infty} e^{\cos x} \ ; \quad \text{d)} \lim_{x\to\pi/2} (\tan x)^4 \ ;$$

$$\text{e)} \lim_{x\to0} \frac{1}{\sin x} \ ; \quad \text{f)} \lim_{x\to0} e^{1/x} \ ; \quad \text{g)} \lim_{x\to1} \arctan(1/x^2) \ ; \quad \text{h)} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2 \log x} \ ;$$

$$\text{i)} \lim_{x\to0^+} \sin(\log x) \ ; \quad \text{l)} \lim_{x\to+\infty} \cos(1/\log x) \ ; \quad \text{m)} \lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x} \ ; \quad \text{n)} \lim_{x\to0^+} e^{\sqrt{x}} \ .$$

[*Per esempio, il limite di $1/x$ per $x \to 0$ non esiste perché $1/x$ tende a $+\infty$ per $x \to 0^+$ e tende a $-\infty$ per $x \to 0^-$.*]

3. Calcolare i seguenti limiti utilizzando la regola di de l'Hôpital:

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin x}\ ;\quad b)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{1+x^2}{\log x}\ ;\quad c)\ \lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos x}{\sin x}\ ;\quad d)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^3)}{x^2}\ ;$$

$$e)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^4+2x^2+5}{x^4+3x+1}\ ;\ f)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^3}-1}{\sin(x^3)}\ ;\quad g)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{2^x}{\log^3 x}\ ;\quad h)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\sin(2/x)}{\tan(3/x)}\ .$$

$$i)\ \lim_{x\to+\infty} x(\pi-2\arctan x)\ ;\ l)\ \lim_{x\to 0^+} x\log x\ ;\quad m)\ \lim_{x\to-\infty} x^2e^x\ .$$

4. Calcolare i seguenti limiti al variare di $a\in\mathbb{R}$:

$$a)\ \lim_{x\to 0^+} x^a\log x\ ;\quad b)\ \lim_{x\to+\infty} x^a e^x\ ;\quad c)\ \lim_{x\to+\infty} e^{ax}\log x\ ;\quad d)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{(\log x)^a}{\log\log x}\ .$$

5. Calcolare i seguenti limiti:

$$a)\ \lim_{x\to+\infty} x^5e^{-2x}\ ;\quad b)\ \lim_{x\to 0^+} x^4e^{1/x}\ ;\quad c)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{x^4 4^x}\ ;\quad d)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+\log x}{2^x+\cos x}\ ;$$

$$e)\ \lim_{x\to-\infty} x^4 2^x\ ;\quad f)\ \lim_{x\to 0^+} x^2\log^3 x\ ;\quad g)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{(x+2)^{10}}\ ;\quad h)\ \lim_{x\to+\infty} 2^{-3x}\log x\ .$$

6. Utilizzando gli sviluppi di Taylor delle funzioni elementari dati sopra, calcolare lo sviluppo di Taylor di ordine 8 in 0 delle seguenti funzioni:

$$a)\ \frac{1}{1-x^4}\ ;\quad b)\ e^{2x^3}\ ;\quad c)\ \frac{1}{1+2x^2}\ ;\quad d)\ x^2e^{-x^2}\ ;\quad e)\ x^3\sin x\ ;\quad f)\ \log(1-2x^2)\ .$$

7. Utilizzando gli sviluppi di Taylor delle funzioni elementari calcolare la parti principali delle seguenti funzioni per $x\to 0$:

$$a)\ \sin x\ ;\quad b)\ e^x-1\ ;\quad c)\ 1-\cos x\ ;\quad d)\ \log(1+x)\ ;\quad e)\ (1+x)^a-1\ ;$$

$$f)\ x-\sin x\ ;\quad g)\ e^{x^2}-\cos(2x)\ ;\quad h)\ \sin x-\log(1+x)\ ;\quad i)\ 1-\sqrt[3]{1-x^2}\ ;$$

8. Calcolare i seguenti limiti utilizzando quanto fatto nell'esercizio precedente:

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^x-1}\ ;\quad b)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin^5 x}{x^5}\ ;\quad c)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^4}-1}{1-\cos(x^2)}\ ;\quad d)\ \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\log(1-2x)}\ ;$$

$$e)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}\ ;\quad f)\ \lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x-\sin x}\ ;\quad g)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{1-\cos x}\ ;\quad h)\ \lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{\log(1+x^2)}\ .$$

9. Calcolare le seguenti espressioni con il relativo errore (arrotondato ad una cifra significativa) confrontando i risultati ottenuti tramite la formula (3) con quelli ottenuti tramite la formula semplificata (4):

$$a)\ \sin(\pm 0{,}1)\ ;\quad b)\ \cos(\pm 10^{-2})\ ;\quad c)\ e^{-2\pm 0{,}1}\ ;\quad d)\ \sqrt{25\pm 0{,}1}\ ;\quad e)\ \log(5\pm 0{,}5)\ .$$

10. Calcolare i seguenti limiti:

$$a)\ \lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos x}{\sin x}\ ;\quad b)\ \lim_{x\to+\infty} x^2\sin(1/x)\ ;\quad c)\ \lim_{x\to+\infty} 2^{-x}\log x\ ;$$

d) $\lim_{x\to 0^+} \log(2x) - \log x$; e) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$; f) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{2^x+1}{x^{10}-1}$;

g) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{4^x}{1+3^x}$; h) $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{4^x}{1+3^x}$; i) $\lim_{x\to +\infty} e^{x/\log x}$; l) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\log x}{(\log\log x)^2}$.

11. Calcolare lo sviluppo di Taylor di ordine 6 in 0 delle seguenti funzioni:

a) $\tan(x^2)$; b) $\sqrt{1+x^3}$; c) $(x-\sin x)^2$; d) $e^{x^3} - e^{-x^3}$; e) $\log(\cos(x^3))$.

12. Determinare la parte principale per $x \to 0$ delle seguenti funzioni:

a) $\dfrac{1}{e^{2x}-1}$; b) $e^x + e^{-x} - 2$; c) $\dfrac{x}{\sin(x^4)}$; d) $\dfrac{1}{x} + 2 + x^3$; e) $\dfrac{1}{\sin x}$;

f) $\dfrac{x^2}{2-x^2}$; g) $(x-\sin x)^{-4}$; h) $\dfrac{1}{\cos x} - 1$.

Determinare la parte principale per $x \to 0^+$ delle seguenti funzioni:

i) $\dfrac{2+x}{x} + \log x$; l) $\sqrt{x^2+x^3}$; m) $\big(x+\sqrt{x^3}\big)^3$; n) $(\log x + 1/x)^4$.

13. Determinare la parte principale per $x \to +\infty$ delle seguenti funzioni:

a) $x^4 + x\sin x + 3$; b) $x + \log x + 2e^{-x}$; c) $x\,\sin(1/x^2)$; d) $\sqrt{1+\dfrac{1}{x}} - 1$;

e) $\dfrac{x^2-2}{x+3\log x}$; f) $1-e^{1/x}$; g) $2x^3 + e^{-x}x^5$; h) $\log(1+e^x)$.

[*Nei punti c), d) e f) conviene applicare il cambio di variabile $x = 1/t$ e determinare con i metodi già visti la parte principale per $t \to 0$ della funzione così ottenuta.*]

14. Determinare la parte principale per $x \to +\infty$ della funzione $f(x) := \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$
[*Mettere in evidenza $\sqrt{x}$ e poi ricondursi alla funzione nel punto d) dell'esercizio precedente.*]

15. Determinare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) := \dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}$.
[*Scrivere $f(x)$ come un'unica frazione e calcolare separatamente le parti principali di numeratore e denominatore.*]

16. Lo sviluppo di Taylor di ordine infinito di e^x, suggerisce che

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$$

Utilizzando una calcolatrice, verificare che i primi sei addendi di questa formula danno il valore di e tre cifre decimali precise. Quanti addendi devo sommare per ottenere il valore di e con cinque cifre decimali precise?

17. a) Scrivere il polinomio di Taylor P di ordine 5 di $\sin x$ in 0.
b) Utilizzando una calcolatrice, verificare che $\sin(0{,}5) = P(0{,}5) \pm 10^{-5}$.

18. a) Calcolare lo sviluppo di Taylor di ordine infinito in 0 di $1/(1+x^2)$.
b) Calcolare lo sviluppo di Taylor di ordine infinito in 0 di $\arctan x$.
c) Utilizzando quanto fatto al punto b), mostrare che

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

19. Per ogni numero complesso z definiamo e^z utilizzando lo sviluppo di Taylor di ordine infinito dell'esponenziale, vale a dire

$$e^z := 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots$$

Verificare che allora

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \ .$$

20. Per $a = -1$ le funzioni $(1+x)^a$ e $1/(1+x)$ coincidono, e quindi anche i loro sviluppi di Taylor (dati sopra) devono coincidere. Verificatelo!
[*Si tratta quindi di verificare che* $\binom{-1}{n}$ *è uguale a* 1 *per* n *pari e a* -1 *per* n *dispari.*]

21. Verificare che se N è un numero intero allora
a) $\binom{N}{n} = \binom{N}{N-n}$ per $n = 0, \dots, N$;
b) $\binom{N}{n} = 0$ per $n > N$.

22. Ricavare la formula del binomio di Newton (2) a partire dalla (1).
[*Osservare che* $(a+b)^N = a^N(1+x)^N$ *con* $x := b/a$ *e quindi sviluppare* $(1+x)^N$.]

23. Dimostrare le seguenti "regole" riguardanti l'uso della notazione "o" piccolo (in tutte si sottintende che $x \to x_0$):
a) se $f(x) = o(g(x))$ e $g(x) = o(h(x))$, allora $f(x) = o(h(x))$;
b) se $f(x) = o(g(x))$ e $g(x) \sim c \cdot h(x)$ con c costante diversa da 0, allora $f(x) = o(h(x))$;
c) se $f_1(x) = o(g(x))$ e $f_2(x) = o(g(x))$, allora $f_1(x) + f_2(x) = o(g(x))$;
d) se $f_1(x) = o(g_1(x))$ e $f_2(x) = o(g_2(x))$, allora $f_1(x) \cdot f_2(x) = o(g_1(x) \cdot g_2(x))$;
e) se $f_1(x) = o(g(x))$, allora $f_1(x) \cdot f_2(x) = o(g(x) \cdot f_2(x))$.

7. Integrali [versione aggiornata: 23/3/10]

1. Calcolare i seguenti integrali definiti utilizzando la tabella delle primitive elementari:
$$\text{a)} \int_0^2 e^x\,dx\ ; \quad \text{b)} \int_1^e \log x\,dx\ ; \quad \text{c)} \int_0^\pi \sin x\,dx\ ; \quad \text{d)} \int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2}\ .$$

2. Calcolare i seguenti integrali definiti utilizzando un opportuno cambio di variabile:
$$\text{a)} \int_0^2 e^{-x}\,dx\ ; \quad \text{b)} \int_0^{\pi/a} \sin(ax)\,dx\ ; \quad \text{c)} \int_0^1 (1+3x)^{-1/2}\,dx\ ; \quad \text{d)} \int_{-1}^1 \frac{dx}{1+4x^2}\ ;$$
$$\text{e)} \int_{-1}^1 x\,e^{1+ax^2}\,dx\ ; \quad \text{f)} \int_0^1 \frac{\log^4 x}{x}\,dx\ ; \quad \text{g)} \int_0^1 x^2\left(1+x^3\right)^a dx\ ; \quad \text{h)} \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin^3 x}\,dx$$
.
In questo esercizio, come in quelli che seguono, a indica un generico numero reale positivo.

3. Calcolare i seguenti integrali definiti utilizzando la formula di integrazione per parti:
$$\text{a)} \int_0^1 xe^x\,dx\ ; \quad \text{b)} \int_1^e (1+x^a)\log x\,dx\ ; \quad \text{c)} \int_0^\pi x^2\sin x\,dx\ ; \quad \text{d)} \int_1^e \frac{\log x}{x^a}\,dx\ .$$

4. Calcolare le seguenti primitive utilizzando un opportuno cambio di variabile:
$$\text{a)} \int e^{3x}\,dx\ ; \quad \text{b)} \int \sqrt{1-x}\,dx\ ; \quad \text{c)} \int \frac{x}{1+x^4}\,dx\ ; \quad \text{d)} \int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx\ ;$$
$$\text{e)} \int \frac{1}{1+4x^2}\,dx\ ; \quad \text{f)} \int x\sqrt{1-x^2}\,dx\ ; \quad \text{g)} \int \cos^a x\,\sin x\,dx\ .$$

5. Calcolare le seguenti primitive utilizzando la formula di integrazione per parti:
$$\text{a)} \int \log^2 x\,dx\ ; \quad \text{b)} \int xe^{-2x}\,dx\ ; \quad \text{c)} \int x^2\cos x\,dx\ ; \quad \text{d)} \int e^x\sin x\,dx.$$

6. Calcolare le seguenti primitive:
$$\text{a)} \int \log(x^a)\,dx\ ; \quad \text{b)} \int 3x^2+e^{2x}\,dx\ ; \quad \text{c)} \int x\sin(2x)\,dx\ ; \quad \text{d)} \int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx\ .$$

7. Calcolare i seguenti integrali definiti:
$$\text{a)} \int_0^2 \log x\,dx\ ; \quad \text{b)} \int_0^\infty \frac{dx}{e^x}\ ; \quad \text{c)} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}\ ; \quad \text{d)} \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2}\ ; \quad \text{e)} \int_1^\infty x^{-a}\,dx\ .$$

8. Calcolare l'integrale definito $\displaystyle\int_0^\pi \cos^2 x\,dx$.
[*Usare l'identità* $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$, *oppure scrivere* $\cos^2 x$ *come* $1 - \sin x \cdot \sin x$ *ed integrare il secondo termine per parti.*]

9. Calcolare la primitiva $\displaystyle\int \sin^3 x\,dx$.
[*Scrivere* $\sin^3 x$ *come* $\sin x(1-\cos^2 x)$ *ed usare il cambio di variabile* $t = \cos x$.]

10. a) Dato $r > 0$, usare il cambio di variabile per calcolare l'integrale definito

$$\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx \ .$$

b) Utilizzare quanto fatto per dimostrare la ben nota formula per l'area del cerchio.

11. Disegnare la figura piana A delimitata dai grafici delle funzioni $y = x^2 - 1$ e $y = 1 - x^2$ e calcolarne l'area.

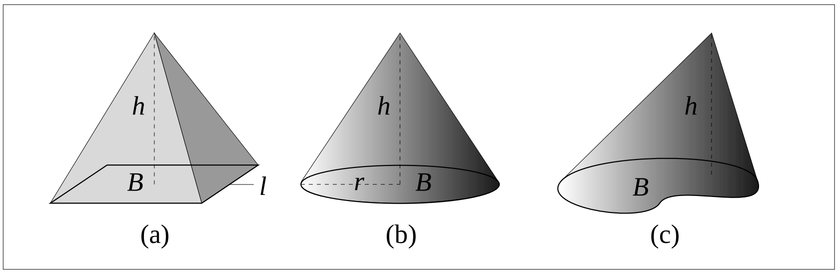
12. Disegnare la figura piana A data dai punti (x, y) tali che $e^{2x} \leq y \leq e^x$ e calcolarne l'area.

13. Disegnare la figura piana A data dai punti (x, y) tali che $1 - \cos x \leq y \leq \cos x$ e $0 \leq x \leq 2\pi$, e calcolarne l'area.

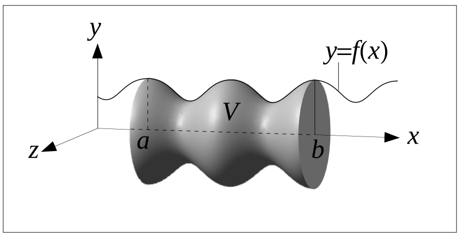
14. a) Sia V una piramide retta con base quadrata B di lato l ed altezza h (disegno (a) nella figura sottostante). *Dimostrare* che il volume di V è dato dalla nota formula

$$\mathrm{Vol}(V) = \frac{1}{3}\, \mathrm{Area}(B) \cdot h \ . \tag{1}$$

b) Dimostrare che la formula (1) vale anche per un cono retto (disegno (b)).
c) Dimostrare che la (1) vale anche per un cono con base non circolare (disegno (c)).



15. Sia f una funzione positiva, e siano a, b numeri reali con $a < b$. Sia V il solido delimitato dalla superficie ottenuta facendo ruotare il grafico $y = f(x)$ attorno all'asse x, e dai piani perpendicolari all'asse delle x passanti per il punto di ascissa a ed il punto di ascissa b (si veda la figura accanto).
a) Dimostrare che il volume di V è dato da



$$\mathrm{Vol}(V) = \pi \int_a^b \big(f(x)\big)^2\, dx \ . \tag{2}$$

b) Calcolare esplicitamente il volume di V nel caso in cui $f(x) := 2 + \cos x$, $a := 0$, $b := 2\pi$.
c) Usare la formula (2) per calcolare il volume della sfera di raggio r.
d) Usare la formula (2) per calcolare il volume del cono retto di altezza h e raggio di base r.

Richiamo delle nozioni fondamentali

In un'equazione differenziale l'incognita da determinare è una funzione (e non un numero) che indicheremo solitamente con $y(t)$, o semplicemente y. L'equazione è un'identità che coinvolge la funzione y e le sue derivate $\dot{y}, \ddot{y}, \ldots$, e una soluzione è una qualunque funzione y che soddisfa questa identità per tutti i valori di t nel suo dominio di definizione.

Per esempio, una soluzione dell'equazione differenziale $\ddot{y}(t)e^{y(t)}+t^2(y(t))^3 = 0$ è la funzione $y(t) := \log t$. Per semplificare la notazione si omette di solito di esplicitare la dipendenza di y dalla variabile indipendente t, scrivendo quindi y al posto di $y(t)$ e così via; così facendo l'equazione precedente diventa quindi $\ddot{y}\, e^y + t^2\dot{y}^3 = 0$.

Equazioni differenziali del primo ordine. Si chiamano *equazioni differenziali del primo ordine* tutte quelle che si possono ricondurre alla forma

$$\dot{y} = f(t, y) \ , \tag{1}$$

vale a dire quelle per cui si riesce ad esprimere la derivata $\dot{y}$ tramite una formula che coinvolge solamente t e y. Tipicamente le soluzioni dell'equazione differenziale del primo ordine (1) sono una famiglia infinita di funzioni dipendente da un parametro. Inoltre, scelti dei numeri t_0 e y_0, esiste una ed una sola soluzione dell'equazione (1) che soddisfa la *condizione iniziale*

$$y(t_0) = y_0 \ . \tag{2}$$

Quanto appena affermato è il contenuto del teorema di esistenza ed unicità per le equazioni differenziali del primo ordine (l'enunciato preciso di questo teorema è piuttosto complesso e quindi lo omettiamo).

Si noti che la maggior parte delle equazioni differenziali non può essere risolto con formule esplicite ma solo numericamente, vale a dire utilizzando un apposito software computer per tracciare il grafico delle soluzioni. Tra le poche equazioni del primo ordine che si possono risolvere esplicitamente considereremo solo le equazioni a variabili separabili e le equazioni lineari.

Equazioni a variabili separabili. Un'equazione differenziale si dice *a variabili separabili* se può essere ricondotta alla forma

$$\dot{y} = f(y) \cdot g(t) \ . \tag{3}$$

Per risolvere quest'equazione, portiamo $f(y)$ a sinistra dell'uguale, e quindi calcolando gli integrali indefiniti (primitive) di entrambe i membri dell'equazione così utilizzando il cambio di variabile $y = y(t)$ per quello di sinistra:

$$\frac{\dot{y}}{f(y)} = g(t) \quad \Rightarrow \quad \int \frac{\dot{y}}{f(y)}\, dt = \int g(t)\, dt + c \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{f(y)} = \int g(t)\, dt + c$$

(la costante c è dovuta al fatto che la primitiva di una funzione è univocamente determinata a meno di una costante arbitraria). Supponendo di aver trovato una primitiva F di $1/f$ ed una primitiva G di g, otteniamo quindi

$$F(y) = G(t) + c \ . \tag{4}$$

Per concludere basta quindi esplicitare y. Supponendo di conoscere un'inversa H della funzione F, applichiamo la H ad entrambi i membri della (4), e siccome per la definizione di inversa si ha $H(F(y)) = y$, otteniamo infine la formula risolutiva

$$y(t) = H(G(t) + c) \ . \tag{5}$$

Abbiamo dunque una famiglia di soluzioni che dipende dal parametro c.

Concludiamo questo paragrafo con due osservazioni.

a) Nel procedimento spiegato sopra si suppone implicitamente che la funzione f non si annulli mai, in modo da poter liberamente dividere per $f(y)$. Nel caso che la funzione f si annulli per qualche valore y_0, si vede subito che la funzione costante $y(t) := y_0$ risolve l'equazione (3); le altre soluzioni si trovano con il metodo illustrato in precedenza.

b) Se oltre all'equazione (3) viene specificata anche una condizione iniziale tipo la (2), è possibile determinare il valore della costante c che appare nelle formule (4) e (5): ponendo $t = t_0$ nella (4) si ottiene infatti l'identità $F(y_0) = G(t_0) + c$ da cui si ricava $c = F(y_0) - G(t_0)$.

Equazioni lineari del primo ordine. Un'equazione del primo ordine si dice *lineare* se può essere ricondotta alla forma

$$\dot{y} + a(t)\, y = b(t) \ . \tag{6}$$

Per risolvere questa equazione la moltiplichiamo per il fattore $e^{A(t)}$ dove $A(t)$ è una qualunque primitiva della funzione $a(t)$. In questo modo il termine di sinistra dell'equazione coincide con la derivata del prodotto $e^{A(t)}y$:

$$e^{A(t)}\dot{y} + a(t)e^{A(t)}y = e^{A(t)}b(t) \quad \Rightarrow \quad \big(e^{A(t)}y\big)' = e^{A(t)}b(t) \ .$$

Quindi $e^{A(t)}y$ deve essere una primitiva di $e^{A(t)}b(t)$, vale a dire

$$e^{A(t)}y = \int e^{A(t)}b(t)\, dt + c$$

e dividendo per $e^{A(t)}$ otteniamo infine la formula risolutiva generale

$$y(t) = e^{-A(t)}\left[\int e^{A(t)}b(t)\, dt + c\right] \quad \text{con } c \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

Vale la pena di sottolineare alcuni casi particolari di questa formula: se la funzione $b(t)$ è identicamente nulla (nel qual caso l'equazione (6) si dice *omogenea*) allora la (7) diventa

$$y(t) = ce^{-A(t)} \quad \text{con } c \in \mathbb{R}. \tag{7'}$$

Se invece a è una costante e cioè non dipende da t (nel qual caso l'equazione (6) si dice *a coefficienti costanti*), allora la (7) diventa

$$y(t) = e^{-at}\left[\int e^{at}b(t)\, dt + c\right] \quad \text{con } c \in \mathbb{R}. \tag{7''}$$

Equazioni del secondo ordine. Si chiamano *equazioni differenziali del secondo ordine* tutte quelle che si possono ricondurre alla forma

$$\ddot{y} = f(t, y, \dot{y}) \ , \tag{8}$$

vale a dire quelle per cui si riesce ad esprimere la derivata seconda $\ddot{y}$ tramite una formula che coinvolge solamente t, y e $\dot{y}$.

Tipicamente le soluzioni dell'equazione differenziale (8) sono una famiglia di funzioni dipendente da *due* parametri. In questo caso il teorema di esistenza ed unicità dice che (sotto opportune ipotesi che non specifichiamo) scelti dei numeri t_0, y_0 e y_1, esiste una ed una sola soluzione dell'equazione (8) che soddisfa le condizioni iniziali

$$y(t_0) = y_0 \quad \text{e} \quad \dot{y}(t_0) = y_1 \ . \tag{9}$$

Equazioni lineari del secondo ordine. Tra le equazioni del secondo ordine ci limiteremo a considerare quelle *lineari*, vale a dire quelle che possono essere ricondotte alla forma

$$\ddot{y} + a(t)\,\dot{y} + b(t)\,y = c(t) \ . \tag{10}$$

Le funzioni $a(t)$ e $b(t)$ vengono talvolta chiamate *coefficienti* dell'equazione, mentre $c(t)$ viene detta *termine noto*.

L'equazione lineare (10) si dice *omogenea* se il termine noto $c(t)$ è identicamente nullo. Si dice invece *a coefficienti costanti* se a e b sono costanti, vale a dire non dipendono da t. Infine si chiama *equazione omogenea associata* associata alla (10) la stessa equazione differenziale con 0 al posto di $c(t)$.

Di fatto risolveremo solo le equazioni a coefficienti costanti omogenee ed quelle a coefficienti costanti non omogenee in cui il termine $c(t)$ ha una forma speciale.

Equazioni a coefficienti costanti omogenee. Consideriamo ora l'equazione omogenea a coefficienti costanti

$$\ddot{y} + a\dot{y} + by = 0 \ . \tag{11}$$

Cominciamo con due semplici osservazioni (da verificare per esercizio): a) se y è una soluzione della (11) allora, preso un qualunque numero α, anche la funzione αy è una soluzione della (11); b) se y_1 e y_2 sono soluzioni della (11) allora anche la somma $y_1 + y_2$ è una soluzione della (11).

Da queste due osservazioni segue che partendo da due soluzioni y_1 e y_2 dell'equazione (11) si ottiene una famiglia a due parametri di soluzioni ponendo

$$y := \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \quad \text{con } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}. \tag{12}$$

Per quanto detto sopra viene naturale pensare che quelle date dalla formula (12) siano *tutte* le soluzioni dell'equazione (11). In effetti è proprio così, a patto che y_1 e y_2 non siano una multipla dell'altra (altrimenti la formula (12) darebbe luogo a niente altro che i multipli di una sola funzione, vale a dire una famiglia di funzioni ad *un* parametro "mascherata" da famiglia a due parametri).

Per risolvere l'equazione (11) non ci resta quindi che trovarne due soluzioni che non siano una multipla dell'altra. Le cerchiamo tra le funzioni del tipo $y = e^{\lambda t}$ con λ parametro reale. In tala caso si ha $\dot{y} = \lambda e^{\lambda t}$ e $\ddot{y} = \lambda^2 e^{\lambda t}$, e sostituendo queste espressioni nel membro di sinistra della (11) otteniamo

$$(\lambda^2 + a\lambda + b)e^{\lambda t} = 0 \ .$$

Chiaramente questa uguaglianza è verificata per ogni t se il polinomio $\lambda^2 + a\lambda + b$ vale 0, e questo avviene quando λ è una delle sue due radici. Abbiamo dunque ottenuto le due soluzioni cercate.

Riassumendo, lo schema per la soluzione dell'equazioni lineare omogenea a coefficienti costanti (11) è il seguente: si scrive l'*equazione caratteristica* ad esso associata

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \tag{13}$$

e se ne calcolano le radici λ_1 e λ_2. Allora $e^{\lambda_1 t}$ e $e^{\lambda_2 t}$ sono due soluzioni della (11), e la soluzione generale è data da

$$y(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} \quad \text{con } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}. \tag{14}$$

Questo schema va bene se l'equazione (13) ammette due soluzioni reali distinte, ovvero quando il discriminante $\Delta = a^2 - 4b$ è strettamente positivo, ma va tuttavia opportunamente corretto negli altri casi.

Caso 1: il discriminante Δ è nullo e l'equazione (13) ammette un'unica soluzione reale λ. In tal caso una soluzione della (11) è $e^{\lambda t}$, mentre una seconda soluzione è $te^{\lambda t}$ (è facile verificare che questa è una soluzione, meno facile è capire da dove salta fuori). Pertanto la formula risolutiva diventa

$$y(t) = \alpha_1 e^{\lambda t} + \alpha_2 t e^{\lambda t} = e^{\lambda t}(\alpha_1 + \alpha_2 t) \quad \text{con } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}. \tag{14'}$$

Caso 2: il discriminante Δ è negativo e l'equazione (13) ammette due soluzioni *complesse* della forma $\lambda_{1,2} = s \pm \omega i$. In tal caso due soluzioni della (11) sono $e^{st}\cos(\omega t)$ e $e^{st}\sin(\omega t)$. Pertanto la formula risolutiva diventa

$$y(t) = e^{st}(\alpha_1 \cos(\omega t) + \alpha_2 \sin(\omega t)) \quad \text{con } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}. \tag{14''}$$

Concludiamo questo paragrafo con alcune osservazioni.

a) Per capire da dove vengono le soluzioni $e^{st}\cos(\omega t)$ e $e^{st}\sin(\omega t)$ utilizzate nella formula (14″), possiamo partire dalla soluzioni $y_1 := e^{\lambda_1 t}$ ed $y_2 := e^{\lambda_2 t}$. In questo caso $\lambda_1 t$ e $\lambda_2 t$ sono numeri complessi, ma si è visto in precedenza che è possibile definire l'esponenziale anche di un numero complesso, e per la precisione si ha

$$y_1 = e^{\lambda_1 t} = e^{st + \omega t i} = e^{st}\, e^{\omega t i} = e^{st}(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)) \ ,$$

e analogamente

$$y_2 = e^{\lambda_2 t} = e^{st}(\cos(-\omega t) + i\sin(-\omega t)) = e^{st}(\cos(\omega t) - i\sin(\omega t)) \ .$$

Ma allora

$$e^{st}\cos(\omega t) = \tfrac{1}{2}y_1 + \tfrac{1}{2}y_2 \quad \text{e} \quad e^{st}\sin(\omega t) = \tfrac{1}{2i}y_1 - \tfrac{1}{2i}y_2 \ ,$$

e siccome y_1 e y_2 risolvono la (11), per quanto detto sopra lo stesso vale per $e^{st}\cos(\omega t)$ e $e^{st}\sin(\omega t)$.

b) Dati due numeri reali α_1, α_2, indichiamo con r e θ le coordinate polari del punto del piano con coordinate cartesiane (α_2, α_1). Si può allora scrivere la soluzione (14″) come

$$y(t) = re^{st}\, \sin(\omega t + \theta) \ . \tag{14'''}$$

c) Il fatto che per trovare la soluzione generale di un'equazione lineare omogenea del secondo ordine basta trovare due soluzioni y_1 ed y_2 e poi applicare la formula (12) vale anche quando i coefficienti a e b non sono costanti. Quello che manca in questo caso è un metodo generale per trovare y_1 ed y_2.

Equazioni a coefficienti costanti non omogenee. Consideriamo ora l'equazione non omogenea a coefficienti costanti

$$\ddot{y} + a\dot{y} + b = c(t) \ . \tag{15}$$

Cominciamo con due semplici osservazioni (da verificare per esercizio): a) se $\tilde{y}$ risolve la (15) ed y_{om} risolve l'equazione omogenea associata (vale a dire la (11)), allora la somma $y := \tilde{y} + y_{\text{om}}$ risolve la (15); b) viceversa, se $\tilde{y}$ e y risolvono la (15) allora y si può scrivere come $y = \tilde{y} + y_{\text{om}}$ dove y_{om} risolve l'equazione omogenea associata – basta infatti verificare che la differenza $y - \tilde{y}$ risolve la (11).

Da queste due osservazioni segue che una volta trovata una particolare soluzione $\tilde{y}$ dell'equazione non omogenea (15), tutte le altre soluzioni possono essere ottenute aggiungendo ad $\tilde{y}$ una soluzione dell'equazione omogenea associata. In altre parole, la soluzione generale della (15) è data da

$$y = \tilde{y} + \text{soluzione eq. omogenea associata.} \tag{16}$$

Il problema a questo punto diventa quello di trovare almeno *una* soluzione dell'equazione non omogenea (15). Quando il termine noto $c(t)$ appartiene ad alcune particolari classi di funzioni elencate nella colonna di sinistra della tabella sottostante, è possibile trovare una soluzione della (15) nella corrispondente classe di funzioni nella colonna di destra, cose che semplifica molto la ricerca:

termine noto $c(t)$	**soluzione particolare** $\tilde{y}(t)$
costante	costante
polinomio di grado d	polinomio di grado d
multiplo di e^{mt}	ae^{mt} se e^{mt} non risolve l'eq. omog. associata ate^{mt} se e^{mt} risolve l'eq. omog. associata ma te^{mt} non la risolve at^2e^{mt} se e^{mt} e te^{mt} risolvono entrambe l'eq. omog. associata
multiplo di $\sin(\omega t)$	$a\sin(\omega t) + b\cos(\omega t)$ se $\sin(\omega t)$ e $\cos(\omega t)$ non risolvono l'eq. omog. ass. $t(a\sin(\omega t) + b\cos(\omega t))$ se $\sin(\omega t)$ e $\cos(\omega t)$ risolvono l'eq. omog. ass.
multiplo di $\sin(\omega t)$ più multiplo di $\cos(\omega t)$	come nel caso precedente
multiplo di $e^{mt}\sin(\omega t)$ più multiplo di $e^{mt}\cos(\omega t)$	$e^{mt}(a\sin(\omega t) + b\cos(\omega t))$ se $\sin(\omega t)$ e $\cos(\omega t)$ non risolvono l'eq. omog. ass. $te^{mt}(a\sin(\omega t) + b\cos(\omega t))$ se $\sin(\omega t)$ e $\cos(\omega t)$ risolvono l'eq. omog. ass.

Dunque la procedura per risolvere l'equazione non omogenea a coefficienti costanti, almeno nel caso in cui il termine noto appartiene ad una delle classi elencate sopra, è la seguente: prima si scrive e si risolve l'equazione omogenea associata, e poi si cerca una soluzione particolare dell'equazione non omogenea seguendo le indicazioni date in tabella.

Concludiamo questo paragrafo con alcuni esempi ed osservazioni.

a) Vediamo come si procede per risolvere l'equazione

$$\ddot{y} - 4\dot{y} + 4y = 3t + 1 \ . \tag{17}$$

L'equazione omogenea associata è $\ddot{y} - 4\dot{y} + 4y = 0$, l'equazione caratteristica è $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ ed ha due soluzioni coincidenti $\lambda_{1,2} = 2$. Quindi la soluzione generale dell'equazione omogenea associata è $y_{\text{om}} = e^{2t}(\alpha_1 + \alpha_2 t)$ con $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

Siccome il termine noto $3t+1$ è un polinomio di grado 1, la nostra tabella ci dice di cercare una soluzione dell'equazione non omogenea (17) tra i polinomi di grado 1, vale a dire della forma $\tilde{y} = at + b$. Sostituendo quest'espressione nell'equazione otteniamo $0 - 4a + 4(at + b) = 3t + 1$ ovvero $(4a - 3)t + (4b - 4a - 1) = 0$, e chiaramente questa identità è verificata per ogni t se i coefficiente $4a-3$ e $4b-4a-1$ sono entrambi nulli, ovvero per $a = 3/4$ e $b = 1$. Dunque $3t/4+1$ è una particolare soluzione della (17); si ottiene infine la soluzione generale aggiungendo tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata, vale a dire

$$y(t) = \frac{3t}{4} + 1 + e^{2t}(\alpha_1 + \alpha_2 t) \quad \text{con } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

b) Risolviamo l'equazione

$$\ddot{y} - y = 6e^{2t} \ . \tag{18}$$

L'equazione omogenea associata è $\ddot{y}-y = 0$, l'equazione caratteristica è $\lambda^2-1 = 0$ ed ha soluzioni $\lambda_{1,2} = \pm 1$. Quindi la soluzione generale dell'equazione omogenea associata è $y_{\text{om}} = \alpha_1 e^t + \alpha_2 e^{-t}$ con $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

Siccome il termine noto $6e^{2t}$ è un multiplo di e^{2t}, la nostra tabella ci dice di cercare una soluzione dell'equazione non omogenea (18) della forma $y = ae^{2t}$. Sostituendo quest'espressione nell'equazione otteniamo $4ae^{2t} - ae^{2t} = 6e^{2t}$ ovvero $(3a - 6)e^{2t} = 0$, e chiaramente questa identità è verificata per ogni t se il coefficiente $3a - 6$ è nullo, cioè per $a = 2$. Dunque $2e^{2t}$ è una soluzione della (18) e la soluzione generale è

$$y()t) = 2e^{2t} + \alpha_1 e^t + \alpha_2 e^{-t} \quad \text{con } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

c) Modifichiamo ora il termine noto dell'equazione nell'esempio precedente:

$$\ddot{y} - y = -2e^t \ . \tag{19}$$

In questo caso le funzioni del tipo $y = ae^t$ risolvono l'equazione omogenea associata e quindi non possono mai risolvere l'equazione non omogenea. la nostra tabella ci dice allora di cercare una soluzione particolare della (18) tra le funzioni del tipo $y = ate^t$. Sostituendo quest'espressione nell'equazione otteniamo $a(t + 2)e^t - ate^t = -2e^t$ ovvero $(2a + 2)e^t = 0$, e chiaramente questa identità è verificata per ogni t se il coefficiente $2a + 2$ è nullo, ovvero per $a = -1$. Dunque $-te^t$ è una particolare soluzione della (19), e la soluzione generale è

$$y(t) = -te^t + \alpha_1 e^t + \alpha_2 e^{-t} \quad \text{con } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

d) Se il termine noto $c(t)$ si scrive come la somma di due termini noti $c_1(t)$ e $c_2(t)$ per cui si sanno trovare delle soluzioni particolari y_1 e y_2 (per esempio usando la solita tabella), allora una soluzione particolare per il termine noto $c(t)$ è data dalla somma $y_1 + y_2$. Per esempio, una soluzione particolare per l'equazione $\ddot{y} + 2y = 4t - 3e^t$ è data dalla somma di una soluzione particolare di $\ddot{y} + 2y = 4t$, vale a dire $2t$, e di una soluzione particolare di $\ddot{y} + 2y = -3e^t$, vale a dire $-e^t$.

Ancora sulle equazioni lineari del primo ordine. La formula risolutiva (7) per le equazioni differenziali lineari del primo ordine è molto generale ma richiede di calcolare un integrale indefinito piuttosto complicato.

Per questa ragione, nel caso dell'equazione lineare a coefficienti costanti del primo ordine $\dot{y} + ay = b(t)$ può essere più semplice utilizzare una formula risolutiva analoga a quella per le equazioni lineari a coefficienti costanti del secondo ordine, vale a dire

$$y(t) = \tilde{y}(t) + ce^{-at} \quad \text{con } c \in \mathbb{R},$$

dove ce^{-at} è la soluzione dell'equazione omogenea associata $\dot{y} + ay = 0$ e $\tilde{y}$ è una soluzione particolare dell'equazione non omogenea. Quest'ultima può essere trovata seguendo la stessa procedura utilizzata per le equazioni del secondo ordine (in questo caso il termine noto è $b(t)$).

Esercizi

1. Verificare le seguenti affermazioni (senza ricorrere ad alcuna formula risolutiva):
a) $y(t) := \sin^2 t$ risolve l'equazione $\dot{y}^2 = 4y(1-y)$;
b) $y(t) := (t+c)^{-2}$ risolve l'equazione $\dot{y}^2 = 4y^3$ per ogni $c \in \mathbb{R}$;
c) $y(t) := \log t$ risolve l'equazione $\ddot{y}\, e^y + t^2 \dot{y}^3 = 0$;
d) $y(t) := ce^{-t^2/2}$ risolve l'equazione $\ddot{y} = (t^2-1)y$ per ogni $c \in \mathbb{R}$.

2. Determinare per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $y(t) := t^a$ risolve l'equazione $t^2\ddot{y} + 4y = 0$.

3. Determinare per quali $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione $y(t) := ae^{bt}$ risolve l'equazione $\ddot{y} - 4y = e^t$.

4. Per ciascuna delle seguenti equazioni differenziali dire se sono a variabili separabili, lineari del primo ordine, lineari del secondo ordine, o altro; nel caso di quelle lineari specificare se sono omogenee e/o a coefficienti costanti:
$$\text{a) } \dot{y}y^2 = t\ ;\quad \text{b) } \dot{y} - 2y^2 = t\ ;\quad \text{c) } \dot{y} - 2y^2 = 0\ ;\quad \text{d) } \ddot{y} = ty + e^t\ ;\quad \text{e) } \ddot{y} + t\dot{y} + 3t^2 y = 0\ ;$$
$$\text{f) } \ddot{y} = t^2 y\ ;\quad \text{g) } \ddot{y} = 3y + 4\dot{y}\ ;\quad \text{h) } \dot{y} = -2y + e^t\ ;\quad \text{i) } \dot{y} = y^2 + t^2\ ;\quad \text{l) } \ddot{y} = ty\ .$$

5. Risolvere le seguenti equazioni differenziali a variabili separabili:
$$\text{a) } \dot{y} = \frac{t}{y}\ ;\quad \text{b) } \dot{y} = y^2 + 1\ ;\quad \text{c) } \dot{y} = e^y \cos t\ ;\quad \text{d) } \dot{y} = e^t y\ ;\quad \text{e) } \dot{y} = t^2 y^2\ .$$

6. a) Per ciascuna delle equazioni differenziali nell'esercizio precedente trovare la soluzione che soddisfa la condizione iniziale $y(0) = 1$.
b) Cercare le soluzioni delle equazioni d) ed e) che soddisfano la condizione iniziale $y(1) = 0$.

7. Si consideri l'equazione a variabili separabili $\dot{y} = f(y)\, g(t)$ e un numero y_0 tale che $f(y_0) = 0$. Verificare che la soluzione dell'equazione che soddisfa la condizione iniziale $y(0) = y_0$ è la funzione costante $y(t) := y_0$.

8. Risolvere le seguenti equazioni lineari del primo ordine utilizzando la formula (7):
$$\text{a) } \dot{y} - 4y = 8\ ;\quad \text{b) } \dot{y} + 2ty = 0\ ;\quad \text{c) } \dot{y} + \frac{y}{t+1} = 6t\ ;\quad \text{d) } \dot{y} - e^t y = 0\ .$$

9. Per ciascuna delle equazioni differenziali nell'esercizio precedente trovare la soluzione che soddisfa la condizione iniziale $y(0) = 1$.

10. Verificare direttamente – vale a dire senza utilizzare alcuna formula risolutiva – le seguenti proprietà delle equazioni lineari *omogenee* del primo e secondo ordine (cioè quelle della forma $\dot{y} + a(t)\, y = 0$ oppure $\ddot{y} + a(t)\, \dot{y} + b(t)\, y = 0$):
a) Se y è una soluzione dell'equazione allora ogni multiplo di y è pure una soluzione;
b) Se y_1 e y_2 sono soluzioni dell'equazione la somma $y_1 + y_2$ è pure una soluzione;
c) se a e b sono costanti, la funzione $e^{\lambda t}$ è una soluzione se λ risolve l'equazione caratteristica associata (vale a dire $\lambda + a = 0$ per quella del primo ordine e $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ per quella del secondo ordine).

11. Per ciascuna delle seguenti equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti, scrivere l'equazione caratteristica, risolverla, e quindi determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale:

$$\text{a) } \ddot{y} - 3\dot{y} + 2y = 0 \ ; \quad \text{b) } \ddot{y} - 2\dot{y} - 3y = 0 \ ; \quad \text{c) } \ddot{y} + 2\dot{y} + 5y = 0 \ ; \quad \text{d) } \ddot{y} + 9y = 0 \ ;$$

$$\text{e) } \ddot{y} + 4\dot{y} + 4y = 0 \ ; \quad \text{f) } \ddot{y} - 4y = 0 \ ; \quad \text{g) } \dot{y} + 2y = 0 \ ; \quad \text{h) } \dot{y} - 3y = 0 \ .$$

12. Trovare le soluzioni dei seguenti problemi ai dati iniziali:

$$\text{a) } \begin{cases} \dot{y} + y = 0 \\ y(0) = 2 \end{cases} ; \quad \text{b) } \begin{cases} \ddot{y} - 4y = 0 \\ y(0) = 2 \\ \dot{y}(0) = 0 \end{cases} ; \quad \text{c) } \begin{cases} \ddot{y} + y = 0 \\ y(0) = -2 \\ \dot{y}(0) = 1 \end{cases} ; \quad \text{d) } \begin{cases} \ddot{y} + 2\dot{y} + y = 0 \\ y(0) = 1 \\ \dot{y}(0) = 0 \end{cases} .$$

13. a) Verificare che la funzione te^{2t} risolve l'equazione lineare omogenea $\ddot{y} - 4\dot{y} + 4y = 0$.
b) Verificare che se l'equazione caratteristica $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ ha due soluzioni coincidenti λ allora $te^{\lambda t}$ risolve l'equazione differenziale $\ddot{y} + a\dot{y} + by = 0$.

14. Verificare direttamente che le funzioni $e^t \sin t$ e $e^t \cos t$ risolvono l'equazione $\ddot{y} - 2\dot{y} + 2y = 0$.

15. a) Trovare i valori del parametro a per cui la funzione $y(t) := t^a$ risolve l'equazione lineare omogenea a coefficienti *non costanti*

$$\ddot{y} - \frac{2\dot{y}}{t} + \frac{2y}{t^2} = 0 \ .$$

b) Scrivere la soluzione generale di quest'equazione.
c) Trovare la soluzione che soddisfa le condizioni iniziali $y(1) = 0$ e $\dot{y}(1) = 1$.

16. a) Dati a_1, a_2 numeri reali, indichiamo con r e θ le coordinate polari del punto del piano con coordinate cartesiane (a_2, a_1). Dimostrare che per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$a_1 \cos x + a_2 \sin x = r \ \sin(x + \theta) \ .$$

b) Utilizzare quanto fatto al punto a) per ottenere la formula (14‴).
c) Utilizzare quanto fatto al punto a) disegnare il grafico di $y(t) := \sin t + \sqrt{3} \ \cos t$.
d) Utilizzare quanto fatto al punto a) disegnare il grafico di $y(t) := e^{-t}(\sin t + \sqrt{3} \ \cos t)$.

17. Trovare una soluzione particolare per ciascuna delle seguenti equazioni lineari non omogenee utilizzando le indicazioni della tabella data sopra (per le prime equazioni queste indicazioni sono esplicitate tra parentesi):
a) $\ddot{y} - \dot{y} - y = 3e^{2t}$ [cercare y della forma $y = ae^{2t}$];
b) $\ddot{y} - 3\dot{y} + 2y = e^t$ [cercare y della forma $y = ate^t$];
c) $\dot{y} - y = 4e^{3t}$ [cercare y della forma $y = ae^{3t}$];
d) $\dot{y} + 2y = e^{-2t}$ [cercare y della forma $y = ate^{-2t}$];
e) $\ddot{y} - y = 9\sin(2t)$ [cercare y della forma $y = a\cos(2t) + b\sin(2t)$];
f) $\dot{y} + y = 3t$ [cercare y della forma $y = a + bt$];
g) $\ddot{y} + 2\dot{y} + 2y = e^{-t}$;
h) $\ddot{y} - 2\dot{y} + y = e^t$;
i) $\dot{y} + 2y = 4\cos(2t)$;

l) $\ddot{y} + 3y = 6$.

18. Siano y_1 e y_2 rispettivamente soluzioni delle equazioni lineari non omogenee

$$\ddot{y} + a(t)\,\dot{y} + b(t)\,y = c_1(t) \quad \text{e} \quad \ddot{y} + a(t)\,\dot{y} + b(t)\,y = c_2(t)\ .$$

Verificare che $y_1 + y_2$ risolve l'equazione

$$\ddot{y} + a(t)\,\dot{y} + b(t)\,y = c_1(t) + c_2(t)\ .$$

19. a) Trovare la soluzione generale dell'equazione $\dot{y} + 2y = 0$.
b) Trovare una soluzione particolare dell'equazione $\dot{y} + 2y = 2t - 3e^t$. [*Si suggerisce di cercare separatamente una soluzione di* $\dot{y} + 2y = 2t$ *ed una di* $\dot{y} + 2y = -3e^t$, *e poi applicare quanto fatto nell'esercizio precedente.*]
c) Trovare la soluzione generale dell'equazione $\dot{y} + 2y = 2t - 3e^t$.

20. Si consideri l'equazione lineare del primo ordine

$$\dot{y} + 4y = 16t\ . \tag{20}$$

a) Risolvere l'equazione omogenea associata alla (20).
a) Trovare una soluzione particolare della (20).
c) Scrivere la soluzione generale della (20).
d) Trovare la soluzione della (20) che soddisfa la condizione iniziale $y(0) = 1$.

21. Si consideri l'equazione lineare del secondo ordine

$$\ddot{y} + y = e^{-2t} \tag{21}$$

a) Risolvere l'equazione omogenea associata alla (21).
a) Trovare una soluzione particolare della (21).
c) Scrivere la soluzione generale della (21).
d) Trovare la soluzione della (21) che soddisfa le condizioni iniziali $y(0) = 1$ e $\dot{y}(0) = 0$.

22. Si consideri l'equazione lineare del secondo ordine

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + 2y = \sin t \tag{22}$$

a) Risolvere l'equazione omogenea associata alla (22).
a) Trovare una soluzione particolare della (22).
c) Scrivere la soluzione generale della (22).

23. Trovare le soluzioni dei seguenti problemi ai dati iniziali:

$$\text{a)} \begin{cases} \dot{y} = y^2 \cos t \\ y(0) = 1 \end{cases} ; \quad \text{b)} \begin{cases} \ddot{y} - y = 2t \\ y(0) = 0 \\ \dot{y}(0) = 0 \end{cases} ; \quad \text{c)} \begin{cases} \dot{y} + 2y = 4 \\ y(0) = 1 \end{cases} ; \quad \text{d)} \begin{cases} \dot{y} = 3t^2(1 + y^2) \\ y(0) = 1 \end{cases} .$$

24. Utilizzando il cambio di variabile $y = tz$ risolvere l'equazione differenziale

$$\dot{y} = \frac{y}{t} + \frac{t}{2y}\ .$$

Richiamo delle nozioni fondamentali

Dato un insieme finito X (insieme degli eventi elementari), una distribuzione di probabilità su X è una funzione che ad ogni evento elementare $x \in X$ assegna un numero reale *positivo* $P(x)$ in modo tale che la somma di $P(x)$ per tutti gli $x \in X$ sia 1.

La probabilità $P(A)$ di un evento non elementare A, vale a dire un qualunque sottoinsieme di X, è la somma delle probabilità $P(x)$ di tutti gli eventi elementari $x \in A$. Ovviamente $P(X) = 1$; si pone inoltre $P(\varnothing) = 0$.

Un evento con probabilità 1 si dice *certo*, un evento con probabilità 0 si dice *impossibile*. Gli eventi A e B si dicono *incompatibili* quando $P(A \cap B) = 0$, cosa che si verifica ad esempio quando l'intersezione $A \cap B$ è vuota.

Una distribuzione di probabilità si dice *uniforme* se tutti gli eventi elementari hanno la stessa probabilità, vale a dire se $P(x) := 1/\#(X)$ per ogni $x \in X$, dove con $\#(X)$ si indica il numero di elementi di X.

Operazioni insiemistiche e probabilità. Indichiamo con A^c l'evento complementare ad A, ovvero $A^c := X - A$; allora

$$P(A^c) = 1 - P(A) \ .$$

Inoltre

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \ .$$

In particolare quando A e B sono eventi incompatibili si ha che

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \ .$$

Più in generale, data una famiglia di eventi $A_1, \dots, A_n$ *a due a due incompatibili* si ha che

$$P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) \ . \tag{1}$$

Probabilità condizionale. Dati due eventi A e B con $P(B) \neq 0$, la *probabilità condizionale* di A sapendo B è data da

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \ .$$

Ricordiamo la *formula di Bayes*: dati due eventi A e B con probabilità non nulla si ha

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)} = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B|A) \cdot P(A) + P(B|A^c) \cdot P(A^c)} \ .$$

Eventi indipendenti. Due eventi A e B si dicono *indipendenti* se

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \ .$$

Usando questa definizione e quella di probabilità condizionale si ottiene che $P(A|B) = P(A)$ e $P(B|A) = P(B)$ – supponendo ovviamente che le probabilità condizionali $P(A|B)$ e $P(B|A)$ siano ben definite, vale a dire che $P(B)$ e $P(A)$ siano diverse da zero.

Una famiglia di due o più eventi si dicono indipendenti se prendendone un qualunque sottoinsieme la probabilità dell'intersezione degli eventi presi è uguale al prodotto delle loro probabilità. Per esempio, tre eventi A, B, C sono indipendenti se si verificano le seguenti condizioni:

a) $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$,
b) $P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$,

c) $P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$,
d) $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$.

Si noti che le condizioni a), b), c) equivalgono a dire che gli insiemi A, B, C sono a due a due indipendenti, ma da sole non bastano a garantire l'indipendenza.

Come caso particolare di quanto detto si ha che per un insieme di eventi *indipendenti* $A_1, \dots, A_n$

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdots P(A_n) \ . \tag{2}$$

Si può inoltre far vedere che se $A_1, \dots, A_n$ sono indipendenti allora anche gli eventi complementari $A_1^c, \dots, A_n^c$ sono tra loro indipendenti, e siccome l'unione $A_1 \cup \cdots \cup A_n$ è il complementare dell'intersezione $A_1^c \cap \cdots \cap A_n^c$, usando la (2) otteniamo la seguente formula per la probabilità dell'*unione* di eventi indipendenti:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) &= 1 - P(A_1^c \cap \cdots \cap A_n^c) \\ &= 1 - P(A_1^c) \cdot P(A_2^c) \cdots P(A_n^c) \\ &= 1 - (1 - P(A_1)) \cdot (1 - P(A_2)) \cdots (1 - P(A_n)) \ . \end{aligned} \tag{3}$$

Si noti che questa formula differisce dalla (1), che infatti si applica solo nel caso di eventi incompatibili. Tuttavia se si svolge il prodotto nella terza riga della (3) si ottiene la somma a destra dell'uguale nella (1) più altri addendi dati dal prodotto di almeno due fattori del tipo $P(A_i)$; in particolare, se le probabilità $P(A_i)$ sono molto piccole, questi addendi possono essere trascurati almeno in prima approssimazione. Dunque, nel caso che gli eventi A_i siano indipendenti ed abbiano probabilità piccola, la formula (1) risulta essere una buona approssimazione della (3).

Disposizioni, permutazioni e combinazioni. Il numero di *disposizioni con ripetizione* di k oggetti scelti tra n corrisponde al numero di sigle di k caratteri che si possono scrivere utilizzando un alfabeto di n lettere, ed è uguale a n^k.

Il numero di *disposizioni senza ripetizione* di k oggetti scelti tra n – indicato con $D_{n,k}$ – corrisponde al numero di sigle di k caratteri *tutti diversi* che si possono scrivere utilizzando un alfabeto di n lettere, ed è dato dalla formula

$$D_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

(si suppone chiaramente che k sia minore di n; si ricordi che convenzionalmente $0! := 1$).

Il numero di *permutazioni* di k oggetti indica il numero dei diversi modi di ordinare k oggetti distinti, e quindi corrisponde al numero di sigle che si possono ottenere a partire da k lettere distinte assegnate; tale numero coincide quindi con $D_{k,k} = k!$.

Infine il numero di *combinazioni* di k oggetti scelti tra n – indicato con $C_{n,k}$ – è il numero di modi di scegliere k oggetti tra n oggetti distinti senza tener conto dell'ordine in cui sono stati scelti, ed è dato dalla formula

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{k!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k} \ .$$

Il numero di combinazioni $C_{n,k}$ coincide con il *coefficiente binomiale* $\binom{n}{k}$.

Eventi ripetuti. Consideriamo un "esperimento" con probabilità di successo p (per esempio lanciamo un dado e per "successo" intendiamo che esce il numero cinque, per cui $p = 1/6$), e supponiamo di ripeterlo n volte in modo indipendente, cioè assicurandoci che il risultato di ciascun esperimento non influisca sugli altri (questo dovrebbe essere il caso se ad esempio lanciamo un dado più volte). Allora la probabilità di ottenere k successi su n ripetizioni è

$$P = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \ .$$

Esercizi

1. Si prende un numero intero a caso tra 10 e 99 (inclusi).
a) Qual è la probabilità che la prima cifra sia pari?
b) Qual è la probabilità che la seconda cifra sia pari?
b) Qual è la probabilità che almeno una delle due cifre sia pari?

2. Si estrae una biglia a caso da un sacchetto che ne contiene 10 bianche, 6 rosse e 4 nere. Indicando con $X := \{b, r, n\}$ l'insieme dei possibili risultati (eventi elementari), qual è la probabilità di ciascuno di essi?

3. Un sacchetto contiene 8 biglie nere ed un certo numero di biglie bianche. A esperimenti fatti si sa che estraendo a caso una biglia la probabilità che sia bianca è $P = 3/5$. Quante sono le biglie bianche?

4. Per il lancio di un dado consideriamo i seguenti eventi non elementari: $A :=$"esce un numero pari" e $B :=$"esce un numero minore o uguale a 4". Scrivere ciascuno dei seguenti eventi in termini di eventi elementari, calcolarne la probabilità, e dire se è incompatibile con A o meno:
$$\text{a) } A \ ; \quad \text{b) } B \ ; \quad \text{c) } A^c \ ; \quad \text{d) } A \cap B \ ; \quad \text{e) } A \cup B \ ; \quad \text{f) } A^c \cap B^c \ ; \quad \text{g) } (A \cup B)^c \ .$$
[*Per esempio: c)* $A^c = \{1, 3, 5\}$.]

5. Scrivere ciascuno dei seguenti eventi in termini degli eventi A e B descritti nell'esercizio precedente usando le usuali operazioni insiemistiche:
a) "esce un numero dispari"; b) "esce il 2 o il 4"; c) "esce l'1 o il 3";
d) "esce un numero diverso da 5"; d) "esce il 5"; f) "esce il 6".
[*Per esempio: b) "esce il 2 o il 4"*$= A \cap B$.]

6. Calcolare la probabilità che, tirando due dadi, la somma sia: a) 3; b) 6; c) 10 o più.

7. Su tre facce di un dado è riportata la lettera a, su due la lettera b e sull'ultima la lettera c. Quale insieme di eventi elementari e quale distribuzione di probabilità conviene usare per descrivere i lanci di questo dado?

8. Si lanciano due dadi uguali a quello descritto nell'esercizio precedente. Quale insieme di eventi elementari e quale distribuzione di probabilità conviene usare per descrivere i risultati di tali lanci?

9. Dato l'insieme degli eventi elementari $X := \{a, b, c, d, e\}$ e due numeri reali p, q, si pone $P(a) = P(b) := p$ e $P(c) = P(d) = P(e) := q$.
a) Se $p = 1/4$, per quali q la funzione P è una distribuzione di probabilità?
b) Per quali p e q la funzione P è una distribuzione di probabilità?

10. Si costruiscono due dadi uguali a forma di parallelepipedo con base quadrata ed altezza leggermente diversa dal lato di base. Sulle due basi quadrate di ciascun dado ci sono i

numeri $5, 6$ e sulle altre quattro facce i numeri $1, 2, 3, 4$. Tirando i due dadi più volte, si osserva che la probabilità di ottenere una somma maggiore o uguale a 11 è $3/25$. Calcolare $P(x)$ per $x = 1, 2, \dots, 6$.

11. Indichiamo con X l'insieme di tutte le sigle di 4 caratteri presi tra le lettere A, B, C, D, E, F.
a) Quante sono le sigle in X?
b) Quante delle sigle in X non contengono due lettere uguali?
c) Quante delle sigle in X non contengono due lettere uguali consecutive?
d) Si estrae una sigla a caso in X: qual è la probabilità che le lettere siano tutte diverse?

12. a) Quanti sono i numeri interi di 4 cifre che non iniziano per zero?
b) Tra questi, quanti sono quelli che non contengono due cifre uguali?

13. a) Quanti sono i numeri interi n compresi tra 1 e 999 tali che ogni cifra è strettamente maggiore della successiva (leggendo da sinistra a destra)?
b) Come sopra, supponendo però che n sia compreso tra 1 e 671.

14. a) Quanti sono i numeri interi di 3 cifre distinte comprese tra 1 e 7 (inclusi)?
b) Tra questi, quanti sono quelli le cui cifre sono in ordine crescente se lette da sinistra a destra? [*Si noti che prese tre cifre distinte c'è un solo modo di disporle in ordine crescente.*]

15. Dato n intero positivo, si considerino tutte le sequenze di n lettere prese tra A, B, C, D, E che soddisfano le seguenti condizioni: le lettere A e B sono sempre seguite da B, C o D, mentre C, D ed E sono seguite da A, D o E. Quante sono tali sequenze?

16. a) Quante sono le possibili sigle formate da due lettere dell'alfabeto italiano seguite da quattro cifre diverse da zero?
b) Tra queste sigle, quante sono quelle con lettere tutte diverse?
c) Tra queste sigle, quante sono quelle con lettere e cifre tutte diverse?
d) Quante sono le sigle formate da due lettere e quattro cifre diverse da zero disposte in un qualunque ordine?

17. Quante sigle di 7 lettere si possono scrivere utilizzando 3 volte la lettera T e 4 volte la lettera C? [*Si osservi che scrivere una di queste sigle equivale a scegliere le* 3 *posizioni (tra le* 7 *a disposizione) in cui si mette le lettera* T.]

18. Si lancia una moneta 7 volte. Calcolare la probabilità di ottenere:
a) 3 teste seguite da 4 croci;
b) 4 croci seguite da 3 teste;
d) 3 teste e 4 croci in un qualunque ordine.

19. Si estrae un numero a caso da un sacchetto che contiene i numeri $1, 2, \dots, 7$.
a) Qual è la probabilità che escano i numeri 2, 4 e 7 in quest'ordine?
a) Qual è la probabilità che escano i numeri 2, 4 e 7 ma non necessariamente in quest'ordine?

20. a) Sia X l'insieme dei numeri interi compresi tra 1 e 24 (inclusi). Si sa che tra i numeri in

X, quelli pari hanno tutti probabilità 1/36 e quelli dispari hanno probabilità uguale. Qual è la probabilità dei numeri dispari?
b) Inventare una situazione "reale" per cui lo spazio degli eventi elementari e la relativa distribuzione di probabilità sono quelli appena descritti.

21. Sia x un numero compreso tra 1 e 24 preso a caso con la probabilità descritta nell'esercizio precedente. Calcolare la probabilità dei seguenti eventi:
a) x è dispari;
b) x è pari;
c) x è compreso tra 1 e 6 (inclusi);
d) x è un multiplo di 4;
e) x è un multiplo di 6.

22. Per ogni coppia di eventi nell'esercizio precedente dire se sono indipendenti o meno.

23. Far vedere che nel lancio di un dado gli eventi "esce un numero dispari" e "esce un multiplo di 3" sono indipendenti.

24. Si estrae a caso una sigla composta da 5 lettere dell'alfabeto italiano. Calcolare la probabilità dei seguenti eventi:
a) la sigla inizia con aa;
b) la sigla termina con z;
c) la sigla contiene solo vocali;
d) la sigla contiene solo consonanti;
e) la sigla contiene lettere tutte diverse.

25. Per ogni coppia di eventi elencati nell'esercizio precedente dire se sono indipendenti o meno.

26. Siano A e B eventi con probabilità non nulla. Dimostrare che le seguenti affermazioni sono equivalenti: a) A e B sono indipendenti; b) $P(A|B) = P(A)$; c) $P(B|A) = P(B)$.

27. Dimostrare che se A e B sono eventi indipendenti allora anche le seguenti coppie di eventi sono indipendenti: a) A^c e B; b) A e B^c; c) A^c e B^c.
[*Per dimostrare a) si osservi che* $P(A^c|B) = 1 - P(A|B) = 1 - P(A) = P(A^c)$ *e si usi quindi l'esercizio precedente.*]

28. Dati due eventi indipendenti A e B dimostrare che vale la formula (3), vale a dire
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) = 1 - (1 - P(A))(1 - P(B)) \ .$$

29. Dati gli eventi A, B e C, far vedere che
a) $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$ (supponendo $P(B) > 0$);
b) $P(A) = P(A|B) \cdot P(B) + P(A|B^c) \cdot P(B^c)$ (supponendo $P(B), P(B^c) > 0$);
c) $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|A \cap B)$ (supponendo $P(A \cap B) > 0$).

30. Si estraggono due biglie a caso da un sacchetto che ne contiene 8 bianche e 4 nere. Calcolare la probabilità che la prima biglia estratta sia bianca e la seconda sia nera.

31. Si estraggono due biglie a caso da un sacchetto che ne contiene 10 bianche e 4 nere. Calcolare la probabilità che siano:
a) entrambe bianche;
b) la prima nera e la seconda bianca;
c) una nera ed una bianca;
d) almeno una bianca.

32. Si estraggono tre biglie a caso da un sacchetto che ne contiene 10 bianche e 6 nere. Qual è la probabilità che siano:
a) tutte e tre nere;
b) due nere ed una bianca.

33. Un sacchetto contiene 5 biglie nere ed un certo numero di biglie bianche. A esperimenti fatti si sa che estraendo a caso due biglie la probabilità che *almeno una* sia bianca è $P = 9/11$. Quante sono le biglie bianche?

34. In un certo gioco a premi c'è un mazzo di 10 buste indistinguibili, di cui 9 contengono cinque euro, mentre 1 ne contiene cento. Il concorrente sceglie una prima busta: se questa è quella dei cento euro viene rimessa nel mazzo con le altre, altrimenti viene messa da parte. A questo punto il concorrente sceglie una seconda busta dal mazzo e la sua vincita consiste di quel che c'è dentro. Qual è la probabilità di vincere cento euro in questo gioco?

35. Si estraggono a caso 5 numeri distinti compresi tra 1 e 90 (estrazione del lotto). Calcolare la probabilità che
a) i numeri usciti siano 11, 23, 37, 39 e 75 (non necessariamente in questo ordine);
b) tra i cinque numeri ci sia il 71;
c) tra i cinque numeri ci siano 1, 22 e 37.

36. Si estraggono 3 carte a caso da un mazzo di 52. Calcolare la probabilità che escano
a) il due, il tre ed il cinque di cuori in quest'ordine;
b) il due, il tre ed il cinque di cuori anche se non in quest'ordine;
c) un due, un tre ed un cinque in un qualunque ordine.

37. Si estraggono 4 carte a caso da un mazzo di 52. Calcolare la probabilità che escano
a) i quattro assi (poker d'assi);
b) quattro carte dello stesso valore (poker);
c) quattro carte dello dello stesso seme (colore);
d) due carte di un valore e due di un altro (doppia coppia).

38. Si estraggono due numeri a caso da un sacchetto che contiene tutti gli interi da 1 a 90.
a) Qual è la probabilità che i due numeri siano consecutivi?
b) Qual è la probabilità che il secondo numero estratto sia il doppio del primo?
c) Qual è la probabilità che i due numeri siano uno il doppio dell'altro?

39. I 20 studenti di una classe vengono suddivisi in gruppi di 5 per svolgere un certo lavoro. Per formare i gruppi il docente estrae a caso i nomi degli studenti da un busta: i primi cinque estratti formano il primo gruppo, i secondi cinque il secondo gruppo e così via. Qual è la probabilità che Andrea e Barbara finiscano nello stesso gruppo?

40. Consideriamo i seguenti eventi nel lancio di due dadi: $A :=$"il primo dado è pari", $B :=$"il secondo dado è pari", $C :=$"la somma dei due dadi è pari". Verificare che:
a) questi tre eventi sono a due a due indipendenti;
b) questi tre eventi non sono complessivamente indipendenti.

41. Si lancia un dado finché non esce un sei. Calcolare la probabilità che:
a) servano almeno di 4 tiri;
b) servano esattamente 4 tiri;
c) servano almeno n tiri;
d) non esca mai un sei.

42. Da una statistica fatta sugli abitanti (adulti) del centro e della periferia della città di K risulta che tra i primi il 50% possiede un'auto, mentre tra i secondi tale percentuale sale al 90%. Si sa inoltre che gli abitanti della periferia sono 5 volte quelli del centro. Del signor X si sa solo che possiede un'auto; qual è allora la probabilità che viva in centro?

43. Una certa malattia si manifesta solo in presenza di un particolare gene, e le statistiche dicono che, tra le persone che hanno questo gene, la percentuale di quelle che effettivamente si ammalano entro i primi quarant'anni di vita è pari all'80%. Per via della storia clinica della sua famiglia, la probabilità che alla nascita il signor X avesse questo gene era esattamente del 50%. Sapendo però che il signor X è arrivato all'età di quarant'anni senza ammalarsi, qual è la probabilità che egli abbia effettivamente il gene problematico?

44. In una scuola, il 30% degli studenti sono figli unici, e tra questi il 55% sono maschi, mentre la percentuale dei maschi cala al 45% tra gli studenti che non sono figli unici. Presa una studentessa a caso, qual è la probabilità che sia figlia unica?

45. Un certo dispositivo si compone di due parti, e si sa che la probabilità che la prima si guasti nel primo anno di utilizzo è del 4%, mentre per la seconda la probabilità è del 6%.
a) Calcolare la probabilità P che dopo un anno il dispositivo non abbia ancora avuto bisogno di riparazioni, supponendo che l'eventualità di un guasto della prima componente sia indipendente da quella della seconda.
b) Cosa si può dire di certo su P se non si presuppone l'indipendenza?

46. Si trasmette via radio un messaggio di 100 caratteri, e si sa che la probabilità di errore nella trasmissione di ciascun carattere è uguale a 10^{-6}. Supponendo che gli eventuali errori di trasmissione siano indipendenti, calcolare la probabilità che il messaggio non sia ricevuto correttamente.

47. Nel contesto dell'esercizio precedente, supponiamo che la stazione ricevente abbia un sistema automatico in grado di correggere il messaggio ricevuto se nella trasmissione viene fatto un solo errore. Qual è la probabilità che ciononostante il messaggio alla fine non sia

ricevuto correttamente?

48. Calcolare la probabilità che lanciando 9 monete si verifichino i seguenti eventi:
a) escono esattamente 6 teste;
b) escono almeno 8 teste;
c) escono almeno 2 teste;
d) escono almeno 5 teste.
[*Per c) conviene calcolare la probabilità dell'evento complementare, cioè che esca al più una testa; la probabilità dell'evento d) è* 1/2 *e può essere ottenuta senza quasi fare calcoli.*]

49. Calcolare la probabilità che lanciando 5 dadi si verifichino i seguenti eventi:
a) escono esattamente 2 tre;
b) non esce nessun sei;
c) escono esattamente 3 numeri pari;
d) almeno 4 dadi sono maggiori o uguali a cinque.

50. Verificare le seguenti proprietà dei coefficienti binomiali:
a) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$;
b) $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$;
c) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$;
d) $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$.

51. a) Dati n e k numeri interi tali che $0 \leq k < \frac{1}{2}(n-1)$, dimostrare che $\binom{n}{k} < \binom{n}{k+1}$.
b) Dati n e k numeri interi tali che $\frac{1}{2}(n-1) < k < n$, dimostrare che $\binom{n}{k} > \binom{n}{k+1}$.
c) Dimostrare che per ogni n pari il valore massimo di $\binom{n}{k}$ si ha per $k := n/2$.
d) Dimostrare che lanciando un numero pari n di monete, il numero di teste che è più probabile ottenere è $n/2$.
e) Dimostrare che la probabilità di ottenere $n/2$ teste lanciando un numero pari n di monete tende a 0 quando $n \to +\infty$.

52. Sono dati quattro numeri interi positivi n, n_1, n_2, n_3 con $n_1 + n_2 + n_3 = n$. Dimostrare che il numero di modi di ripartire n oggetti distinti in tre gruppi, in modo che il primo gruppo ne contenga n_1, il secondo n_2 ed il terzo n_3, è uguale a
$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3!} \ .$$
[*Per suddividere gli oggetti si procede scegliendo prima n_1 oggetti tra gli n dati e poi scegliendo n_2 oggetti tra gli $n - n_1$ rimasti; la prima operazione può essere fatta in C_{n,n_1} modi e la seconda in C_{n-n_1,n_2} modi. Quindi il numero di suddivisioni cercate è il prodotto di questi due numeri, che con le opportune semplificazioni si riduce a quello dato nella formula.*]

Questa formula è un caso particolare della seguente: dati dei numeri interi positivi $n, n_1, n_2, \ldots, n_m$ tali che $n_1 + \cdots + n_m = n$, il numero di modi di suddividere n oggetti distinti in m gruppi in modo che il primo gruppo ne contenga n_1, il secondo n_2 e così via, è
$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_m!} \ .$$

Si osservi che per $m = 2$, ponendo $n_1 := k$ (da cui segue necessariamente che $n_2 = n - k$) si ritrova la nota formula per $C_{n,k}$.

53. a) Quante sono le sigle di 10 lettere in cui la lettera a appare esattamente due volte, la b tre volte e la c cinque volte?
b) Quante sono le sigle di 10 lettere (dell'alfabeto italiano) in cui la lettera a appare esattamente due volte e la lettera b tre volte?

54. Sono dati quattro numeri interi positivi n, n_1, n_2, n_3 con $n_1 + n_2 + n_3 = n$, e tre numeri positivi p_1, p_2, p_3 con $p_1 + p_2 + p_3 = 1$. Consideriamo ora una procedura aleatoria che può dare tre possibili risultati a_1, a_2, a_3 con probabilità p_1, p_2, p_3 rispettivamente. Dimostrare che ripetendo l'operazione n volte in modo indipendente, la probabilità P di avere n_1 volte il risultato a_1, n_2 volte il risultato a_2 ed n_3 volte a_3 è
$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3!} \, p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot p_3^{n_3} \ .$$
Questa formula è un caso particolare della seguente: dati dei numeri interi positivi $n, n_1, n_2, \dots, n_m$ tali che $n_1 + \cdots + n_m = n$ e dei numeri positivi $p_1, p_2, \dots, p_m$ tali che $p_1 + \cdots + p_m = 1$, si consideri una procedura aleatoria che può dare m possibili risultati $a_1, \dots, a_m$ con probabilità $p_1, \dots, p_m$ rispettivamente; allora la probabilità P di avere n_1 volte il risultato a_1, n_2 volte il risultato a_2 e così via, è
$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_m!} \, p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdots p_m^{n_m} \ .$$
Si noti che per $m = 2$, ponendo $n_1 := k$ e $p_1 := p$ (da cui segue necessariamente che $n_2 = n - k$ e $p_2 = 1 - p$) si ottiene la nota formula per la probabilità di avere k successi su n tentativi indipendenti quando la probabilità di successo è p.

55. Si lancia un dado per 10 volte. Calcolare la probabilità che escano:
a) esattamente 3 uno e 5 due;
b) esattamente 4 sei e 3 numeri dispari.

56. Ho un programma di computer che estrae a caso una sigla di tre lettere seguendo una procedura a me non nota. Dopo aver fatto un'ampia statistica, scopro che la prima lettera della sigla è A nel 20% delle estrazioni, la seconda è A nel 40% delle estrazioni, e infine la terza è A nel 10% delle estrazioni.
a) Calcolare la probabilità P che venga estratta la sigla AAA, supponendo che il programma scelga le tre lettere in modo indipendente.
b) Se le tre lettere della sigla non vengono scelte in modo indipendente, cosa si può dire di certo su P? più precisamente, qual è il valore massimo che P può assumere, e quale il minimo?

57. Sia X l'insieme dei numeri di tre cifre comprese tra 1 e 8 (inclusi) la cui somma è pari. Su X consideriamo la probabilità uniforme. Sia A_1 l'evento "la prima cifra è pari", A_2 l'evento "la seconda cifra è pari" e A_3 l'evento "la terza cifra è pari".
a) Quanti sono gli elementi di X?
b) Calcolare la probabilità di ciascuno degli eventi A_1, A_2, A_3.
c) Verificare che gli eventi A_1, A_2, A_3 sono *a due a due* indipendenti.
d) Verificare che gli eventi A_1, A_2, A_3 non sono indipendenti.

Richiamo delle nozioni fondamentali

Sia X una variabile aleatoria che assume un numero finito di valori $x_1, \dots x_n$ con probabilità $p_1, \dots, p_n$ rispettivamente – in altre parole p_k è la probabilità dell'evento "X assume il valore x_k" (in breve "$X = x_k$"), vale a dire l'insieme degli eventi elementari in corrispondenza dei quali X assume il valore x_k.

Il *valore atteso* di X, indicato con $\mathrm{E}(X)$, è dato dalla seguente media pesata:

$$\mathrm{E}(X) := p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n = \sum_{k=1}^{n} p_k x_k \; ; \tag{1}$$

La *varianza* di X, indicata con $\mathrm{Var}(X)$, corrisponde invece al valore atteso della variabile aleatoria $(X - m)^2$, dove m è il valore atteso di X, vale a dire

$$\mathrm{Var}(X) := \mathrm{E}((X-m)^2) = \sum_{k=1}^{n} p_k (x_k - m)^2 \; .$$

Se X ha valore atteso m, la *disuguaglianza di Chebyshev* dice che per ogni numero positivo t la probabilità che X assuma valori che differiscono da m più di t è inferiore a σ^2/t^2, ovvero

$$P\big(\text{“}X \geq m + t\text{”}\big) + P\big(\text{“}X \leq m - t\text{”}\big) = P\big(\text{“}|X - m| \geq t\text{”}\big) \leq \frac{\sigma^2}{t^2} \; .$$

Date due variabili aleatorie X_1 e X_2, la *covarianza* di X_1 e X_2 è data da

$$\mathrm{Cov}(X_1; X_2) := \mathrm{E}((X_1 - m_1)(X_2 - m_2))$$

dove m_1 e m_2 sono i valori attesi rispettivamente di X_1 e X_2. Infine il *coefficiente di correlazione* di X_1 e X_2 è

$$\mathrm{corr}(X_1; X_2) := \frac{\mathrm{Cov}(X_1; X_2)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_1) \cdot \mathrm{Var}(X_2)}} \; .$$

Variabili aleatorie indipendenti. Due variabili aleatorie X e Y si dicono *indipendenti* se l'evento "X assume il valore x" e l'evento "Y assume il valore y" sono indipendenti per ogni possibile scelta di x e y tra i valori assunti da X e da Y rispettivamente. (Quindi se X assume n valori e Y ne assume m, per verificare l'indipendenza di X e Y bisogna verificare l'indipendenza di $n \cdot m$ coppie di eventi.)

Proprietà del valore atteso e della varianza. Siano X e Y due variabili aleatorie, e sia c un numero (ovvero la variabile aleatoria costante di valore c). Valgono allora i seguenti enunciati:

(i) $\mathrm{E}(c) = c$ e $\mathrm{Var}(c) = 0$;
(ii) $\mathrm{E}(X + c) = \mathrm{E}(X) + c$ e $\mathrm{E}(c \cdot X) = c\,\mathrm{E}(X)$;
(iii) $\mathrm{E}(X + Y) = \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y)$;
(iv) $\mathrm{Var}(X + c) = \mathrm{Var}(X)$ e $\mathrm{Var}(c \cdot X) = c^2 \mathrm{Var}(X)$;
(v) $\mathrm{Cov}(X; Y) = \mathrm{E}(X \cdot Y) - \mathrm{E}(X) \cdot \mathrm{E}(Y)$;
(vi) $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Cov}(X; X) = \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2$;
(vii) $\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X; Y)$.

Supponendo inoltre che X e Y siano indipendenti si ha anche che:

(viii) $\mathrm{E}(X \cdot Y) = \mathrm{E}(X) \cdot \mathrm{E}(Y)$;
(ix) $\mathrm{Cov}(X; Y) = 0$;

(x) $\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$.

La proprietà (iii) può essere estesa alla somma di più variabili aleatorie $X_1, \dots, X_n$:

$$\mathrm{E}(X_1 + \cdots + X_n) = \mathrm{E}(X_1) + \cdots + \mathrm{E}(X_n) \; ; \tag{2}$$

se inoltre queste variabili aleatorie sono a due a due indipendenti vale la seguente generalizzazione della proprietà (x):

$$\mathrm{Var}(X_1 + \cdots + X_n) = \mathrm{Var}(X_1) + \cdots + \mathrm{Var}(X_n) \; . \tag{3}$$

Legge dei grandi numeri. Date $X_1, \dots, X_n$ variabili aleatorie indipendenti con uguale valore atteso m ed uguale varianza σ^2, si chiama *media campionaria* la variabile aleatoria ottenuta facendo la media aritmetica di $X_1, \dots, X_n$, vale a dire

$$\overline{X} := \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \; .$$

Si ha allora che $\mathrm{E}(\overline{X}) = m$ e $\mathrm{Var}(\overline{X}) = \sigma^2/n$.

Pertanto la disuguaglianza di Chebyshev implica che per ogni $t > 0$ si ha

$$P\big(\text{“}|\overline{X} - m| \geq t\text{”}\big) \leq \frac{\sigma^2}{nt^2} \; . \tag{4}$$

In particolare la probabilità che $\overline{X}$ assuma valori che differiscono più di t dal valore atteso m tende a 0 quando n tende a $+\infty$ (quest'ultima affermazione è nota come “legge dei grandi numeri”).

Distribuzione di Bernoulli. Si dice che una variabile aleatoria X ha una distribuzione (o legge) di *Bernoulli* di parametro p con $0 \leq p \leq 1$ se X assume solo i valori 1 e 0 con probabilità $p_1 = p$ e $p_0 = 1 - p$. Si verifica facilmente che in tal caso

$$\mathrm{E}(X) = p \quad \text{e} \quad \mathrm{Var}(X) = p(1-p) \; .$$

Esempio: si lancia un dado e si pone $X = 0$ quando viene un cinque e $X = 1$ altrimenti; allora X è una variabile aleatoria con legge di Bernoulli di parametro $p := 5/6$.

Distribuzione binomiale. Una variabile aleatoria X ha una distribuzione *binomiale* di parametri p e n con $0 \leq p \leq 1$ e $n = 1, 2, \dots$ se X assume come valori tutti i numeri interi k compresi tra 0 ed n con probabilità

$$p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \; .$$

Si verifica facilmente se X è la somma di n variabili aleatorie *indipendenti* con distribuzione di Bernoulli di parametro p allora X è una variabile aleatoria con distribuzione binomiale di parametri p ed n. Da questo e da quanto abbiamo visto nei paragrafi precedenti segue che

$$\mathrm{E}(X) = np \quad \text{e} \quad \mathrm{Var}(X) = np(1-p) \; .$$

Esempio: si lanciano 10 dadi e X corrisponde al numero di cinque che si ottengono; allora X è una variabile aleatoria con legge binomiale di parametri $p := 1/6$ e $n := 10$.

Distribuzione geometrica. Una variabile aleatoria X ha una distribuzione *geometrica* di parametro p con $0 \leq p \leq 1$ se X assume come valori i numeri interi $k = 1, 2, \ldots$ con probabilità

$$p_k = (1-p)^{k-1} p \ .$$

Per una tale variabile aleatoria si ha

$$\mathrm{E}(X) = \frac{1}{p} \quad \text{e} \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2} \ .$$

Esempio: si lancia una moneta finché non esce testa e si indica con Xil numero di lanci fatto; allora X è una variabile aleatoria con legge geometrica di parametro $p := 1/2$.

Distribuzione di Poisson. Una variabile aleatoria X ha una distribuzione di *Poisson* di parametro λ con $\lambda > 0$ se X assume come valori i numeri interi $k = 0, 1, 2, \ldots$ con probabilità

$$p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \ .$$

Per una tale variabile aleatoria si ha

$$\mathrm{E}(X) = \lambda \quad \text{e} \quad \mathrm{Var}(X) = \lambda \ .$$

Motivazione: un determinato esperimento ha una probabilità di successo p molto piccola e viene ripetuto in modo indipendente n volte con n molto grande. Ponendo allora $\lambda := np$, si ha allora che la probabilità di avere k successi è

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{N-k} = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \simeq \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = p_k \ ,$$

dove l'errore nell'ultima approssimazione è tanto più piccolo 0 quanto più n è grande. In altre parole la distribuzione di Poisson di parametro λ si ottiene come limite della distribuzione binomiale di parametri n e $p := \lambda/n$ per n che tende a $+\infty$; il valore atteso e la varianza possono essere quindi ottenuti passando al limite nelle formule per il valore atteso e la varianza della distribuzione binomiale.

Variabili aleatorie continue. Accenniamo infine al caso delle variabili aleatorie che assumono tutti i valori in un dato intervallo $[a, b]$ e non solo un numero finito di valori; si parla in tal caso di variabili aleatorie *continue* (mentre quelle considerate finora erano variabili aleatorie *discrete*). Supponiamo di avere una funzione $p(x)$ – detta *distribuzione di probabilità* di X – tale che, comunque si prendano s, t con $a \leq s \leq t \leq b$, la probabilità dell'evento "il valore di X è compreso tra s e t" (in breve: "$s \leq X \leq t$") è data dalla formula

$$P\big(\text{“}s \leq X \leq t\text{”}\big) = \int_s^t p(x)\, dx \ . \tag{5}$$

Si noti che la probabilità che X assuma un certo valore x si ottiene applicando la formula (5) con $s := x$ e $t := x$ ed è pertanto sempre uguale a 0. La formula (5) implica inoltre che la probabilità che X assuma valore in un intervallo di lunghezza d che contiene x si approssima con $p(x) \cdot d$, e l'approssimazione è tanto migliore quanto più d è piccolo. Si noti infine che una distribuzione di probabilità $p(x)$ deve necessariamente soddisfare

$$p(x) \geq 0 \text{ per ogni } x \in [a, b] \quad \text{e} \quad \int_a^b p(x)\, dx = 1 \ ; \tag{6}$$

queste due condizioni servono a garantire che la probabilità dell'evento "$s \le X \le t$" sia sempre compresa tra 0 e 1, e sia uguale a 1 per l'evento certo "$a \le X \le b$".

In questo contesto il valore atteso di X è dato dalla formula

$$\mathrm{E}(X) := \int_a^b x\, p(x)\, dx \ .$$

Data inoltre una funzione f, il valore atteso della variabile aleatoria $f(X)$ è dato invece da

$$\mathrm{E}(f(X)) := \int_a^b f(x)\, p(x)\, dx \ .$$

Infine la varianza di X è il valore atteso della variabile aleatoria $(X-m)^2$ dove si è posto $m := \mathrm{E}(X)$, vale a dire

$$\mathrm{Var}(X) := E((X-m)^2) = \int_a^b (x-m)^2\, p(x)\, dx \ .$$

Il valore atteso e la varianza soddisfano tutte le proprietà elencate in precedenza nel caso delle variabili aleatorie discrete.

Distribuzione uniforme. Si dice che X è una variabile aleatoria con distribuzione *uniforme* sull'intervallo $[a, b]$ se X assume come valori tutti i numeri nell'intervallo $[a, b]$ e la distribuzione di probabilità è la funzione costante

$$p(x) := \frac{1}{b-a} \ .$$

Si verifica facilmente che in tal caso

$$\mathrm{E}(X) = \frac{b+a}{2} \quad \text{e} \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12} \ .$$

Distribuzione esponenziale. X è una variabile aleatoria con distribuzione *esponenziale* di parametro λ con $\lambda > 0$ se X assume come valori tutti i numeri nell'intervallo $[0, +\infty)$ e la distribuzione di probabilità è

$$p(x) := \lambda e^{-\lambda x} \ .$$

Si verifica facilmente che in tal caso

$$\mathrm{E}(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{e} \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2} \ .$$

Esempio: si osserva una particella instabile (per esempio un atomo di un isotopo radioattivo) a partire dall'istante 0 e si indica con X il momento in cui tale particella decade; in tal caso X è una variabile aleatoria con distribuzione elementare di parametro λ; il numero $1/\lambda$ è noto come "vita media" della particella in questione.

Distribuzione normale. X è una variabile aleatoria con distribuzione *normale (o Gaussiana)* di parametri m e σ con $\sigma > 0$ se X assume come valori tutti i numeri $x \in \mathbb{R}$ e la distribuzione di probabilità è

$$p(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\Big(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\Big)$$

dove $\exp(t) := e^t$ è la funzione esponenziale. In tal caso si ha che

$$\mathrm{E}(X) = m \quad \text{e} \quad \mathrm{Var}(X) = \sigma^2$$

(e quindi si parla di distribuzione normale con media m e varianza σ^2).

Teorema del limite centrale. Sia X una variabile aleatoria con valore atteso m e varianza σ^2, e supponiamo di sapere che X è la somma di N variabili aleatorie *indipendenti* con uguale varianza. Il teorema del limite centrale dice che (sotto opportune ipotesi che non specifichiamo!) per ogni scelta di s e t la probabilità dell'evento "$s \le X \le t$" si approssima con quella dell'evento "$s \le \overline{X} \le t$" dove $\overline{X}$ è la variabile aleatoria con distribuzione normale con media m varianza σ^2, ovvero

$$P\big(\text{"}s \le X \le t\text{"}\big) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_s^t \exp\Big(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\Big)\, dx \ ,$$

e l'errore nell'approssimazione è tanto più piccolo quanto più N è grande. In altre parole, una variabile aleatoria ottenuta come somma di un gran numero variabili aleatorie indipendenti con uguale varianza "assomiglia" a una variabile aleatoria con distribuzione normale.

Esercizi

1. Sia X una variabile aleatoria che assume i valori $-1, 1, 4$ con probabilità $1/4$, $1/4$ e $1/2$ rispettivamente. Calcolare il valore atteso e la varianza di X.

2. Sia X il numero ottenuto lanciando un dado.
   a) Quali valori può assumere la variabile aleatoria X, e con quale probabilità?
   b) Calcolare il valore atteso e la varianza di X.

3. In un gioco a premi il giocatore estrae una pallina da un sacchetto che ne contiene 10 nere, 5 rosse, 5 bianche e 20 blu, e vince 10 euro se la pallina estratta è rossa, 1 euro se è nera o bianca, nulla se è blu. Sia X la vincita:
   a) Quali valori può assumere la variabile aleatoria X, e con quale probabilità?
   b) Calcolare il valore atteso e la varianza di X.

4. a) Dare un esempio concreto di due variabili aleatorie indipendenti.
   b) Dare un esempio concreto di due variabili aleatorie non indipendenti.

5. Si estrae una pallina a caso da un sacchetto che ne contiene 5 rosse, 3 nere e 2 bianche. Sia X la variabile aleatoria che vale 2 quando viene estratta una pallina nera e 0 altrimenti, e sia Y la variabile aleatoria che vale 1 se viene estratta una pallina rossa e -1 altrimenti. X e Y sono indipendenti?

6. Verificare che una variabile aleatoria con legge di Bernoulli di parametro p ha valore atteso p e varianza $p(1-p)$.

7. Dare un esempio concreto di variabile aleatoria con legge di Bernoulli di parametro $p := 1/4$.

8. Si estrae una pallina a caso da un sacchetto che contiene n palline numerate da 1 a n, e si indica con X il numero così ottenuto.
a) Quali valori può assumere la variabile aleatoria X, e con quale probabilità?
b) Calcolare il valore atteso di X e di X^2.
c) Calcolare la varianza di X.
[*Per b) usare le formule:* $1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ *e* $1^2+2^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.]

9. Sull'insieme di eventi elementari $\{a,b,c,d,e\}$ è data la distribuzione di probabilità $P(a) = P(b) := 1/4$ e $P(c) = P(d) = P(e) := 1/6$. Sia X la variabile aleatoria che vale -1 nel caso che si verifichino gli eventi elementari a,b,c e vale 3 nei rimanenti casi.
a) Quali sono i valori assunti da X, e con quale probabilità?
b) Calcolare il valore atteso e la varianza di X.

10. Si consideri l'insieme di eventi elementari $\{a,b,c,d\}$ dotato della probabilità uniforme. Consideriamo quindi le variabili aleatorie X e Y definite come segue $X(a) = X(b) := 1$ e $X(c) = X(d) := -1$; $Y(a) := 2$, $Y(b) := s$, $Y(c) := -2$ e $Y(d) := -s$, dove s è un numero reale assegnato.
a) Calcolare il valore atteso e la varianza sia di X che di Y.
b) Calcolare il valore atteso di $X \cdot Y$.
c) Calcolare la covarianza di X e Y.
d) Determinare i valori di s per cui X e Y sono indipendenti.

11. La variabile aleatoria X ha valore atteso 2 e varianza 0,1. Detta p la probabilità che X assuma valori maggior di 3, si usi la disuguaglianza di Chebyshev per dare una maggiorazione di p.

12. Sia X una variabile aleatoria con valore atteso m e varianza σ^2.
a) Calcolare il valore atteso e la varianza della variabile aleatoria $3X-4$.
b) Calcolare il valore atteso della variabile aleatoria $2X^2$.
c) Calcolare la covarianza di $X-2$ e $2X+3$.

13. Sia X il numero ottenuto lanciando 5 dadi. Calcolare il valore atteso e la varianza della variabile aleatoria X.

14. Il signor A e il signor B scommettono sul lancio di due monete: se vengono due teste allora A dà 1 euro a B, se vengono due croci B dà 1 euro ad A, e nei restanti casi è patta. Indichiamo X il guadagno del signor A.
a) Calcolare il valore atteso e la varianza delle variabili aleatorie X e X^2.
b) Dimostrare che la covarianza di X e X^2 è 0.
c) Dimostrare che X e X^2 non sono indipendenti.

15. Il signor A e il signor B scommettono come descritto nell'esercizio precedente, ma con una posta a 100 euro.
a) Detto Y il guadagno del signor A, calcolare la media e la varianza di Y.
b) Il signor A ha solo 70 euro in tasca: qual è la probabilità che non sia in grado di pagare il dovuto al signor B?

16. Il signor A e il signor B ripetono 100 volte la scommessa descritta nell'esercizio prima del precedente.
    a) Detto Z il guadagno complessivo del signor A, calcolare la media e la varianza di Z.
    b) Il signor A ha in tasca solo 70 euro: usare la disuguaglianza di Chebyshev per stimare la probabilità che alla fine non sia in grado di pagare il dovuto al signor B.

17. Si estraggono due biglie a caso da un sacchetto che ne contiene cinque, numerate da 1 a 5. Indichiamo con X il valore della prima biglia estratta e con Y quello della seconda.
    a) Verificare che X e Y hanno la stessa distribuzione di probabilità.
    b) Calcolare il valore atteso di X e Y.
    c) Calcolare la varianza di X e Y.
    d) Dimostrare che X e Y non sono indipendenti.
    e) Calcolare valore atteso di $X \cdot Y$, la covarianza di X e Y e la varianza di $X + Y$.

18. Ripetere l'esercizio precedente supponendo che il sacchetto contenga dieci biglie numerate da 1 a 10. [*Per svolgere i calcoli possono essere utili le formule* $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ *e* $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.]

19. Sia X la percentuale di teste che si ottengono lanciando 100 monete.
    a) Verificare che $X = \frac{1}{100}Y$ dove Y è una variabile aleatoria con distribuzione binomiale di parametri $n := 100$ e $p := 1/2$.
    b) Calcolare il valore atteso e la varianza di X.
    c) Detta p la probabilità che la percentuale di teste sia inferiore al 10%, usare la disuguaglianza di Chebyshev per trovare una maggiorazione di p.

20. Dare un esempio concreto di variabile aleatoria con distribuzione binomiale di parametri $n = 10$ e $p = 3/5$.

21. Il signor A e il signor B scommettono sul lancio di tre monete, stabilendo che il signor A paga 3 euro al signor B se vengono tre teste, 1 euro se vengono due teste, mentre in tutti gli altri casi il signor B paga 2 euro al signor A. Qual è la vincita media del signor A?

22. In un gioco a premi, il concorrente vince il premio scritto all'interno di un bussolotto estratto a caso da una scatola. Questa scatola contiene 90 bussolotti con una vincita di 1 euro, 9 con una vincita di 10 euro, ed 1 con una vincita di 800 euro. Qual è la vincita media?

23. In una variante del gioco descritto nell'esercizio precedente, al concorrente viene data la possibilità, sapendo il risultato dell'estrazione, di accettare quanto ha vinto oppure di chiedere la ripetizione dell'estrazione. A questo punto sono possibili diverse strategie: i) non chiedere mai la ripetizione, ii) chiedere la ripetizione se la prima estrazione dà una vincita di 1 euro, iii) chiedere la ripetizione se la prima estrazione dà una vincita di 1 o di 10 euro.
    a) Calcolare la vincita media per ciascuna strategia e stabilire qual è la migliore.
    b) Cosa cambia se nel fare la seconda estrazione non viene reinserito nella scatola il bussolotto estratto in precedenza?

24. Viene estratta una pallina a caso da un sacchetto che ne contiene 10 bianche e 5 nere, e il signor A e il signor B concordano quanto segue: se la pallina estratta è nera il signor A riceve 2 euro dal signor B e altrimenti paga 1 euro al signor B.
a) Quanto guadagna in media il signor A?
b) Quanto guadagna in media il signor A se si fanno due estrazioni invece di una, e si rimette nel sacchetto la pallina della prima estrazione prima di fare la seconda?
c) Cosa succede se invece non si rimette nel sacchetto la pallina della prima estrazione?

25. Su quattro facce di un dado è scritta la lettera a, mentre sulle due rimanenti è scritta la lettera b. La variabile aleatoria X indica quante a sono ottenute lanciando il dado n volte. Far vedere che X ha una legge binomiale di parametri n e $p := 2/3$. Calcolare il valore atteso e la varianza di X.

26. Un certo "esperimento" ha solo due esiti: "successo" ed "insuccesso", con probabilità p ed $1-p$ rispettivamente. Si ripete l'esperimento in modo indipendente finché non si ottiene un successo, e si indica con X il numero di tentativi fatti. Dimostrare le seguenti affermazioni:
a) la probabilità di non avere alcun successo in k tentativi è $(1-p)^k$;
b) la probabilità di non avere alcun successo in infiniti tentativi è 0;
c) la probabilità di avere successo al k-esimo tentativo è $p(1-p)^{k-1}$.

27. Nell'esercizio precedente abbiamo insistito sul fatto che gli esperimenti devono essere "indipendenti", cioè realizzati in modo tale che il risultato di ciascun esperimento non è influenzato da quello degli altri. Evidenziate in quale punto della soluzione dell'esercizio avete usato quest'ipotesi. Proponete quindi un esempio concreto in cui quest'ipotesi non è verificata.

28. In media, quante volte devo lanciare due dadi per ottenere un doppio sei? [*Verificare che il numero X di lanci da fare per ottenere un doppio sei è una variabile aleatoria con distribuzione geometrica di parametro $p := 1/36$.*]

29. Un dispositivo elettronico impiega un tempo T per eseguire una certa operazione. Talvolta capita, in modo puramente casuale, che avvenga un errore nell'esecuzione dell'operazione, ed in tal caso il dispositivo la ripete automaticamente finché viene svolta correttamente.
a) Sapendo che la probabilità che l'operazione venga svolta correttamente è p, calcolare la probabilità che servano due tentativi per ottenere il risultato corretto.
b) Calcolare la probabilità che servano k tentativi per ottenere il risultato corretto.
c) Quanto tempo serve in media per ottenere il risultato corretto?
[*Per c) si osservi che il tempo per avere il risultato corretto è dato dalla formula $T \cdot X$ dove X è una variabile aleatoria con distribuzione geometrica di parametro p.*]

30. Il signor A ed il signor B decidono di lanciare un dado per 100 volte, e per ogni 6 che esce il signor A riceve 5 euro dal signor B, mentre in tutti gli altri casi dà 1 euro al signor B. Indichiamo con X il guadagno del signor A alla fine dei 100 lanci.
a) Calcolare il valore atteso e la varianza di X.
b) Prima di giocare il signor A ha in tasca 80 euro e dunque esiste la possibilità che alla fine egli non sia in grado di dare quanto dovuto al signor B. Detta P la probabilità di questo evento, utilizzare la disuguaglianza di Chebyshev per dimostrare che $P \leq 10\%$.

c) Calcolare il valore esatto della probabilità P di cui al punto precedente.
[*Per c), si cominci con il determinare qual è il massimo numero di sei che possono uscire affinché il signor A si trovi a dover dare al signor B più di* 80 *euro.*]

31. Un programma per computer estrae un numero intero a caso tra 1 e 9, ciascuno con una diversa probabilità che non è nota. Mi interessa scoprire qual è la probabilità p che esca il numero tre. Faccio allora girare il programma per 1000 volte, e calcolo la percentuale p_e di volte che è uscito il numero tre: è ragionevole aspettarsi che p_e sia vicino p, anche se non esattamente uguale.
Stimare la probabilità che p_e differisca da p meno del 5%.

32. La variabile aleatoria X rappresenta il risultato di un certo esperimento. Di X non è noto il valore atteso m, ma si sa che la varianza σ^2 è inferiore a 3. Per valutare il valore di m si ripete l'esperimento n volte e si calcola la media aritmetica M dei risultati così ottenuti: ci si aspetta che se n è grande M fornisca una buona approssimazione di m, o meglio che sia piuttosto improbabile che così non sia (anche se non impossibile).
Quanto deve essere grande n per far sì che la differenza $m - M$ sia inferiore in modulo a 0,5 con probabilità superiore al 95%?
[*Il valore di M corrisponde alla media campionaria di n variabili aleatorie con lo stesso valore atteso e la stessa varianza di Y: applicando pertanto la formula* (4) *si ottiene che*
$$P\big(\text{“}|M-m| \geq 0{,}5\text{”}\big) \leq \frac{\sigma^2}{0{,}5^2 n} \leq \frac{12}{n} \ .$$
Affinché l'evento “$|M-m| \leq 0{,}5$” abbia probabilità superiore al 95% *basta che l'evento “$|M-m| \geq 0{,}5$” abbia probabilità inferiore al* 5%, *e per ottenere ciò è sufficiente imporre che* $12/n < 5\%$, *ovvero prendere n più grande di* 240.]

33. Date le variabili aleatorie X, Y, Z e le costanti c, d, dimostrare le seguenti affermazioni:
a) $\mathrm{Cov}(X; c) = 0$;
b) $\mathrm{Cov}(X + c; Y + d) = \mathrm{Cov}(X; Y)$;
c) $\mathrm{Cov}(X + Y; Z) = \mathrm{Cov}(X; Z) + \mathrm{Cov}(Y; Z)$.
d) $\mathrm{Var}(X+Y+Z) = \mathrm{var}(X)+\mathrm{Var}(Y)+\mathrm{Var}(Z)+2\mathrm{Cov}(X; Z)+2\mathrm{Cov}(X; Z)+2\mathrm{Cov}(Y; Z)$.

34. Dimostrare le seguenti affermazioni:
a) un evento con probabilità uguale a 0 oppure 1 è indipendente da qualunque altro evento;
b) una variabile aleatoria ha varianza nulla se e solo se è costante;
c) una variabile aleatoria costante è indipendente da qualunque altra variabile aleatoria;
d) una variabile aleatoria è indipendente da se stessa se e solo se è costante.

35. Siano X, Y due variabili aleatorie indipendenti ed f, g due funzioni. Dimostrare che:
a) le variabili aleatorie X^2 e Y^2 sono indipendenti;
b) le variabili aleatorie $f(X)$ e $g(Y)$ sono indipendenti;
c) se $\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(Y) = 0$ allora $\mathrm{Var}(X \cdot Y) = \mathrm{Var}(X) \cdot \mathrm{Var}(Y)$.

36. Sia X una variabile aleatoria ed A un evento con $P(A) > 0$. Il *valore atteso condizionato* di X sapendo A, indicato con $\mathrm{E}(X|A)$, è quello che si ottiene sostituendo nella formula

(1) la probabilità p_k dell'evento "X assume il valore y_k" con la probabilità condizionata sapendo A. Dimostrare che

$$\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(X|A) \cdot P(A) + \mathrm{E}(X|A^c) \cdot P(A^c) \ . \tag{7}$$

37. Si lancia un dado finché non esce il numero sei e si indica con X il numero di lanci fatto. Consideriamo inoltre l'evento $A :=$"non è uscito sei al primo lancio". Verificare che il valore atteso condizionato di X sapendo A è uguale al valore atteso della variabile aleatoria $X+1$, mentre il valore atteso condizionato di X sapendo A^c è 1. Utilizzare quindi la formula (7) per calcolare il valore atteso di X.
[*Siccome X è una variabile aleatoria con distribuzione geometrica di parametro $p := 1/6$, questo esercizio è di fatto una dimostrazione della formula per il valore atteso della distribuzione geometrica nel caso $p := 1/6$. Allo stesso modo è possibile dimostrare quella formula per p qualunque. Con un ragionamento analogo, anche se più complicato, si dimostra la formula per la varianza della distribuzione geometrica.*]

38. Nel gioco del lotto, ad ogni "estrazione" si prendono cinque biglie a caso da un contenitore che ne contiene novanta, numerate da 1 a 90.
a) Calcolare la probabilità che in una data estrazione "esca" il numero 71, cioè che una delle cinque biglie sia il 71.
b) Chiamiamo "ritardo" il numero di estrazioni che intercorrono tra un'uscita del 71 e la successiva. Qual'è il valor medio del ritardo? [*Chiaramente il valor medio del ritardo è lo stesso per tutti i numeri.*]

39. Dire per quali valori dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ le seguenti funzioni sono distribuzioni di probabilità sull'intervallo $[0, 2]$:
$$\text{a) } ax + b \ ; \quad \text{b) } ax^2 + b \ ; \quad \text{c) } ax^b \ ; \quad \text{d) } -\log(ax) \ ; \quad \text{e) } a - \log x.$$
[*Si ricordi che una funzione $p(x)$ è una distribuzione di probabilità sull'intervallo $[a, b]$ se soddisfa le due condizioni date nella formula* (6).]

40. Dire per quali valori dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ le seguenti funzioni sono distribuzioni di probabilità sull'intervallo $[0, +\infty)$:
$$\text{a) } e^{-ax} \ ; \quad \text{b) } be^{-ax} \ ; \quad \text{c) } ax + b \ ; \quad \text{d) } \frac{a}{1 + bx} \ ; \quad \text{e) } \frac{a}{(1 + bx)^2} \ ; \quad \text{f) } \frac{a}{1 + x^2} \ .$$

41. Sia X una variabile aleatoria con valori nell'intervallo $[0, +\infty)$. Calcolare la probabilità che X assuma valor compresi tra 0 e 1 per ciascuna delle seguenti distribuzioni di probabilità:
$$\text{a) } 3e^{-3x} \ ; \quad \text{b) } \frac{1}{1 + x} \ ; \quad \text{c) } xe^{-x} \ ; \quad \text{d) } \frac{2x}{1 + x^2} \ ; \quad \text{e) } 2xe^{-2x} \ .$$

42. Sia X una variabile aleatoria con valori nell'intervallo $[1, 3]$ e distribuzione di probabilità uniforme, cioè $p(x) := 1/2$. Calcolare il valor medio e la varianza delle seguenti variabili aleatorie:
$$\text{a) } X \ ; \quad \text{b) } 2X + 1 \ ; \quad \text{c) } X^2 \ ; \quad \text{d) } 4X^2 - 3 \ ; \quad \text{e) } e^X \ ; \quad \text{f) } \frac{2}{1 + X} \ .$$

43. Sia X una variabile aleatoria continua e sia c un numero. Partendo dalla definizione di valore atteso e varianza di una variabile aleatoria continua, dimostrare le seguenti formule:
a) $\mathrm{E}(X+c) = c\,\mathrm{E}(X) + c$ e $\mathrm{E}(cX) = c\,\mathrm{E}(X)$;
b) $\mathrm{Var}(X+c) = \mathrm{Var}(X)$ e $\mathrm{Var}(cX) = c^2\mathrm{Var}(X)$;
c) $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2$.

44. Dimostrare le formule per il valore atteso e la varianza di una variabile aleatoria con distribuzione uniforme.

45. Dimostrare le formule per il valore atteso e la varianza di una variabile aleatoria con distribuzione esponenziale di parametro λ.

46. Dando per noto che
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi} \ ,$$
verificare che la distribuzione normale
$$p(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\Big(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\Big)$$
è effettivamente una distribuzione di probabilità, ovvero ha integrale uguale a 1.
[*Utilizzare il cambio di variabile* $t = (x-m)/\sqrt{2\sigma^2}$.]

47. Dimostrare che una variabile aleatoria con distribuzione normale di parametri m e σ ha effettivamente media m e varianza σ^2.

48. Sia X una variabile aleatoria con distribuzione esponenziale di parametro λ, e per ogni $t \geq 0$ sia A_t l'evento "X assume un valore maggiore di t" (cioè $A_t :=$"$X \geq t$").
a) Calcolare la probabilità $P(A_t)$.
b) Verificare che $P(A_{t+s}|A_t) = P(A_s)$ per ogni $s \geq 0$.

Commento. Se X rappresenta l'istante in cui decade una certa particella instabile tenuta sotto osservazione a partire dall'istante 0, allora $P(A_t)$ rappresenta la probabilità che la particella sopravviva almeno fino all'istante t, e la formula al punto b) ci dice che se la particella non è ancora decaduta all'istante t, allora la probabilità che sopravviva almeno per un ulteriore tempo s non dipende da t ma solo da s. In altre parole, la probabilità che la particella decada in un certo intervallo di tempo in cui viene osservata non dipende da quanto tempo era vissuta prima (e per questo si parla di processo "senza memoria"). In effetti quella esponenziale è l'unica distribuzione di probabilità per cui vale la formula data in b), e quindi caratterizza i processi (continui) senza memoria.
Si noti infine che se X rappresentasse l'istante in cui un certo meccanismo si guasta, non varrebbe affatto una proprietà del genere: poiché l'eventualità di un guasto dipende dall'usura, ci aspettiamo che la probabilità che se ne verifichi uno in un dato intervallo di tempo sia tanto più grande quanto più vecchio è il meccanismo.