[versione: 31 maggio 2009]

CORSO: **Teoria Geometrica della Misura**
LEZIONI: **Giovanni Alberti**
CORSO DI LAUREA: **Matematica (II livello)**
ANNO ACCADEMICO: **2008/09**
SEMESTRE DI ATTIVAZIONE: **secondo**
NUMERO DI CREDITI: **7**
CODICE ESAME: **AA428**

Obiettivi formativi. Alla fine del corso lo studente deve avere una buona familiarità con i concetti di base della teoria geometrica della misura (misura e dimensione di Hausdorff, misure di Haar, formula di area e coarea) e della teoria delle correnti, includendo in particolare i risultati necessari alla soluzione del problema delle superifici minime secondo Federer e Fleming.

Programma del corso

(Gli argomenti in corsivo sono stati solo accennati.)

1. Riepilogo delle proprietà fondamentali delle misure positive (sui Boreliani): integrazione delle funzioni positive e delle funzioni vettoriali, regolarità, decomposizione di Hahn, teorema di Radon-Nikodym. Misure a valori reali e vettoriali: rappresentazione in termini di funzioni positive e densità, dualità con le funzioni continue (teorema di Riesz), compattezza rispetto alla topologia debole* (conseguenza del teorema di Banach-Alaoglu).
2. Misure esterne (misure σ-subadditive): nozione di misurabilità secondo Caratheodory, la restrizione della misura alla σ-algebra dei misurabili è σ-additiva; teorema di Caratheodory: per una misura additiva sui distanti i Boreliani sono misurabili. Costruzione di Caratheodory.
3. Misura e dimensione di Hausdorff. Proprietà essenziali della misura di Hausdorff. La misura di Hausdorff n-dimensionale coincide su $\mathbb{R}^n$ con la misura di Lebesgue.
4. *Misure di Haar su un gruppo compatto e localmente compatto e misure invarianti rispetto all'azione di un gruppo.*
5. Teoremi di ricoprimento di Besicovitch e Vitali, ed applicazioni: esistenza dei punti di densità di un insieme, esistenza dei punti di continuità in senso approssimato di una funzione L^p (teorema di Lebesgue), esistenza della densità di una misura rispetto ad un altra. Risultati principali sulla densità d-dimensionale di un insieme e di una misura. *Frattali autosimili secondo Hutchinson.*
6. Formula di area e coarea per mappe regolari. Formula asintotica per il volume dell'r-intorno di una superficie regolare.
7. Funzioni di Lipschitz: compattezza, lemma di estensione di McShane, derivata distribuzionale e relazione con gli spazi di Sobolev, differenziabilità quasi ovunque (teorema di Rademacher); *proprietà di Lusin.*
8. Definizioni alternative di misura k-dimensionale per insiemi in $\mathbb{R}^n$: contenuto di Minkowski e misura integralgeometrica.
10. Insiemi rettificabili k-dimensionali, fibrato tangente in senso approssimato.
11. *Alcuni criteri di rettificabilità: via spazio tangente, via proiezioni (teorema di struttura di Federer), via densità (teoremi di Marstrand e Preiss).*
12. k-vettori in $\mathbb{R}^n$, k-vettori semplici e loro interpretazione geometrica. Orientazione di una superficie regolare, orientazione canonica del bordo.
13. k-covettori, k-forme, differenziale esterno, pull-back di una k-forma, teorema di Stokes.
14. Definizione di corrente, bordo e massa. Correnti normali, rettificabili, intere, poliedrali. Teorema di compattezza per correnti intere e teorema di rettificabilità del bordo (Federer-Fleming). Soluzione del problema di Plateau nell'ambito delle correnti intere.
15. Operazioni fondamentali sulle correnti: prodotto, push-forward, costruzione del cono su una corrente assegnata. Constancy lemma.

16. Norma flat e sue principali proprietà. Teorema di deformazione poliedrale e applicazioni: disuguaglianza isoperimetrica in $\mathbb{R}^n$, *disuguaglianza isoperimetrica in un aperto regolare, approssimazione in massa.*
17 Slicing di una corrente rispetto ad una mappa Lipschitziana e caratterizzazione delle correnti intere per slicing (teorema di Brian White, Ambrosio-Kirchheim, Jerrard). *Dimostrazione della caratterizzazione per slicing.*
18. *Dimostrazione del teorema di rettificabilità del bordo e del teorema compattezza delle correnti intere usando la caratterizzazione per slicing.*

Struttura del corso. Il corso consiste per la maggior parte di lezioni tenute dal docente, più alcuni seminari tenuti dagli studenti stessi.

Prerequisti. Si richiede una solida conoscenza dei concetti di base dell'analisi funzionale (dualità, topologia debole*, teorema di Riesz) e della teoria dell'integrazione (rispetto ad una misura finita qualunque), e un minimo di familiarità con il concetto di derivata debole (o distribuzionale), ma non necessariamente una conoscenza approfondita dello spazio delle distribuzioni.

Testi di riferimento.

S.G. Krantz, H.R. Parks: *Geometric Integration Theory.* Birkhäuser, Boston, 2008.

K. Falconer: *The Geometry of Fractal Sets.* Cambridge University Press, Cambridge 1985.

P. Mattila: *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces. Fractals and rectifiability.* Cambridge University Press, Cambridge 199 5.

F. Morgan: *Geometric Measure Theory. A beginner's guide.* Academic Press, San Diego, 1988.

L. Simon: *Lectures on Geometric Measure Theory.* Proccedings of the Centre for Mathematical Analysis, vol. 3. Australian National University, 1983.

Appelli ed esami. L'esame si compone di un seminario su un argomento scelto in accordo con il docente, e di una prova orale sugli argomenti fondamentali del corso. Le date degli esami vengono concordate separatamente con i singoli studenti.