Versione: 6 febbraio 2008

Università di Pisa
Corso di laurea in Scienze Biologiche Molecolari

Testi e soluzioni degli scritti d'esame di

Matematica e Statistica, corso C

a.a. 2006/07

docenti: G. Alberti, G. Lenzi

Giovanni Alberti
Dipartimento di Matematica
Università di Pisa
largo Pontecorvo 5
56127 Pisa
www.dm.unipi.it/~alberti

Avvertenze

Gli scritti d'esame per il corso di Matematica e Statistica C si compongono di due parti: una prima parte con otto domande o problemi molto semplici a cui si deve dare solo la risposta, ed una seconda con tre o più problemi per cui invece si deve dare una soluzione articolata e spiegata in dettaglio. Il tempo a disposizione è di un'ora per la prima parte e di due ore per la seconda. Per la sufficienza piena sono solitamente richieste almeno cinque risposte corrette nella prima parte, ed un problema completamente risolto nella seconda.

La prima sezione di questa raccolta contiene i testi di tutti gli scritti, incluse le prove in itinere, mentre la seconda contiene una breve traccia delle soluzioni.

Programma del corso.

Gli argomenti appena accennati o non fondamentali sono riportati in corsivo.

1. Calcolo differenziale ed integrale, equazioni differenziali
   - 1.1 Funzioni e grafici di funzioni: dominio, immagine, funzione inversa. Funzioni elementari: potenze, esponenziali, logaritmi, funzioni trigonometriche (seno, coseno, tangente) e funzioni trigonometriche inverse. Operazioni sui grafici di funzioni. Interpretazione di equazioni e disequazioni in termini di grafici di funzioni.
   - 1.2 Numeri complessi. Notazione cartesiana e trigonometrica. Soluzioni complesse di un'equazione algebrica di secondo grado. *Calcolo delle radici di un numero complesso.*
   - 1.3 Derivata di una funzione: significato geometrico ed interpretazione fisica. Regole per il calcolo delle derivate. Derivate delle funzioni elementari. Studio dei grafici di funzioni.
   - 1.4 Teorema di de l'Hôpital. Notazione di Landau ("o" piccoli e "o" grandi). Sviluppo di Taylor di una funzione. Sviluppi di Taylor delle funzioni elementari. Parte principale di un infinito e di un infinitesimo. Calcolo dei limiti.
   - 1.5 Definizione di integrale definito di una funzione in termini di area del sottografico. Teorema fondamentale del calcolo integrale. Primitive (integrale indefinito) delle funzioni elementari; regole per il calcolo delle primitive. *Interpretazione dell'integrale come lavoro di una forza. Calcolo di aree e volumi.*
   - 1.6 Esempi di equazioni differenziali. Significato dei dati iniziali. Equazioni a variabili separabili. Equazioni lineari del primo ordine (formula risolutiva generale). Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti omoogenee e non. *Il moto dell'oscillatore armonico (semplice, forzato, smorzato). Il fenomeno della risonanza. Le piccole oscillazioni del pendolo.*
2. Elementi di probabilità e statistica descrittiva
   - 2.1 Permutazioni, combinazioni, disposizioni. Coefficienti binomiali. Fattoriale. *Formula di Stirling (senza dimostrazione).* Applicazione alla risoluzione di alcuni problemi di probabilità elementare.
   - 2.2 Definizione di probabilità su uno spazio di eventi elementari finito. Eventi indipendenti. Probabilità condizionata. Formula di Bayes. Esempi classici di probabilità classici (lancio di due dadi, lancio di n monete).
   - 2.3 Variabili aleatorie. Valor medio e varianza. Indipendenza e covarianza. Valor medio e varianza per la somma di due o più variabili aleatorie (indipendenti e non). Media campionaria e versione debole del teorema dei grandi numeri. Distribuzione di Bernoulli e distribuzione binomiale.
   - 2.4 Esempi di probabilità su spazi di eventi elementari infiniti (continui). Probabilità associata ad una funzione di densità. Definizione di media e varianza di una variabile aleatoria. Distribuzione normale (o Gaussiana). *Teorema del limite centrale (senza dimostrazione).*
   - 2.5 Valor medio e varianza per un insieme finito di dati. Classe mediana e classe modale. Relazione tra media e media di un campione casuale.

3. Vettori e matrici

3.1 Vettori in $\mathbb{R}^n$: somma, prodotto per costante, prodotto scalare. Interpretazione geometrica della somma (regola del parallelogrammo) e del prodotto scalare (senza dimostrazioni).

3.2 Matrici. Somma e prodotto di matrici, prodotto di una matrice per un vettore. Determinante e calcolo dell'inversa di una matrice (in particolare per le matrici 2×2 e 3×3, senza dimostrazioni). *Interpretazione geometrica del determinante come area e come volume.*

3.3 Impostazione e risoluzione dei sistemi di n equazioni lineari in n incognite in termini di matrici e vettori.

Testi

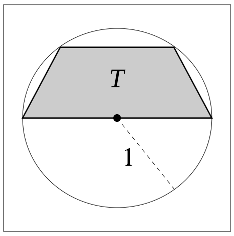
Compitino di prova, 17 novembre 2006

Prima parte

1. Risolvere la disequazione $2^{(x^2)} \leq 4$.
2. Determinare il dominio di definizione di $\sqrt{\log(x^3)}$.
3. Determinare le coordinate polari r e α per ciascuno dei seguenti punti del piano, dati in coordinate cartesiane: a) $(-1, 1)$; b) $(-2, 0)$; c) $(1, -\sqrt{3})$.
4. Trovare le soluzioni complesse dell'equazione $z^2 + 4z + 5 = 0$.
5. Calcolare la derivata delle seguenti funzioni: a) e^{-x^2}; b) $\dfrac{\log(x^2)}{\log x}$; c) $\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$.
6. Trovare il punto di minimo ed il valore minimo di $f(x) = \log(x^2 + 2x + 3)$.
7. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^2)}{x^2}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sin\left(\frac{2}{x} + 2^{-x}\right)$.
8. Disegnare il grafico di $y = 1 + \sin(x + \pi/2)$.

Seconda parte

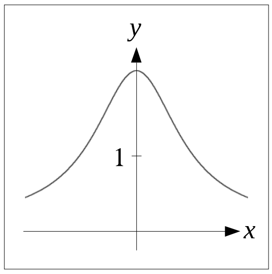
1. a) Disegnare il grafico della funzione $f(x) := \dfrac{2 + \log x}{x}$.
   b) Determinare il valore massimo ed il valore minimo di $f(x)$.
   c) Dimostrare che $3x \geq 2 + \log x$ per ogni $x > 0$.
   d) Per quali valori del parametro a si ha che $ax \geq 2 + \log x$ per ogni $x > 0$.
2. Sia T un trapezio iscritto in una circonferenza di raggio 1 la cui base maggiore coincide con un diametro di detta circonferenza (vedi figura accanto).
   a) Trovare il valore massimo ed il valore minimo che può assumere l'area di T.
   a) Trovare il valore massimo ed il valore minimo che può assumere il perimetro di T.



Primo compitino, 23 novembre 2006

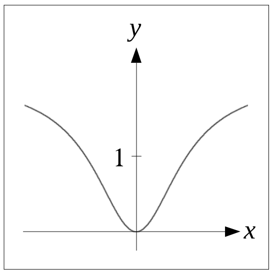
Prima parte, gruppo A

1. Determinare il dominio della funzione $\log\left(\frac{1}{1+x}\right)$.
2. Calcolare $z := 2i\frac{1+i}{1-i} - 3$.
3. Mettere in ordine *crescente* i seguenti numeri: 2; $\log(20)$; $100^{-0,1}$.
4. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di $y = e^x$ nel punto di ascissa 1.
5. Calcolare la derivata delle seguenti funzioni: a) $\sin(e^x)$; b) $\frac{e^{x^2+x}}{e^{x^2}}$.
6. Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(\log x)}{\log x}$; b) $\lim_{x\to+\infty} x^2 + \sin(x^3)$; c) $\lim_{x\to 1} \frac{e^x - e}{x^2 - 1}$.
7. Sia $f(x)$ la funzione il cui grafico è dato nella figura accanto. Risolvere *graficamente* la disequazione $f(x) \geq 1$.
8. Disegnare il grafico di $f(x) := e^{-x} - 1$.



Prima parte, gruppo B

1. Determinare il dominio della funzione $\log\left(\frac{1}{1-x}\right)$.
2. Calcolare $z := \frac{2-i}{1+2i} - 2i$.
3. Mettere in ordine *crescente* i seguenti numeri: $\log(10)$; $(1{,}01)^{-1}$; $1{,}5$.
4. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di $y = \log x$ nel punto di ascissa 1.
5. Calcolare la derivata delle seguenti funzioni: a) $\cos(e^x)$; b) $\log((x^2+1)^3)$.
6. Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{4x^2 - \pi^2}$. b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(\log x)}{\log x}$; c) $\lim_{x\to+\infty} -x^2 + \sin(x^3)$;
7. Sia $f(x)$ la funzione il cui grafico è dato nella figura accanto. Risolvere *graficamente* la disequazione $f(x) \leq 1$.
8. Disegnare il grafico di $f(x) := \frac{1}{x+1}$.



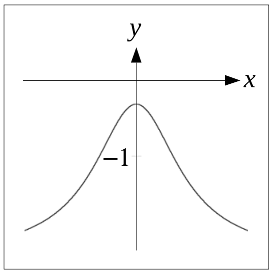
Prima parte, gruppo C

1. Determinare il dominio della funzione $\log\left(\frac{1}{x-1}\right)$.
2. Calcolare $z := \frac{2+i}{1-2i} + i$.
3. Mettere in ordine *crescente* i seguenti numeri: $(1{,}01)^{-1}$; 4; $\log(10)$.
4. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di $y = \log x$ nel punto di ascissa 2.

5. Calcolare la derivata delle seguenti funzioni: a) $e^{\sin x}$; b) $\dfrac{e^{x^2-x}}{e^{x^2}}$.

6. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^x - \sin(x^3)$; b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{\log(\log x)}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to\pi} \frac{\sin x}{\pi^2 - x^2}$.

7. Sia $f(x)$ la funzione il cui grafico è dato nella figura accanto. Risolvere *graficamente* la disequazione $f(x) \geq -1$.



8. Disegnare il grafico di $f(x) := \dfrac{1}{x-1}$.

PRIMA PARTE, GRUPPO D

1. Determinare il dominio della funzione $\log\left(\dfrac{1}{2+x}\right)$.

2. Calcolare $z := 2i\dfrac{1-i}{1+i} - 4$.

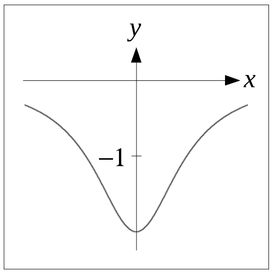
3. Mettere in ordine *crescente* i seguenti numeri: $(1{,}01)^{-1}$; 4; $\log(10)$.

4. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di $y = e^x$ nel punto di ascissa 2.

5. Calcolare la derivata delle seguenti funzioni: a) $\log((x^2+1)^{-2})$; b) $\sin(e^x)$.

6. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{-\log x}{\log(\log x)}$; a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \cos(e^{-x})$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{e^x - e}$.

7. Sia $f(x)$ la funzione il cui grafico è dato nella figura accanto. Risolvere *graficamente* la disequazione $f(x) \leq -1$.



8. Disegnare il grafico di $f(x) := e^x - 1$.

SECONDA PARTE, GRUPPO A

1. a) Risolvere la disequazione $\cos x \geq 1/2$ su tutto $\mathbb{R}$.
   b) Risolvere la disequazione $\cos\left(\dfrac{2\pi}{1+x^2}\right) \geq \dfrac{1}{2}$ su tutto $\mathbb{R}$.

2. a) Sia $f(x) := x\log x$. Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x)$ e $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
   b) Calcolare $f'(x)$ e $f''(x)$.
   c) Disegnare approssimativamente il grafico di $f(x)$.
   d) Determinare il valore massimo e minimo di $f(x)$.
   e) Determinare il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = -1/4$.

3. a) Determinare le soluzioni complesse dell'equazione $z^2 + 2z + 4 = 0$.
   b) Determinare le soluzioni complesse dell'equazione $z^8 + 2z^4 + 4 = 0$.

SECONDA PARTE, GRUPPO B

1. a) Risolvere la disequazione $\cos x \geq \sqrt{3}/2$ su tutto $\mathbb{R}$.

b) Risolvere la disequazione $\cos\left(\frac{2\pi}{1+x^2}\right) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ su tutto $\mathbb{R}$.

2. a) Sia $f(x) := -x\log(2x)$. Calcolare $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
   b) Calcolare $f'(x)$ e $f''(x)$.
   c) Disegnare approssimativamente il grafico di $f(x)$.
   d) Determinare il valore massimo e minimo di $f(x)$.
   e) Determinare il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = -2$.
3. a) Determinare le soluzioni complesse dell'equazione $z^2 + 4z + 16 = 0$.
   b) Determinare le soluzioni complesse dell'equazione $z^8 + 4z^4 + 16 = 0$.

SECONDA PARTE, GRUPPO C

1. a) Risolvere la disequazione $\sin x \leq 1/2$ su tutto $\mathbb{R}$.
   b) Risolvere la disequazione $\sin\left(\frac{\pi}{1+x^2}\right) \leq \frac{1}{2}$ su tutto $\mathbb{R}$.
2. a) Sia $f(x) := -x\log x$. Calcolare $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
   b) Calcolare $f'(x)$ e $f''(x)$.
   c) Disegnare approssimativamente il grafico di $f(x)$.
   d) Determinare il valore massimo e minimo di $f(x)$.
   e) Determinare il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = 1$.
3. a) Determinare le soluzioni complesse dell'equazione $z^2 + 2z + 2 = 0$.
   b) Determinare le soluzioni complesse dell'equazione $z^6 + 2z^3 + 2 = 0$.

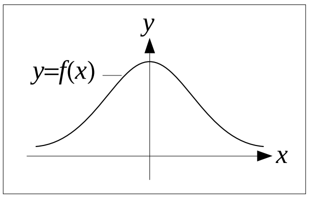
SECONDA PARTE, GRUPPO D

1. a) Risolvere la disequazione $\sin x \leq 1/\sqrt{2}$ su tutto $\mathbb{R}$.
   b) Risolvere la disequazione $\sin\left(\frac{\pi}{1+x^2}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ su tutto $\mathbb{R}$.
2. a) Sia $f(x) := -x\log(2x)$. Calcolare $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
   b) Calcolare $f'(x)$ e $f''(x)$.
   c) Disegnare approssimativamente il grafico di $f(x)$.
   d) Determinare il valore massimo e minimo di $f(x)$.
   e) Determinare il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = -4$.
3. a) Determinare le soluzioni complesse dell'equazione $z^2 + 4z + 8 = 0$.
   b) Determinare le soluzioni complesse dell'equazione $z^6 + 4z^3 + 8 = 0$.

RECUPERO DEL PRIMO COMPITINO, 15 GENNAIO 2007

PRIMA PARTE, GRUPPO A

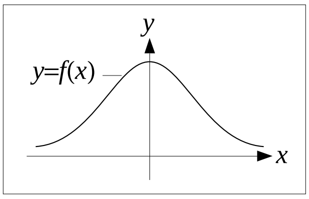
1. Determinare il dominio della funzione $\sqrt{4-x^2}$.
2. Calcolare $z := \left(\frac{3+i}{1-3i}\right)^2$.
3. Scrivere le coordinate polari dei seguenti punti dati in coordinate cartesiane: a) $A := (-2, 0)$; b) $B := (0, -1)$; c) $C := (-1, 1)$.
4. Trovare il valore massimo assunto dalla funzione $f(x) := x - x^2$.
5. Calcolare la derivata delle seguenti funzioni: a) $e^{-\sin x}$; b) $3\log(2x) + \log(1/x^3)$.
6. Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim_{x\to+\infty} xe^{-x}$; b) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sin(x^2)}$; c) $\lim_{x\to+\infty} \cos(e^{1-x})$.
7. Sia $f(x)$ la funzione il cui grafico è dato nella figura accanto. Risolvere *graficamente* la disequazione $f(x) \le x$.



8. Disegnare il grafico di $f(x) := -e^{-x}$.

PRIMA PARTE, GRUPPO B

1. Determinare il dominio della funzione $\sqrt{x^2-4}$.
2. Calcolare $z := \left(\frac{4+2i}{1-2i}\right)^2$.
3. Scrivere le coordinate polari dei seguenti punti dati in coordinate cartesiane: a) $A := (0, -2)$; b) $B := (-1, 0)$; c) $C := (1, -1)$.
4. Trovare il valore minimo assunto dalla funzione $f(x) := x^2 - x$.
5. Calcolare la derivata delle seguenti funzioni: a) $e^{-\cos x}$; b) $4\log(3x) + \log(1/x^4)$.
6. Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim_{x\to 0^+} x\log x$; b) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1-\cos x}$; c) $\lim_{x\to+\infty} \sin(e^{2-x})$.
7. Sia $f(x)$ la funzione il cui grafico è dato nella figura accanto. Risolvere *graficamente* la disequazione $f(x) \ge x$.



8. Disegnare il grafico di $f(x) := \frac{1}{x-1}$.

SECONDA PARTE, GRUPPO A

1. Risolvere la disequazione $\log\left(\frac{1}{2e^2 - x^2}\right) \ge -2$.
2. Si consideri la funzione $f(x) := \exp\left(\frac{1}{2+x^2}\right)$.

   a) Trovare (ammesso che esistano) il valore massimo e minimo di $f(x)$;

   b) fare un disegno approssimativo del grafico di $f(x)$;

   c) determinare al variare di $a \in \mathbb{R}$ il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = a$.

SECONDA PARTE, GRUPPO B

1. Risolvere la disequazione $\log\left(\dfrac{1}{4e^2 - x^2}\right) \geq -2$.

2. Si consideri la funzione $f(x) := \exp\left(\dfrac{2}{1+x^2}\right)$.

   a) Trovare (ammesso che esistano) il valore massimo e minimo di $f(x)$;
   b) fare un disegno approssimativo del grafico di $f(x)$;
   c) determinare al variare di $a \in \mathbb{R}$ il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = a$.

Secondo compitino, 9 febbraio 2007

Prima parte, gruppo A

1. Calcolare la derivata della funzione $f(x) := \log\left(\dfrac{2}{(x^2-1)^3}\right)$.
2. Scrivere lo sviluppo di Taylor in 0 all'ordine 5 (incluso) della funzione $\log(1-x)$.
3. Calcolare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $1 - \cos(x^3)$.
4. Calcolare la primitiva $\displaystyle\int 3x^2(1 + 3\log x)\,dx$. [*Suggerimento: integrare per parti.*]
5. Calcolare $\displaystyle\int_{-1}^{1/2} (1-2x)^{-1/2}\,dx$. [*Suggerimento: usare un cambio di variabile.*]
6. a) Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $x^4 \le y \le 2 - x^4$.
   b) Calcolare l'area di A.
7. a) Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale $\dot y = y^2 \sin t$.
   b) Tra le soluzioni di cui sopra trovare quella che soddisfa la condizione iniziale $y(0) = 1$.
8. Dire per quali valori dei parametri a, b la funzione $y = at^b$ risolve l'equazione differenziale $t^2\ddot y - 2y = 0$.

Prima parte, gruppo B

1. Calcolare la derivata della funzione $f(x) := \log\left(\dfrac{2}{(x^3-1)^2}\right)$.
2. Scrivere lo sviluppo di Taylor in 0 all'ordine 4 (incluso) della funzione e^{2x}.
3. Calcolare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $e^{2x^4} - 1$.
4. Calcolare la primitiva $\displaystyle\int 4x^3(1 + 4\log x)\,dx$. [*Suggerimento: integrare per parti.*]
5. Calcolare $\displaystyle\int_{-1}^{1/2} (1-2x)^{-1/2}\,dx$. [*Suggerimento: usare un cambio di variabile.*]
6. a) Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $x^4 - 2 \le y \le -x^4$.
   b) Calcolare l'area di A.
7. a) Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale $\dot y = y^2 \cos t$.
   b) Tra le soluzioni di cui sopra trovare quella che soddisfa la condizione iniziale $y(0) = 1$.
8. Dire per quali valori dei parametri a, b la funzione $y = at^b$ risolve l'equazione differenziale $t^2\ddot y - 6y = 0$.

Seconda parte, gruppo A

1. a) Calcolare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) := e^{x^2} - \cos(2x)$.
   b) Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos(2x)}{x \sin x}$.
   c) Calcolare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) := e^{-2x^2} - \cos(2x)$.
2. a) Determinare la primitiva $\displaystyle\int x^2 e^{-2x}\,dx$. [*Suggerimento: integrare per parti.*]

b) Calcolare $\displaystyle\int_0^\infty x^2 e^{-2x}\,dx$.
c) Disegnare l'insieme A dei punti (x,y) tali che $|x+y|,\ |x-y| \leq 2$.
d) Calcolare il volume dell'insieme V dei punti (x,y,z) tali che $|x+y|,\ |x-y| \leq ze^{-z}$.

3. a) Trovare la soluzione generale dell'equazione lineare omogenea $\ddot{y}+2\dot{y}+5y=0$.
b) Trovare una soluzione particolare dell'equazione $\ddot{y}+2\dot{y}+5y=10e^{-t}$ della forma $y=ae^{-t}$.
c) Trovare la soluzione generale dell'equazione lineare non omogenea $\ddot{y}+2\dot{y}+5y=10e^{-t}$.

SECONDA PARTE, GRUPPO B

1. a) Calcolare la parte principale per $x\to 0$ di $f(x) := e^{-x^2} - \cos(4x)$.
b) Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^2} - \cos(4x)}{x\sin x}$.
c) Calcolare la parte principale per $x\to 0$ di $f(x) := e^{-8x^2} - \cos(4x)$.

2. a) Determinare la primitiva $\displaystyle\int x^2 e^{-4x}\,dx$. [*Suggerimento: integrare per parti.*]
b) Calcolare $\displaystyle\int_0^\infty x^2 e^{-4x}\,dx$.
c) Disegnare l'insieme A dei punti (x,y) tali che $|x+y|,\ |x-y| \leq 2$.
d) Calcolare il volume dell'insieme V dei punti (x,y,z) tali che $|x+y|,\ |x-y| \leq ze^{-2z}$.

3. a) Trovare la soluzione generale dell'equazione lineare omogenea $\ddot{y}+4\dot{y}+5y=0$.
b) Trovare una soluzione particolare dell'equazione $\ddot{y}+4\dot{y}+5y=-2e^{-t}$ della forma $y=ae^{-t}$.
c) Trovare la soluzione generale dell'equazione lineare non omogenea $\ddot{y}+4\dot{y}+5y=-2e^{-t}$.

Scritto del I appello, 11 aprile 2007

Prima parte, gruppo A

1. Determinare il dominio della funzione $y = \sqrt{3 - \log x}$.
2. Calcolare la primitiva $\displaystyle\int 4x^3 + 2e^{-2x}\, dx$.
3. Scrivere la soluzione generale dell'equazione differenziale $\ddot{y} + 2\dot{y} + 5y = 0$.
4. Sia data una sequenza casuale di tre lettere dell'alfabeto italiano. Qual è la probabilità che siano tre vocali?
5. Calcolare media e varianza dei seguenti dati numerici: 2,2 ; 2,3 ; 2,2 ; 2,5 ; 1,8.
6. a) Calcolare il prodotto scalare dei vettori $(-1, 2, a)$ e $(a, 3, 2)$.
   b) Dire per quali valori del parametro a i due vettori sono ortogonali.
7. Si tirano due dadi. Qual è la probabilità (condizionale) di ottenere come somma 5 sapendo che il primo dado ha dato un numero pari?
8. Disegnare il grafico della funzione $y = 1 - e^x$.

Prima parte, gruppo B

1. Calcolare la primitiva $\displaystyle\int 3x^2 + 8e^{-4x}\, dx$.
2. Determinare il dominio della funzione $y = \sqrt{2 - \log x}$.
3. Scrivere la soluzione generale dell'equazione differenziale $\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = 0$.
4. Sia data una sequenza casuale di tre lettere dell'alfabeto italiano. Qual è la probabilità che siano tre consonanti?
5. a) Calcolare il prodotto scalare dei vettori $(1, 2, a)$ e $(a, 2, -2)$.
   b) Dire per quali valori del parametro a i due vettori sono ortogonali.
6. Calcolare media e varianza dei seguenti dati numerici: 1,9 ; 2,3 ; 2,3 ; 2,6 ; 2,4.
7. Si tirano due dadi. Qual è la probabilità (condizionale) di ottenere come somma 6 sapendo che il primo dado ha dato un numero dispari?
8. Disegnare il grafico della funzione $y = e^{-x} - 1$.

Seconda parte, gruppo A

Scritto del I appello: esercizi 1, 2, 3 e 4. III compitino: esercizi 3, 4 e 5.

1. Dato $a \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione $f(x) := x^2 \sin(3x^2) + a \log(1 + x^4)$.
   a) Determinare la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0$ quando $a \neq -3$.
   b) Determinare la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0$ quando $a = -3$.
   c) Calcolare il limite per $x \to 0$ di $x^{-6} f(x)$.
2. a) Dimostrare che $e^{2x} \geq 3x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. [*Suggerimento: studiare* $f(x) := e^{2x} - 3x$.]
   b) Per quali numeri reali $c > 0$ si ha che $e^{2x} \geq cx$ per ogni $x \in \mathbb{R}$?
3. Sull'intervallo $X := [0, +\infty)$ si consideri la funzione $p(x) := cxe^{-2x}$, con c numero positivo.
   a) Per quale c tale funzione rappresenta una distribuzione di probabilità su X?
   b) Preso c come al punto a), calcolare valor medio e varianza della variabile aleatoria e^x.

4. Viene presa una sequenza casuale di 7 lettere comprese tra A, B, C, D. Calcolare la probabilità dei seguenti eventi:
   a) nella sequenza non appare mai la lettera A;
   b) la lettera A appare esattamente due volte;
   c) non ci sono due lettere consecutive uguali.

5. Si costruisce un dado a forma di parallelepipedo a base quadrata, con altezza leggermente superiore al lato di base. Sulle due basi è disegnato il numero 1, mentre sulle rimanenti quattro facce è disegnato il numero 2. Indichiamo con p la probabilità che lanciando il dado esca il numero 1.
   a) Calcolare (in funzione di p) media e varianza del numero che si ottiene lanciando il dado.
   b) Supponendo di sapere che la media è 1,7, quanto vale p?
   c) Su 1000 lanci la media dei numeri ottenuti è effettivamente 1,7. Dare una stima dal basso della probabilità che il valore trovato al punto b) approssimi p con errore inferiore a 0,05.

SECONDA PARTE, GRUPPO B

Scritto del I appello: esercizi 1, 2, 3 e 4. III compitino: esercizi 3, 4 e 5.

1. Dato $a \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione $f(x) := 3x^2 \sin(2x^2) + a \log(1 + x^4)$.
   a) Determinare la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0$ quando $a \neq -6$.
   b) Determinare la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0$ quando $a = -6$.
   c) Calcolare il limite per $x \to 0$ di $x^{-4} f(x)$.

2. a) Dimostrare che $e^{3x} \geq 4x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. [*Suggerimento: studiare* $f(x) := e^{3x} - 4x$.]
   b) Per quali numeri reali $c > 0$ si ha che $e^{3x} \geq cx$ per ogni $x \in \mathbb{R}$?

3. Sull'intervallo $[0, +\infty)$ si consideri la funzione $p(x) := cxe^{-x}$ con c numero positivo.
   a) Per quale $c > 0$ tale funzione rappresenta una distribuzione di probabilità su X?
   b) Preso c come al punto a), calcolare valor medio e varianza della variabile aleatoria $e^{x/2}$.

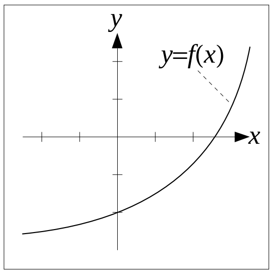
4. Viene presa una sequenza casuale di 8 lettere comprese tra A, B, C, D, E. Calcolare la probabilità dei seguenti eventi:
   a) nella sequenza non appare mai la lettera A;
   b) la lettera A appare esattamente due volte;
   c) non ci sono due lettere consecutive uguali.

5. Si costruisce un dado a forma di parallelepipedo a base quadrata, con altezza leggermente inferiore al lato di base. Sulle due basi è disegnato il numero 2, mentre sulle rimanenti quattro facce è disegnato il numero 1. Indichiamo con p la probabilità che lanciando il dado esca il numero 2.
   a) Calcolare (in funzione di p) media e varianza del numero che si ottiene lanciando il dado.
   b) Supponendo di sapere che la media è 1,4, quanto vale p?
   c) Su 1000 lanci la media dei numeri ottenuti è effettivamente 1,4. Dare una stima dal basso della probabilità che il valore trovato al punto b) approssimi p con errore inferiore a 0,05.

Scritto del II appello, 6 giugno 2007

Prima parte

1. Determinare le coordinate polari r e α di ciascuno dei seguenti punti del piano, espressi in coordinate cartesiane: a) $(-3,0)$; b) $(-2,2)$; c) $(1,-\sqrt{3})$.
2. In un gruppo di 20 ragazzi, 10 hanno dieci anni, 5 ne hanno tredici e i restanti ne hanno quindici. Qual è l'età media in questo gruppo? Qual è la varianza dell'età?
3. Calcolare la derivata delle seguenti funzioni: a) $\log(\sqrt[3]{x^3+1})$; b) $(\cos x)^2 + (\sin x)^2$
4. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_0^2 x\cos(x^2)\,dx$ (usare un cambio di variabile).
5. Risolvere l'equazione differenziale $\dot y = 3t^2 e^{-y}$ con dato iniziale $y(0) = 1$.
6. Si prende a caso una sigla di quattro lettere (dell'alfabeto italiano). Qual è la probabilità che la prima e l'ultima lettera siano G?
7. Calcolare l'inversa della matrice $A := \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.
8. Sia f la funzione il cui grafico è dato nella figura accanto. Indicare le soluzioni della disequazione $f(x) \geq -x$.



Seconda parte

1. a) Risolvere l'equazione differenziale $\ddot y + 2\dot y + 5y = 0$.
   b) Trovare una soluzione particolare di $\ddot y + 2\dot y + 5y = 5t - 3$ della forma $y = at + b$.
   c) Trovare la soluzione di $\ddot y + 2\dot y + 5y = 5t - 3$ che soddisfa $y(0) = 0$ e $\dot y(0) = -2$.
2. Si consideri un triangolo T nel piano xy i cui primi due vertici sono $(0,0)$ e $(1,1)$, mentre il terzo vertice P appartiene al grafico della funzione $y = e^x$.
   a) Calcolare l'area di T in funzione dell'ascissa del terzo vertice.
   b) Trovare la posizione del terzo vertice P per cui l'area di T è minima.
3. Si lancia una moneta per 5 volte. Calcolare la probabilità dei seguenti eventi:
   a) esce testa per i primi tre lanci;
   b) esce testa per esattamente tre lanci;
   c) esce testa per esattamente tre lanci e tutti consecutivi;
   d) esce testa per almeno tre lanci consecutivi.
4. Si prende un punto a caso P sulla circonferenza con centro nell'origine e raggio 1. Calcolare il valore atteso (o valor medio) e la varianza dell'ascissa di P.

Scritto del III appello, 11 luglio 2007

Prima parte

1. Calcolare $\dfrac{2+i}{2-i}$.
2. Determinare il dominio della funzione $\log(1-e^x)$.
3. Scrivere lo sviluppo di Taylor di ordine 4 nell'origine per la funzione $\cos(2x^2)$.
4. Calcolare la primitiva $\displaystyle\int 9x^2 \log x \, dx$ (integrare per parti).
5. Risolvere l'equazione differenziale $\ddot{y} - 4y = 0$ con condizioni iniziali $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 4$.
6. Tirando due dadi, qual è la probabilità di ottenere un numero minore o uguale a 4?
7. Calcolare il prodotto di matrici $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
8. Disegnare il grafico di $\dfrac{1}{2+x}$.

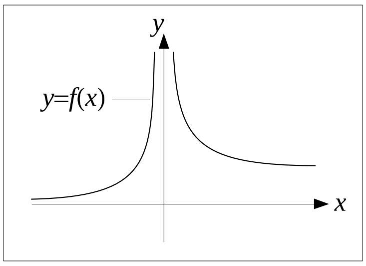
Seconda parte

1. Si consideri la funzione $f(x) := xe^{-x}$.
   a) Calcolare il limite di $f(x)$ per x che tende a $+\infty$ e $-\infty$.
   b) Nel caso che esistano, determinare il valore massimo e minimo di f.
   c) Fare un disegno approssimativo del grafico di f.
   d) Per quale c la funzione $c \cdot f(x)$ rappresenta una distribuzione di probabilità su $[0, +\infty)$?
2. Si estraggono due biglie a caso da un sacchetto che ne contiene 4 nere ed n rosse.
   a) Per $n = 4$, calcolare la probabilità che le due biglie siano dello stesso colore.
   b) Per $n = 4$, calcolare la probabilità che le due biglie siano di colori diversi.
   c) Supponiamo che la probabilità che le due biglie siano di colori diversi sia $5/9$. Quanto vale n?
3. Di un certo insieme di numeri reali si sa solamente quanto segue: il 60% è compreso tra 10 e 11, il 30% è compreso tra 11 e 14, e il rimanente 10% è compreso tra 5 e 10.
   a) è possibile che la media di questi numeri sia 10?
   b) è possibile che la media di questi numeri sia 12?
   c) Determinare l'intervallo dei valori ammissibili per la media.

Scritto del IV appello, 11 settembre 2007

Prima parte

1. Il 60% degli alunni di una classe ha 10 anni, il 30% ne ha 11, e i restanti ne hanno 9.
   a) Qual è l'età media di questa classe?
   b) Qual è la varianza dell'età in questa classe?
2. Calcolare la derivata di e^{-x^2} e di $\dfrac{(2x)^3}{\sqrt{x^5}}$.
3. Calcolare $\displaystyle\int_0^\pi x \cos x \, dx$ (integrare per parti).
4. Tirando tre dadi, qual è la probabilità di ottenere tre numeri pari?
5. Calcolare i seguenti limiti: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{100} 2^{-x}$, $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(e^x)}{e^{x^2}}$.
6. Quante sigle si possono ottenere usando tre lettere distinte dell'alfabeto italiano?
7. Calcolare l'inversa della matrice $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.
8. Indicare nella figura accanto l'insieme degli x che risolvono la disequazione $x \le f(x)$.



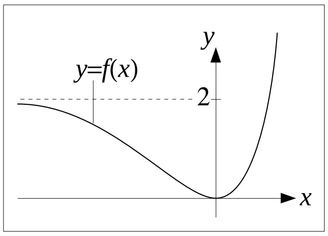
Seconda parte

1. a) Fare un disegno approssimativo del grafico della funzione
$$f(x) := \frac{x}{(1+x)^2} .$$
   b) Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) che soddisfano le disequazioni $0 \le y \le f(x)$.
   c) Calcolare l'area di A.
2. Dato a parametro reale, si consideri l'equazione differenziale
$$\ddot{y} + 2\dot{y} + ay = 0 . \tag{1}$$
   a) Determinare le soluzioni di (1) per $a = -3$.
   b) Determinare le soluzioni di (1) per $a = 2$.
   c) Determinare le soluzioni di (1) per $a = 1$.
   d) Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ tutte le soluzioni $y(t)$ di (1) tendono a 0 per $t \to +\infty$.
3. Si estrae a caso una biglia da un sacchetto che ne contiene 5 con sopra disegnato il numero 0, m con il numero 1, ed n con il numero 4.
   a) Determinare n sapendo che $m = 4$ e che il valore atteso dell'estrazione è 4/3.
   b) Determinare m ed n sapendo che il valore atteso dell'estrazione è 3/2 e la varianza è 9/4.

Scritto del V appello, 8 gennaio 2008

Prima parte

1. Tirando due dadi, qual è la probabilità di ottenere come somma 11 o più?
2. Sette amici decidono di formare una squadra per un torneo di calcetto a cinque (cioè in cui ogni squadra mette in campo cinque giocatori). Quante diverse formazioni possono fare?
3. Calcolare la derivata della funzione $\log\left(\sqrt[3]{1-x^3}\right)$.
4. Calcolare le coordinate polari dei seguenti punti (espressi in coordinate cartesiane): a) $(-1,-1)$; b) $(0,-2)$; c) $(1,-\sqrt{3})$.
5. Determinare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{y}-2y=0$ tale che $y(0)=-2$.
6. Calcolare la media e la varianza della seguente famiglia di numeri: 3,1 3,4 2,8 2,9 3,0 3,9 2,9 2,8 3,6 2,6
7. Sia $y=f(x)$ la funzione il cui grafico è dato nella figura accanto. Determinare graficamente le soluzioni della disequazione $f(x)\leq 1$.



8. Calcolare $\displaystyle\int_0^{\infty} 4e^{-2x}\,dx$.

Seconda parte

1. Si consideri la funzione $f(x) := -\dfrac{x^3+2}{x^4}$.
   a) Determinare i limiti di $f(x)$ a $\pm\infty$ ed in 0.
   b) Fare un disegno approssimativo del grafico di $f(x)$.
   c) Determinare al variare del parametro $a>0$ il numero di soluzioni dell'equazione $f(x)=a$.
2. a) Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale $\ddot{y}+4y=0$.
   b) Trovare una soluzione particolare dell'equazione differenziale $\ddot{y}+4y=10e^{-x}$.
   c) Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\ddot{y}+4y=10e^{-x}$ che soddisfa le condizioni iniziali $y(0)=2$ e $\dot{y}(0)=0$.
   [*Per il punto b) si suggerisce di cercare la soluzione tra i multipli di* e^{-x}.]
3. Il signor A ed il signor B fanno la seguente scommessa: lanciano 10 monete, e se escono al più tre teste allora B paga ad A n euro, altrimenti A paga a B 10 euro. Per quali n al signor A conviene giocare?

Soluzioni

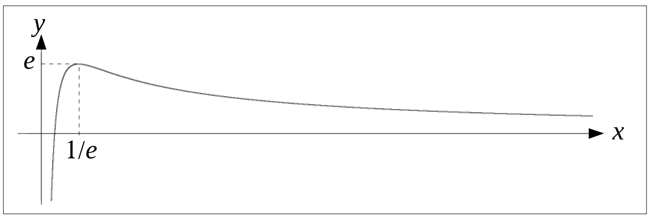
Compitino di prova, 17 novembre 2006

Prima parte

1. $2^{(x^2)} \leq 4 \Leftrightarrow 2^{(x^2)} \leq 2^2 \Leftrightarrow x^2 \leq 2 \Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$.
2. L'argomento della radice deve essere positivo: $\log(x^3) \geq 0 \Leftrightarrow x^3 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 1$.
3. a) $\begin{cases} r = \sqrt{2} \\ \alpha = 3\pi/4 \end{cases}$; b) $\begin{cases} r = 2 \\ \alpha = \pi \end{cases}$; c) $\begin{cases} r = 2 \\ \alpha = -\pi/3 \end{cases}$.
4. $z_{1,2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 5}}{2} = -2 \pm i$.
5. a) $\left(e^{-x^2}\right)' = -2xe^{-x^2}$; b) $\left(\dfrac{\log(x^2)}{\log x}\right)' = \left(\dfrac{2\log x}{\log x}\right)' = (2)' = 0$; c) $\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)' = \dfrac{-4x}{(x^2-1)^2}$.
6. Siccome il logaritmo è una funzione crescente, i punti di massimo e minimo di $f(x)$ sono gli stessi della funzione $x^2 + 2x + 3$. Trattandosi di una parabola rivolta verso l'alto, c'è solo il punto di minimo in $x = -1$. Pertanto $x = -1$ è il punto di minimo di $f(x)$ mentre il valore minimo è $f(-1) = \log 2$.
7. a) Cambio di variabile e poi de L'Hôpital: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(1+x^2)}{x^2} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\log(1+t)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\frac{1}{1+t}}{1} = 1$;
   b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\log x}{\sqrt{x}} = 0$ perché $\log x \ll x^{1/2} = \sqrt{x}$ per $x \to +\infty$;
   c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin\left(\dfrac{2}{x} + 2^{-x}\right) = \sin\left(\dfrac{2}{+\infty} + 2^{-\infty}\right) = \sin(0+0) = 0$.
8. Si tratta del grafico di $\sin x$ traslato in alto di 1 e poi a sinistra di $\pi/2$.

Seconda parte

1. a) Il dominio della funzione $f(x)$ è la semiretta degli $x > 0$. Siccome il denominatore è sempre positivo, $f(x) \geq 0$ se e solo se $2 + \log x \geq 0$, ovvero $x \geq e^{-2} = 1/e^2$. Si vede inoltre il limite di f a $+\infty$ è $f(+\infty) = 0$ mentre quello in 0 è $f(0^+) = -\infty$ (in particolare $f(x)$ assume valori arbitrariamente grandi in modulo e negativi, e quindi non esiste un valore minimo). Siccome
$$f'(x) = -\frac{1 + \log x}{x^2} \ ,$$
si ha che $f'(x) \geq 0$ se e solo se $1 + \log x \leq 0$, ovvero $x \leq e^{-1} = 1/e$; in altre parole f cresce per $0 < x \leq 1/e$ e decresce per $1/e \leq x$. A questo punto possiamo disegnare sommariamente il grafico di f (vedi figura).

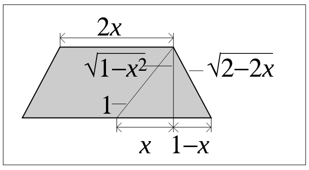


b) Da quanto detto al punto a) segue che $1/e$ è il punto di massimo assoluto di f, ed il valore massimo è $f(1/e) = e$. Come si è già detto, il valore minimo non c'è (o se si preferisce è $-\infty$).
c) Per $x > 0$, la disequazione $3x \geq 2 + \log x$ equivale a $3 \geq f(x)$ (basta dividere entrambe i termini per x). Pertanto, chiedere se $3 \geq f(x)$ per ogni x equivale a chiedere se 3 è maggiore

del valore massimo assunto da f; siccome tale valore è e, ed effettivamente 3 è maggiore di $e \simeq 2{,}7 \pm 10^{-1}$, la risposta è affermativa.

d) Procedendo come al punto c) si vede che i valori di a cercati sono tutti e soli gli $a \geq e$.

2. Indichiamo con x la metà della lunghezza della base minore di T. Utilizzando il teorema di Pitagora si ottiene che l'altezza del trapezio T è pari a $\sqrt{1-x^2}$, mentre il lato obliquo è lungo $\sqrt{2-2x}$ (vedi figura). A questo punto possiamo calcolare sia l'area A che il perimetro P in funzione di x:



$$A(x) = (1+x)\sqrt{1-x^2} \quad \text{e} \quad P(x) = 2\big(1+x+\sqrt{2-2x}\big) \ .$$

a) Studiamo il comportamento di $A(x)$ per x compreso tra 0 ed 1 (i valori di x al di fuori di questo intervallo non ci interessano perché non corrispondono ad alcun trapezio). Siccome

$$A'(x) = \frac{1-x-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} \ ,$$

si vede che $A'(x) \geq 0$ quando $2x^2 + x - 1 \leq 0$, cioè quando $0 \leq x \leq 1/2$ (ricordo che non ci interessa cosa succede al di fuori dell'intervallo $[0,1]$). Dunque $A(x)$ cresce per $0 \leq x \leq 1/2$ e decresce per $1/2 \leq x \leq 1$.

Dunque il punto di massimo assoluto di $A(x)$ è $x = 1/2$ – corrispondente al trapezio ottenuto dividendo a metà un esagono regolare – e il valore massimo è $A(1/2) = 3\sqrt{3}/4 \simeq 1{,}3 \pm 10^{-3}$. Confrontando i valori di $A(x)$ per $x = 0$ e per $x = 1$ si ottiene che il punto di minimo è $x = 1$ – corrispondente ad un trapezio "degenere" di altezza nulla – e il valore minimo è ovviamente $A(1) = 0$.

b) Studiamo il comportamento di $P(x)$ per x compreso tra 0 ed 1. Siccome

$$P'(x) = 2\frac{\sqrt{2-2x}-1}{\sqrt{2-2x}} \ ,$$

si vede che $P'(x) \geq 0$ quando $\sqrt{2-2x} - 1 \geq 0$, ovvero per $0 \leq x \leq 1/2$. Quindi $P(x)$ cresce per $0 \leq x \leq 1/2$ e decresce per $1/2 \leq x \leq 1$. In particolare $x = 1/2$ è il punto di massimo assoluto di $P(x)$, ed il valore massimo è $P(1/2) = 5$. Invece il punto di minimo è $x = 0$ – corrispondente ad un trapezio "degenere" con base minore nulla, cioè un triangolo – ed il valore minimo è $P(0) = 2(1+\sqrt{2})$.

Commenti

- Prima parte, esercizio 6. L'esercizio poteva essere svolto anche senza accorgersi che i punti di minimo di $f(x)$ coincidono con quelli del polinomio $x^2 + 2x + 3$. Derivando f si ottiene in fatti

$$f'(x) := \frac{2x+2}{x^2+2x+3}$$

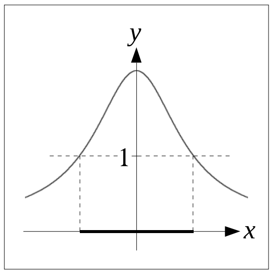
  e dunque è facile vedere che $f'(x)$ si annulla solo per $x = -1$. A questo punto, se si dà per scontato che esiste un punto di minimo (come il testo dell'esercizio suggerisce), questo deve per forza essere $x = -1$.

- Seconda parte, esercizio 1. Per un errore di trascrizione, il testo originale dei punti c) e d) conteneva $1 + \log x$ al posto di $2 + \log x$, cosa che rendeva questi due punti parzialmente scollegati dai punti a) e b). Invece era mia intenzione che c) e d) venissero risolti ricorrendo a quanto fatto in a) e b).

Primo compitino, 23 novembre 2006

Prima parte, gruppo A

1. Deve essere $\dfrac{1}{1+x}$, ovvero $x+1>0$, ovvero $x>-1$.
2. $z := 2i\dfrac{1+i}{1-i} - 3 = 2i\dfrac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} - 3 = 2i\dfrac{1+i^2+2i}{1-i^2} - 3 = \dfrac{2i\cdot 2i}{2} - 3 = -5$.
3. $100^{-0{,}1} < 2 < \log(20)$.
4. L'equazione della retta passante per (x_0, y_0) è $y = m(x-x_0)+y_0$; nel caso specifico $x_0 := 1$, $y_0 := e^1 = e$, mentre m deve essere uguale alla derivata di e^x calcolata in x_0, ovvero $m := e^1 = e$. Pertanto la retta in oggetto ha equazione $y = e(x-1)+e = ex$.
5. a) $(\sin(e^x))' = \cos(e^x)\,e^x$; b) $\left(\dfrac{e^{x^2+x}}{e^{x^2}}\right)' = \left(e^{x^2+x-x^2}\right)' = (e^x)' = e^x$.
6. a) 0, usando il cambio di variabile $t = \log x$; b) $+\infty$; c) $\dfrac{e}{2}$, usando de L'Hôpital.
7. L'insieme delle soluzioni corrisponde al segmento in neretto nella figura accanto.
8. Si tratta del grafico di e^x riflesso rispetto all'asse y e poi traslato in basso di 1.



Prima parte, gruppo B

1. $\{x :\ x < 1\}$.
2. $z = -3i$.
3. $(1{,}01)^{-1} \le 1{,}5 \le \log(10)$.
4. $y = x - 1$.
5. a) $-\sin(e^x)\,e^x$; b) $\dfrac{6x}{x^2+1}$.
6. a) $-\dfrac{1}{4\pi}$, usando de L'Hôpital; b) 0, usando la sostituzione $t = \log x$; c) $-\infty$;
7. Analogo al gruppo A.
8. Si tratta del grafico di $1/x$ traslato a sinistra di 1.

Prima parte, gruppo C

1. $\{x :\ x > 1\}$.
2. $z = 2i$.
3. $(1{,}01)^{-1} < \log(10) < 4$.
4. $y = \dfrac{x}{2} + \log 2 - 1$.
5. a) $e^{\sin x}\cos x$; b) $-e^{-x}$.
6. a) $+\infty$; b) $+\infty$, usando la sostituzione $t = \log x$; c) $\dfrac{1}{2\pi}$, usando de L'Hôpital.
7. Analogo al gruppo A.

8. Si tratta del grafico di $1/x$ traslato a destra di 1.

Prima parte, gruppo D

1. $\{x : \ x > -2\}$.
2. $z = -2$.
3. $(1{,}01)^{-1} < \log(10) < 4$.
4. $y = e^2(x-1)$.
5. a) $\dfrac{-4x}{x^2+1}$; b) $\cos(e^x)\, e^x$.
6. a) $-\infty$, usando la sostituzione $t = \log x$; b) 1; c) $\dfrac{2}{e}$, usando de L'Hôpital.
7. Analogo al gruppo A.
8. Si tratta del grafico di e^x traslato in basso di 1.

Seconda parte, gruppo A

1. a) Tenuto conto del fatto che $\cos(\pi/3) = 1/2$, dal grafico della funzione $\cos x$ si ottiene subito che l'insieme S delle soluzioni della disequazione in oggetto è l'unione dell'intervallo $I_0 := [-\pi/3, \pi/3]$ e di tutti gli intervalli I_k ottenuti traslando I_0 di un multiplo intero di 2π, vale a dire $I_k := [2k\pi - \pi/3, 2k\pi + \pi/3]$ con $k \in \mathbb{Z}$.
   b) L'insieme T delle soluzioni della disequazione $\cos(2\pi/(1+x^2)) \geq 1/2$ coincide con l'insieme degli x tali che $2\pi/(1+x^2)$ appartiene all'insieme S definito al punto a). Siccome S è l'unione degli intervalli I_k, T è l'unione degli insiemi J_k degli x tali che $2\pi/(1+x^2)$ appartiene I_k. Cominciamo a determinare l'insieme J_0 degli x tali che $2\pi/(1+x^2)$ appartiene I_0, ovvero che soddisfano contemporaneamente le disequazioni
   $$-\frac{\pi}{3} \leq \frac{2\pi}{1+x^2} \leq \frac{\pi}{3} \ .$$
   Tenuto conto del fatto che $1+x^2$ è sempre un numero positivo, facendo le dovute semplificazioni la prima disequazione diventa $-1-x^2 \leq 6$, ovvero $x^2 - ge - 7$, che è soddisfatta per ogni x reale. Invece la seconda disequazione diventa a $6 \leq 1+x^2$, cioè $5 \leq x^2$, cioè
   $$x \leq -\sqrt{5} \quad \text{oppure} \quad \sqrt{5} \leq x \ . \tag{1}$$
   L'insieme J_1 degli x tali che $2\pi/(1+x^2)$ appartiene I_1 consiste delle soluzioni di
   $$2\pi - \frac{\pi}{3} \leq \frac{2\pi}{1+x^2} \leq 2\pi + \frac{\pi}{3} \ .$$
   Facendo i conti si vede che la seconda disequazione è sempre soddisfatta, mentre la prima si riduce a $1+x^2 \leq 6/5$, cioè $x^2 \leq 1/5$, cioè
   $$-\frac{1}{\sqrt{5}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{5}} \ . \tag{2}$$
   Si verifica infine che preso k diverso da 0 e 1 non esiste alcun x tale che $2\pi/(1+x^2)$ appartiene I_k, ovvero J_k è un insieme vuoto (ometto i dettagli). Pertanto le soluzioni x della disequazione di partenza sono date dall'unione delle soluzioni in (1) e in (2), ovvero
   $$x \leq -\sqrt{5} \quad \text{oppure} \quad -\frac{1}{\sqrt{5}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{oppure} \quad \sqrt{5} \leq x \ .$$

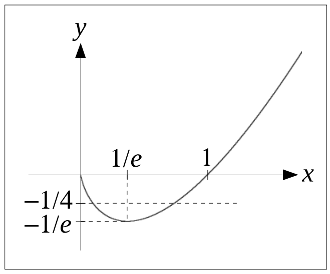
2. a) Il limite di $f(x)$ per $x \to 0^+$ da luogo ad una forma indeterminata del tipo $0 \cdot (-\infty)$, che può essere risolta riscrivendola come una forma del tipo $(-\infty)/(+\infty)$ e ricorrendo quindi al Teorema di de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0 \ .$$

Il limite di $f(x)$ per $x \to +\infty$ non presenta problemi: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = (+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty$.

b) $f'(x) = \log x + 1$ e $f''(x) = 1/x$.

c), d) Il dominio di $f(x)$ è la semiretta $\{x > 0\}$. Studiando il segno di $f(x)$ si vede che $f(x) \geq 0$ per $x \geq 1/e$. Studiando il segno di $f'(x)$ si vede che $f(x)$ è (strettamente) decrescente per $0 < x < 1/e$ e (strettamente) crescente per $1/e, x$. In particolare $1/e$ è il punto di minimo assoluto di $f(x)$; il valore minimo è quindi $f(1/e) = -1/e$. Invece non ci sono punti di massimo (o se si preferisce, l'estremo superiore dei valori di f è $+\infty$). Infine, la derivata seconda è sempre positiva, e quindi $f(x)$ è convessa. Utilizzando questa informazioni si ottiene il grafico nella figura accanto.



e) Siccome $e \leq 4$, allora $-1/4 \geq -1/e$; utilizzando il grafico disegnato in precedenza si vede che l'equazione $f(x) = -1/4$ ha esattamente due soluzioni.

3. a) Le soluzioni sono $z_{1,2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4\cdot 4}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}i$.

b) Tramite la sostituzione $z^4 = t$ ci si riconduce all'equazione $t^2 + 2t + 4 = 0$, che abbiamo già risolto al punto a): $t_{1,2} = -1 \pm \sqrt{3}i$. Quindi non ci resta che risolvere le equazioni $z^4 = t_1 = -1 + \sqrt{3}i$ e $z^4 = t_2 = -1 - \sqrt{3}i$.

Riscriviamo l'equazione $z^4 = -1 + \sqrt{3}i$ in forma trigonometrica; posto $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ otteniamo $z^4 = r^4(\cos(4\alpha) + i\sin(4\alpha))$ e siccome $-1 + \sqrt{3}i = 2(\cos(2\pi/3) + i\sin(2\pi/3))$ l'equazione diventa

$$r^4(\cos(4\alpha) + i\sin(4\alpha)) = 2(\cos(2\pi/3) + i\sin(2\pi/3)) \ ,$$

che equivale al sistema

$$\begin{cases} r^4 = 2 \\ 4\alpha = 2\pi/3 + 2k\pi \quad \text{con } k \text{ intero} \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} r = \sqrt[4]{2} \\ \alpha = \pi/6 + k\pi/2 \quad \text{con } k = 0,1,2,3. \end{cases} \tag{3}$$

Analogamente le quattro soluzioni di $z^4 = -1 - \sqrt{3}i$ sono date da

$$\begin{cases} r = \sqrt[4]{2} \\ \alpha = -\pi/6 + k\pi/2 \quad \text{con } k = 0,1,2,3. \end{cases} \tag{4}$$

Mettendo insieme le soluzioni in (3) e (4) e riscrivendole in forma cartesiana otteniamo infine le seguenti otto soluzioni

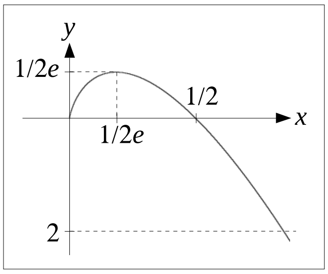
$$z_{1,\ldots,8} = \frac{1}{2^{3/4}}(\pm 1 \pm \sqrt{3}i); \ \frac{1}{2^{3/4}}(\pm\sqrt{3} \pm i) \ .$$

Primo compitino, 23 novembre 2006

Seconda parte, gruppo B

1. a) L'insieme delle soluzioni è l'unione degli intervalli $\left[2k\pi - \frac{\pi}{6}, 2k\pi + \frac{\pi}{6}\right]$ con $k \in \mathbb{Z}$.
   b) Le soluzioni sono $x \le -\sqrt{11}$, oppure $-1/\sqrt{11} \le x \le 1/\sqrt{11}$, oppure $\sqrt{11} \le x$.

2. a) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.
   b) $f'(x) = -\log(2x) + 1$ e $f''(x) = -1/x$.
   c) Il grafico di $f(x)$ è dato nella figura accanto.
   d) Il punto di massimo di $f(x)$ è $1/2e$ e il valore massimo è $f(1/2e) = 1/2e$. L'estremo inferiore dei valori di f è $-\infty$.
   e) L'equazione $f(x) = -2$ ha esattamente una soluzione (nella figura l'altezza della retta $y = -2$ non è riportata correttamente, ma questo non cambia la sostanza).

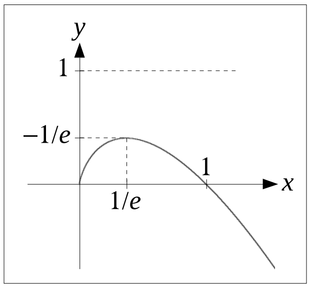


3. a) $z_{1,2} = -2 \pm 2\sqrt{3}i$.
   b) $z_{1,\dots,8} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\pm 1 \pm \sqrt{3}i)$; $\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm\sqrt{3} \pm i)$.

Seconda parte, gruppo C

1. a) L'insieme delle soluzioni è l'unione degli intervalli $\left[2k\pi - \frac{7\pi}{6}, 2k\pi + \frac{\pi}{6}\right]$ con $k \in \mathbb{Z}$.
   b) Le soluzioni sono $x \le -\sqrt{5}$, oppure $-1/\sqrt{5} \le x \le 1/\sqrt{5}$, oppure $\sqrt{5} \le x$.

2. a) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.
   b) $f'(x) = -\log x + 1$ e $f''(x) = -1/x$.
   c) Il grafico di $f(x)$ è dato nella figura accanto.
   d) Il punto di massimo di $f(x)$ è $1/e$ e il valore massimo è $f(1/e) = 1/e$. L'estremo inferiore dei valori di f è $-\infty$.
   e) Siccome $1 > 1/e$, l'equazione $f(x) = 1$ no ha soluzioni.



3. a) $z_{1,2} = -1 \pm i$.
   b) $z_{1,\dots,6} = 2^{1/6}(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ con $\alpha = \pm\frac{\pi}{4}; \pm\frac{11\pi}{12}; \pm\frac{5\pi}{12}$.

Seconda parte, gruppo D

1. a) L'insieme delle soluzioni è l'unione degli intervalli $\left[2k\pi - \frac{5\pi}{4}, 2k\pi + \frac{\pi}{4}\right]$ con $k \in \mathbb{Z}$.
   b) Le soluzioni sono $x \le -\sqrt{3}$, oppure $-1/\sqrt{3} \le x \le 1/\sqrt{3}$, oppure $\sqrt{3} \le x$.

2. Uguale al gruppo B.

3. a) $z_{1,2} = -2 \pm 2i$.
   b) $z_{1,\dots,6} = \sqrt{2}(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ con $\alpha = \pm\frac{\pi}{4}; \pm\frac{11\pi}{12}; \pm\frac{5\pi}{12}$.

Commenti

- Prima parte, esercizio 1. Molti hanno imposto come unica condizione che il denominatore della frazione fosse non nullo, dimenticando che il logaritmo è definito solo per i numeri positivi.

- Prima parte, esercizio 3. Molti hanno scritto che $\log(20) < 2$, mentre invece è vero il contrario, cioè $\log(20) > 2$, perché $20 > 9 = 3^2 > e^2$.
- Prima parte, esercizio 4. L'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto x_0 è $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. Molti hanno applicato questa formula in modo erroneo, mettendo $f'(x)$ al posto di $f'(x_0)$. L'errore è grave, anche perché così facendo si ottiene una funzione di x che non è un polinomio di primo grado, e quindi non rappresenta una retta!
- Prima parte, esercizio 5. Se non si usano le proprietà delle potenze e dei logaritmi per semplificare le funzioni date, il calcolo delle derivate corrispondenti può essere molto complicato.
- Prima parte, esercizio 7. L'insieme delle soluzione della disequazione data deve essere un sottoinsieme dell'asse delle x. Molti hanno invece indicato come insieme delle soluzioni pezzi del grafico o persino porzioni di piano.
- Seconda parte, esercizio 1. Molti hanno risposto correttamente il punto a), trovando un'unione infinita di intervalli i_k, ma al momento di risolvere il punto b) si sono limitati a trovare solo gli x tali che $2\pi/(x^2 + 1)$ (oppure $\pi/(x^2 + 1)$, a seconda della versione) appartiene a I_0.
- Seconda parte, esercizio 2a). Il limite di $f(x)$ per $x \to 0^+$ poteva essere anche ottenuto tramite il cambio di variabile $y = 1/x$, riconducendosi ad un limite noto:

  $$\lim_{x\to 0^+} x \log x = \lim_{y\to +\infty} \frac{1}{y} \log\left(\frac{1}{y}\right) = \lim_{y\to 0^+} \frac{-\log y}{y} = 0 \ .$$

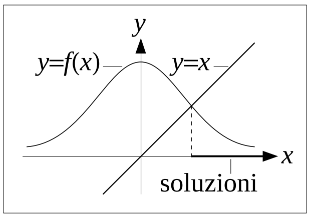
  Infine si poteva anche applicare il principio generale $\log x \ll x^{-1}$ per $x \to o^+$.
- Seconda parte, esercizio 2a). Nel calcolare il limite di $f(x)$ per $x \to 0^+$ usando il Teorema di de L'Hôpital, diverse persone hanno scritto che il rapporto

  $$\frac{1/x}{-1/x^2}$$

  tende a $+\infty$ quando $x \to 0^+$, mentre invece è uguale a $-x$, e quindi tende a 0.
- Seconda parte, esercizio 2c). Molte persone hanno fatto un disegno del grafico di $f(x)$ incompatibile con quello che loro stesse avevano scritto nel resto dell'esercizio. Questo è un errore grave.

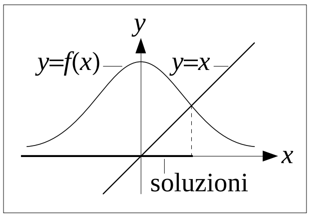
Prima parte, gruppo A

1. Deve essere $4 - x^2 \geq 0$, vale a dire $-2 \leq x \leq 2$.
2. $z = \left(\frac{3+i}{1-3i}\right)^2 = \left(\frac{(3+i)(1+3i)}{1-(3i)^2}\right)^2 = \left(\frac{10i}{10}\right)^2 = i^2 = -1$.
3. a) $r = 2$, $\alpha = \pi$; b) $r = 1$, $\alpha = -\pi/2$; c) $r = \sqrt{2}$, $\alpha = 3\pi/4$.
4. La derivata $f'(x) := 1 - 2x$ si annulla solo per $x = 1/2$. Dando per scontato che esista un punto di massimo allora deve essere questo, e quindi il valore massimo è $f(1/2) = 1/4$.
5. a) $\big(e^{-\sin x}\big)' = -e^{-\sin x}\cos x$;
   b) $\big[3\log(2x) + \log(1/x^3)\big]' = [3(\log 2 + \log x) - 3\log x]' = [3\log 2]' = 0$.
6. a) $\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$; b) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sin(x^2)} = 1$; c) $\lim_{x\to+\infty} \cos(e^{1-x}) = 1$.
7. Le soluzioni corrispondono alla semiretta marcata nella figura accanto.
8. Si tratta del grafico di e^x riflesso rispetto all'asse delle x e poi all'asse delle y.



Prima parte, gruppo B

1. Deve essere $x^2 - 4 \geq 0$, vale a dire $x \geq 2$ oppure $x \leq -2$.
2. $z = \left(\frac{4+2i}{1-2i}\right)^2 = \left(\frac{(4+2i)(1+2i)}{1-(2i)^2}\right)^2 = \left(\frac{10i}{5}\right)^2 = (2i)^2 = -4$.
3. a) $r = 2$, $\alpha = -\pi/2$; b) $r = 1$, $\alpha = \pi$; c) $r = \sqrt{2}$, $\alpha = -\pi/4$.
4. $f'(x) := 2x - 1$ si annulla solo per $x = 1/2$. Dando per scontato che esista un punto di minimo allora deve essere questo, e quindi il valore minimo è $f(1/2) = -1/4$.
5. a) $\big(e^{-\cos x}\big)' = e^{-\cos x}\sin x$;
   b) $\big[4\log(3x) + \log(1/x^4)\big]' = [4(\log 3 + \log x) - 4\log x]' = [4\log 3]' = 0$.
6. a) $\lim_{x\to 0^+} x\log x = 0$; b) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1-\cos x} = 2$; c) $\lim_{x\to+\infty} \sin(e^{2-x}) = 0$.
7. Le soluzioni corrispondono alla semiretta marcata nella figura accanto.
8. Si tratta del grafico di $1/x$ traslato a destra di 1.



Seconda parte, gruppo A

1. Innanzitutto si noti che affinché il termine di sinistra della disequazione abbia senso, l'argomento del logaritmo deve essere positivo, cioè $2e^2 - x^2 > 0$, ovvero $-\sqrt{2}e < x < \sqrt{2}e$. Ora, la disequazione è soddisfatta se e solo se $1/(2e^2 - x^2) \geq e^{-2}$, ovvero, tenendo conto del fatto che entrambe i termini sono positivi, $2e^2 - x^2 \leq e^2$, che equivale a $x \geq e$ e $x \leq -e$. Mettendo insieme questa condizione e la precedente otteniamo infine che le soluzioni sono
$$-\sqrt{2}e < x \leq -e \quad \text{oppure} \quad e \leq x < \sqrt{2}e\ .$$

2. a) La funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ e

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \exp(0) = 1 \ .$$

Inoltre la derivata

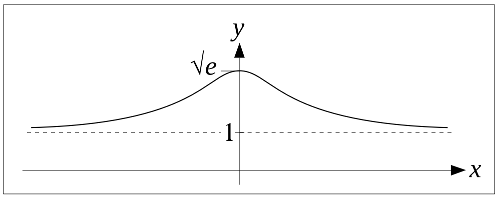
$$f'(x) = \exp\left(\frac{1}{2+x^2}\right)\frac{-2x}{(2+x^2)^2}$$

è positiva per $x \le 0$ e negativa per altrimenti. Pertanto la funzione $f(x)$ cresce per $x \le 0$ e poi decresce. In particolare 0 risulta essere il punto di massimo assoluto, e quindi

$$\max f(x) = f(0) = \exp(1/2) = \sqrt{e} \ .$$

Per la stessa ragione, il valore minimo di $f(x)$ viene raggiunto a $+\infty$ e $-\infty$ (i due limiti sono uguali!) e quindi vale 1. Ad essere precisi si dovrebbe dire che l'estremo inferiore dei valori di $f(x)$ è 1 ma non viene raggiunto per nessun x.

b) In base a quanto visto prima il grafico di $f(x)$ risulta essere come segue:



c) Dalla figura risulta chiaro che l'equazione $f(x) = a$ non ha soluzioni per $a > \sqrt{e}$ ed $a \le 1$, ha una soluzione per $a = \sqrt{e}$, ed ha due soluzioni per $1 < a < \sqrt{e}$.

SECONDA PARTE, GRUPPO B

1. Analogo al gruppo A: $-2e < x \le -\sqrt{3}e$ oppure $\sqrt{3}e \le x < 2e$.

2. Analogo al gruppo A: a) il valore massimo viene raggiunto per $x = 0$ e vale e^2, mentre il valore minimo viene raggiunto a $\pm\infty$ e vale 1. c) L'equazione $f(x) = a$ non ha soluzioni per $a > e^2$ ed $a \le 1$, ha una soluzione per $a = e^2$, ed ha due soluzioni per $1 < a < e^2$.

Prima parte, gruppo A

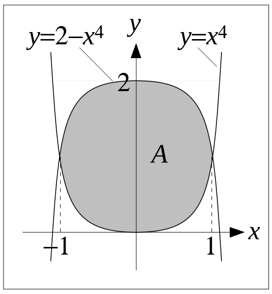
1. Siccome $f(x) = \log 2 - 3\log(x^2 - 1)$ allora $f'(x) = \dfrac{-6x}{x^2 - 1}$.

2. $\log(1 - x) = -x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^5}{5} + o(x^5)$.

3. Siccome $\cos t = 1 - \dfrac{t^2}{2} + o(t^2)$, allora $1 - \cos(x^3) = \dfrac{x^6}{2} + o(x^6)$; la parte principale è $\dfrac{x^6}{2}$.

4. $\displaystyle\int 3x^2(1+3\log x)\,dx = x^3(1+3\log x) - \int x^3 \frac{3}{x}\,dx = x^3(1+3\log x) - x^3 + c = 3x^3\log x + c.$

5. Ponendo $t = 1 - 2x$ si ottiene $\displaystyle\int_{-1}^{1/2} (1-2x)^{-1/2}\,dx = \int_0^3 \frac{1}{2} t^{-1/2} dt = \Big| t^{1/2} \Big|_0^3 = \sqrt{3}.$



6. a) L'insieme A è disegnato nella figura accanto.

   b) $\text{Area}(A) = \displaystyle\int_{-1}^{1} 2 - 2x^4\,dx = \left| 2x - \frac{2x^5}{5} \right|_{-1}^{1} = \frac{16}{5}$

7. a) Si ha $\dot{y}/y^2 = \sin t$ ed integrando $-1/y = -\cos t + c$ con $c \in \mathbb{R}$, cioè
$$y = \frac{1}{\cos t - c} \quad \text{con } c \in \mathbb{R}.$$

   b) Per avere $y(0) = 1$ si deve porre $c = 0$, cioè $y = \dfrac{1}{\cos t}$.

8. Imponendo $y = at^b$, l'equazione differenziale diventa $a(b^2 - b - 2)t^b = 0$. Questa identità vale per ogni t se e solo se $a(b^2 - b - 2) = 0$, cioè nei seguenti casi: i) $a = 0$ e b qualunque, ii) a qualunque e $b = -1, 2$.

Prima parte, gruppo B

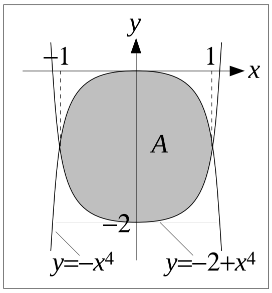
1. Siccome $f(x) = \log 2 - 2\log(x^3 - 1)$ allora $f'(x) = \dfrac{-6x^2}{x^3 - 1}$.

2. $e^{2x} = 1 + 2x + \dfrac{(2x)^2}{2!} + \dfrac{(2x)^3}{3!} + \dfrac{(2x)^4}{4!} + o((2x)^4) = 1 + 2x + 2x^2 + \dfrac{4}{3}x^3 + \dfrac{2}{3}x^4 + o(x^4)$.

3. Siccome $e^t = 1 + t + o(t)$, allora $e^{2x^4} - 1 = 2x^4 + o(x^4)$; la parte principale è $2x^4$.

4. Analogo al gruppo A: $\displaystyle\int 4x^3(1 + 4\log x)\,dx = 4x^4 \log x + c$.

5. Uguale al gruppo A.



6. a) L'insieme A è disegnato nella figura accanto.

   b) $\text{Area}(A) = \displaystyle\int_{-1}^{1} 2 - 2x^4\,dx = \frac{16}{5}$

7. Analogo al gruppo A: a) $y = \dfrac{1}{c - \sin t}$ con $c \in \mathbb{R}$.

   b) Per avere $y(0) = 1$ si deve porre $c = 1$, cioè $y = \dfrac{1}{1 - \sin t}$.

8. Analogo al gruppo A; la funzione $y = at^b$ risolve l'equazione nei seguenti casi: i) $a = 0$ e b qualunque, ii) a qualunque e $b = -2, 3$.

SECONDA PARTE, GRUPPO A

1. a) Ricordando che $e^t = 1 + t + o(t)$ e $\cos t = 1 - t^2/2 + o(t^2)$ per t che tende a 0 otteniamo

$$f(x) = e^{x^2} - \cos(2x) = \Big[1 + x^2 + o(x^2)\Big] - \Big[1 - \frac{(2x)^2}{2} + o((2x)^2)\Big] = 3x^2 + o(x^2) \ .$$

Dunque $3x^2$ è la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0$.
b) Per $x \to 0$ si ha che $e^{x^2} - \cos(2x) \sim 3x^2$ e $\sin x \sim x$; usando il principio di sostituzione degli infinitesimi si ottiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos(2x)}{x \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{x^2} = 3 \ .$$

c) Se si procede come al punto a) si ottiene $f(x) = o(x^2)$, che non basta a dire quale sia la parte principale di $f(x)$. La ragione è che gli sviluppi usati per e^t e $\cos t$ non sono sufficientemente precisi. Proviamo quindi ad usare i seguenti: $e^t = 1 + t + t^2/2 + o(t^2)$ e $\cos t = 1 - t^2/2 + t^4/4! + o(t^4)$:

$$f(x) = \Big[1 + x^2 + \frac{x^4}{4} + o(x^4)\Big] - \Big[1 - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^4}{24} + o((2x)^4)\Big] = \frac{4}{3}x^4 + o(x^4) \ .$$

Dunque $\frac{4}{3}x^4$ è la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0$.

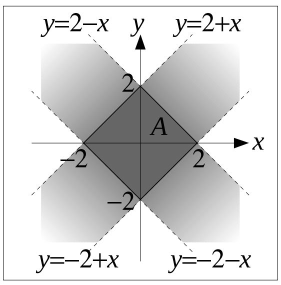
2. a) Integrando per parti *due volte* si ottiene

$$\begin{aligned}
\int x^2 e^{-2x}\, dx &= x^2 \frac{e^{-2x}}{-2} - \int 2x \frac{e^{-2x}}{-2} dx \\
&= -\frac{x^2}{2} e^{-2x} + \int x e^{-2x} dx \\
&= -\frac{x^2}{2} e^{-2x} + x\frac{e^{-2x}}{-2} - \int \frac{e^{-2x}}{-2} dx \\
&= -\frac{x^2}{2} e^{-2x} - \frac{x}{2} e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} = -\frac{1}{4}(2x^2 + 2x + 1) e^{-2x} \ .
\end{aligned}$$

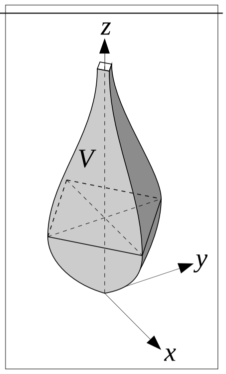
b) Utilizzando quanto fatto al punto a) si ottiene

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty x^2 e^{-2x}\, dx &= \Big| -\frac{1}{4}(2x^2 + 2x + 1)e^{-2x} \Big|_0^\infty \\
&= \Big[-\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{4}(2x^2 + 2x + 1)e^{-2x} \Big] + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \ .
\end{aligned}$$

c) La disequazione $|x + y| \le 2$ equivale a $-2 \le x + y \le 2$ ovvero $-2 - x \le y \le 2 - x$, ed è quindi soddisfatta dai punti compresi tra le rette di equazione $y = -2 - x$ e $y = 2 - x$. Viceversa la disequazione $|x - y| \le 2$ è soddisfatta dai punti compresi tra le rette di equazione $y = -2 + x$ e $y = 2 + x$. Come si vede nella figura accanto, l'insieme A dei punti che soddisfano *entrambe* le disequazioni coincide con il quadrato di vertici $(\pm 2, 0), (0, \pm 2)$.



d) Fissato $z \in \mathbb{R}$, indichiamo con V_z la sezione di V ad altezza z, vale a dire l'insieme dei punti (x, y) tali che $|x + y| \le z e^{-z}$ e $|x - y| \le z e^{-z}$.



Affinché tali disuguaglianze siano soddisfatte da almeno un punto, ze^{-z} deve essere positivo, ovvero $z \geq 0$; in altre parole l'insieme V_z è vuoto per $z < 0$. Procedendo come al punto c) si vede che per $z \geq 0$ l'insieme V_z è il quadrato di vertici $(\pm r, 0), (0, \pm r)$ dove si è posto $r := ze^{-z}$ (conoscendo il grafico di ze^{-z} è allora possibile disegnare approssimativamente V – si veda la figura accanto). Tale quadrato ha lati di lunghezza $\sqrt{2}ze^{-z}$ e quindi area pari a $2z^2e^{-2z}$. Pertanto il volume di V è dato da

$$\mathrm{Vol}(V) = \int_0^\infty \mathrm{Area}(V_z)\, dz = \int_0^\infty 2z^2 e^{-2z}\, dz = \frac{1}{2}\ ;$$

nell'ultimo passaggio si è usato il calcolo svolto al punto b).

3. a) Il polinomio caratteristico di questa equazione è $\lambda^2 + 2\lambda + 5$ e le radici sono $-1 \pm 2i$. Pertanto la soluzione generale dell'equazione è

$$y(t) = e^{-t}\big[a\cos(2t) + b\sin(2t)\big] \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R}.$$

b) Sostituendo $y = ae^{-t}$ nell'equazione si ottiene $(4a - 10)e^{-t} = 0$. Questa uguaglianza vale per ogni t se (e solo se) $4a - 10 = 0$, ovvero $a = 5/2$.
c) Per quanto fatto nei punti a) e b) la soluzione generale dell'equazione lineare non omogenea $\ddot{y} + 2\dot{y} + 5y = 10e^{-t}$ è

$$y(t) = e^{-t}\Big[\frac{5}{2} + a\cos(2t) + b\sin(2t)\Big] \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R}.$$

Seconda parte, gruppo B

1. Analogo al gruppo A.
a) $f(x) = 7x^2 + o(x^2)$ e dunque $7x^2$ è la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0$.
b) Il limite cercato è uguale a 7.
c) $f(x) = \frac{64}{3}x^4 + o(x^4)$ e dunque $\frac{64}{3}x^4$ è la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0$.

2. Analogo al gruppo A.
a) Integrando per parti due volte si ottiene $\displaystyle\int x^2 e^{-2x}\, dx = -\frac{1}{32}(8x^2 + 4x + 1)e^{-4x}$.
b) L'integrale cercato vale 1/32.
c) L'insieme A coincide con il quadrato di vertici $(\pm 2, 0), (0, \pm 2)$.
d) Il volume di V vale 1/16.

3. Analogo al gruppo A.
a) Il polinomio caratteristico di questa equazione è $\lambda^2 + 4\lambda + 5$ e le radici sono $-2 \pm i$. Pertanto la soluzione generale dell'equazione è

$$y(t) = e^{-2t}\big(a\cos t + b\sin t\big) \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R}.$$

b) La funzione $y = ae^{-t}$ soddisfa l'equazione per $a = -1$.
c) La soluzione generale dell'equazione $\ddot{y} + 4\dot{y} + 5y = -2e^{-t}$ è

$$y(t) = -e^{-t} + e^{-2t}\big(a\cos t + b\sin t\big) \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R}.$$

Commenti

- Prima parte, esercizio 5. Alcuni hanno ottenuto come integrale un numero negativo: si tratta di un errore grave perché l'integrale di una funzione positive non può mai essere negativo.
- Prima parte, esercizio 6. Alcuni hanno ottenuto come area un numero negativo: di nuovo si tratta di un errore grave perché un'area non può mai essere negativa.
- Seconda parte, esercizio 1. Molti hanno svolto l'esercizio senza tener conto dei resti. Questo modo di procedere va bene in prima approssimazione, ma può occasionalmente portare ad errori nel caso in cui i resti trascurati finiscano per essere di ordine superiore alla (presunta) parte principale. Un altro errore frequente si può riassumere con un esempio: se facendo i conti ottengo che $f(x) = x^3 + o(x)$ per $x \to 0$, allora non è detto che x^3 sia la parte principale di $f(x)$, perché l'errore $o(x)$ non è trascurabile rispetto ad x^3 (ad esempio $o(x)$ potrebbe essere x^2, nel qual caso questa sarebbe la parte principale, e non x^3).
- Seconda parte, esercizio 1a) ed 1c). Qualcuno ha ottenuto lo sviluppo di Taylor di $f(x)$ direttamente a partire dalla definizione, cioè calcolando le varie derivate di $f(x)$ (nel punto c) fino a quella di ordine quattro). Questo modo di procedere è legittimo, ma certo non è questo lo spirito dell'esercizio.
- Seconda parte, esercizio 1b). Dopo aver determinato la parte principlae di $f(x)$, qualcuno ha calcolato il limite usando la regola di de l'Hôpital, invece di sostituire al numeratore e denominatore le rispettive parti principali. Di nuovo, questo modo di procedere è legittimo, ma certo non è questo lo spirito dell'esercizio.
- Seconda parte, esercizio 2d). Si noti che per calcolare il volume non è necessario essere in grado di disegnare la figura V, ma basta accontentarsi di sapere come sono fatte le sue sezioni.

SCRITTO DEL I APPELLO, 11 APRILE 2007

PRIMA PARTE, GRUPPO A

1. Deve essere $x > 0$ e $3 - \log x \geq 0$, ovvero $0 < x \leq e^3$.
2. $\displaystyle\int 4x^3 + 2e^{-2x}\,dx = x^4 - e^{-2x} + c$.
3. $y(t) = e^{-t}(a\cos(2t) + b\sin(2t))$ con $a, b \in \mathbb{R}$.
4. $P = \left(\dfrac{5}{21}\right)^3 \simeq 1{,}35\%$.
5. Media $= 2{,}2$; varianza $= 0{,}052$.
6. a) $(-1, 2, a) \cdot (a, 3, 2) = a + 6$. b) I due vettori sono ortogonali per $a = -6$.
7. $P = 1/9$.
8. Si tratta del grafico di e^x riflesso rispetto all'asse delle x e poi traslato in alto di 1.

PRIMA PARTE, GRUPPO B

1. $\displaystyle\int 3x^2 + 8e^{-4x}\,dx = x^3 - 2e^{-4x} + c$.
2. Deve essere $x > 0$ e $2 - \log x \geq 0$, ovvero $0 < x \leq e^2$.
3. $y(t) = ae^{-t} + be^{-2t}$ con $a, b \in \mathbb{R}$.
4. $P = \left(\dfrac{16}{21}\right)^3 \simeq 44{,}2\%$.
5. a) $(1, 2, a) \cdot (a, 2, -2) = 4 - a$. b) I due vettori sono ortogonali per $a = 4$.
6. Media $= 2{,}3$; varianza $= 0{,}052$.
7. $P = 1/6$.
8. Si tratta del grafico di e^x riflesso rispetto all'asse delle y e poi traslato in basso di 1.

SECONDA PARTE, GRUPPO A

1. a) Siccome $\sin t \sim t$ e $\log(1+t) \sim t$ per $t \to 0$, allora $f(x) \sim (3+a)x^4$ per $x \to 0$.
   b) Usando gli sviluppi di Taylor $\sin t = t - t^3/6 + o(t^4)$ e $\log(1+t) = t - t^2/2 + o(t^2)$ si ha
   $$f(x) = x^2\Big[3x^2 - \frac{27x^6}{6} + o(x^8)\Big] - 3\Big[x^4 - \frac{x^8}{2} + o(x^8)\Big] = -3x^8 + o(x^8) \sim -3x^8 \ .$$
   c) Usando quanto fatto ai punti a) e b) si vede subito che
   $$\lim_{x\to 0} x^{-6} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0}(3+a)x^{-2} = +\infty & \text{per } a > -3 \\ \lim\limits_{x\to 0}(3+a)x^{-2} = -\infty & \text{per } a < -3 \\ \lim\limits_{x\to 0} -3x^2 = 0 & \text{per } a = -3 \end{cases} .$$

2. a) Si tratta di dimostrare che $f(x) \geq 0$ per ogni x, ovvero che il valore minimo di $f(x)$ è positivo. La derivata $f'(x) = 2e^{2x} - 3$ si annulla in $x_0 := \frac{1}{2}\log\left(\frac{3}{2}\right)$, risulta negativa per $x \leq x_0$ e positiva altrimenti. Pertanto x_0 è un punto di minimo assoluto di $f(x)$ e quindi il valore minimo di $f(x)$ è
   $$f(x_0) = \frac{3}{2}\Big[1 - \log\Big(\frac{3}{2}\Big)\Big] \ .$$

Tale valore è positivo perché $1 \geq \log\left(\frac{3}{2}\right)$ ovvero $e \geq \frac{3}{2}$.
b) Procedendo come al punto a) si vede che il valore minimo di $f(x) := e^{2x} - cx$ viene raggiunto nel punto $x_0 := \frac{1}{2}\log\left(\frac{c}{2}\right)$; quindi vale

$$f(x_0) = \frac{c}{2}\left[1 - \log\left(\frac{c}{2}\right)\right]$$

e risulta positivo per $c \leq 2e$. Questi sono i valori di c per cui vale la disuguaglianza $e^x \geq cx$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

3. a) Affinché $p(x)$ rappresenti una distribuzione di probabilità deve essere una funzione positiva con integrale pari a 1. La prima condizione è soddisfatta per ogni c positivo. Per la seconda, calcoliamo per parti il seguente integrale:

$$\int_0^\infty xe^{-2x}\,dx = \left| -x\frac{e^{-2x}}{2}\right|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{e^{-2x}}{2}\,dx = \left| -x\frac{e^{-2x}}{4}\right|_0^\infty = \frac{1}{4}\ .$$

Pertanto
$$\int_0^\infty p(x)\,dx = \int_0^\infty cxe^{-2x}\,dx = \frac{c}{4}$$
e quindi $p(x)$ è una distribuzione di probabilità per $c = 4$.
b) La definizione di media rispetto alla probabilità associata alla funzione $p(x)$ dà

$$\mathrm{E}_p(e^x) = \int_0^\infty e^x p(x)\,dx = \int_0^\infty 4xe^{-x}\,dx = \left| -4xe^{-x}\right|_0^\infty + \int_0^\infty 4e^{-x}\,dx = 4\ .$$

Dalla definizione di varianza si ha invece che

$$\mathrm{Var}_p(e^x) = \int_0^\infty (e^x - 4)^2 p(x)\,dx = \int_0^\infty 4x(1 - 4e^{-x})^2\,dx = +\infty\ ,$$

l'ultimo passaggio segue dal fatto che la funzione $4x(1-4e^{-x})^2$ tende ad un limite strettamente positivo (per la precisione $+\infty$) per $x \to +\infty$ e quindi ha integrale uguale a $+\infty$.

4. a) Il numero di tutte le possibili sequenze è $N = 4^7$. Il numero delle sequenze che non contengono la lettera A è invece $N_a = 3^7$. Pertanto la probabilità che una sequenza casuale non contenga la lettera A è
$$P_a = \frac{N_a}{N} = \frac{3^7}{4^7} \simeq 13{,}35\%\ .$$

b) Il numero di sequenze in cui la lettera A appare due volte all'inizio e basta è $1^2 \cdot 3^5$. Il numero N_b delle sequenze in cui la lettera A appare due volte lo si ottiene moltiplicando il numero precedente per il numero delle possibili posizioni in cui può apparire A, vale a dire $C_{7,2}$. Pertanto la probabilità cercata è

$$P_b = \frac{N_b}{N} = \frac{3^5 \cdot C_{7,2}}{4^7} = \frac{3^6 \cdot 7}{4^7} \simeq 31{,}15\%\ .$$

c) Nel costruire una sequenza che non contiene due lettere consecutive uguali, per la prima lettera abbiamo 4 possibili scelte, ma solo 3 per le seconda e per tutte le altre. Pertanto le sequenze che non contengono due lettere consecutive uguali sono $N_c = 4 \cdot 3^6$, ed hanno probabilità
$$P_b = \frac{N_c}{N} = \frac{3^6 \cdot}{4^6} \simeq 17{,}80\%\ .$$

5. a) Il numero 1 esce con probabilità p mentre il numero 2 esce con probabilità $1-p$. Se X è la variabile aleatoria corrispondente al numero che esce lanciando il dado, allora

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= 1\cdot p + 2\cdot(1-p) = 2-p \\ \mathrm{Var}(X) &= (1-(2-p))^2 p + (2-(2-p))^2(1-p) = p(1-p)\ . \end{aligned}$$

b) Tenendo conto del punto a), l'equazione $E(X) = 1{,}7$ implica $2-p = 1{,}7$ ovvero $p = 0{,}3$.
c) Indichiamo con X_c la media campionaria di mille lanci. Tale variabile aleatoria ha valor medio $\mathrm{E}(X_c) = \mathrm{E}(X) = 2-p$ e varianza $\mathrm{Var}(X_c) = \mathrm{Var}(X)/1000 = p(1-p)/1000$. Siccome il valore massimo di $p(1-p)$ si ottiene per $p = 1/2$ e vale $1/4$, abbiamo che

$$\mathrm{Var}(X_c) \le 1/4000\ .$$

Sappiamo allora che la probabilità P che $|X_c - E(X_c)|$ sia inferiore a $\delta := 0{,}05$ soddisfa

$$P \ge 1 - \frac{\mathrm{Var}(X_c)}{\delta^2} \ge 1 - \frac{1}{\delta^2\cdot 4000} = 1 - \frac{1}{0{,}05^2\cdot 4000} = 90\%\ .$$

Dunque il valore osservato per X_c, cioè 1,7, differisce da $E(X_c)$ meno di 0,05 – vale a dire $|1{,}7 - E(X_c)| \le 0{,}05$ – con probabilità superiore al 90%. Siccome $E(X_c) = 2-p$ la precedente affermazione equivale a dire che $|1{,}7-(2-p)| = |p-0{,}03| \le 0{,}05$ con probabilità superiore al 90%.

Seconda parte, gruppo B

1. Analogo al gruppo A.
a) $f(x) \sim (6+a)x^4$ per $x \to 0$.
b) $f(x) = 3x^2\Big[2x^2 - \dfrac{8x^6}{6} + o(x^8)\Big] - 6\Big[x^4 - \dfrac{x^8}{2} + o(x^8)\Big] = -x^8 + o(x^8) \sim -x^8$.
c) Usando quanto fatto ai punti a) e b) si ottiene che $\lim\limits_{x\to 0} x^{-4} f(x) = 3 + a$.

2. Analogo al gruppo A.
a) Si tratta di dimostrare che il valore minimo di $f(x) = e^{3x} - 4x$ è positivo. Il punto di minimo assoluto di $f(x)$ è $x_0 := \frac{1}{3}\log\left(\frac{4}{3}\right)$ e quindi il valore minimo di è

$$f(x_0) = \frac{4}{3}\Big[1 - \log\Big(\frac{4}{3}\Big)\Big]\ .$$

Tale valore è positivo perché $1 \ge \log\left(\frac{4}{3}\right)$ ovvero $e \ge \frac{4}{3}$.
b) Il valore minimo di $f(x) := e^{3x} - cx$ viene raggiunto in $x_0 := \frac{1}{2}\log\left(\frac{c}{2}\right)$; quindi vale

$$f(x_0) = \frac{c}{3}\Big[1 - \log\Big(\frac{c}{3}\Big)\Big]$$

e risulta positivo per $c \le 3e$. Questi sono i valori di c cercati.

3. Analogo al gruppo A.
a) L'integrale di $p(x) = cxe^{-x}$ su $X = [0, +\infty)$ è uguale c, e quindi $p(x)$ è una distribuzione di probabilità per $c = 1$.
b) $\mathrm{E}_p(e^{x/2}) = 4$ e $\mathrm{Var}_p(e^{x/2}) = +\infty$.

4. Analogo al gruppo A.

a) Il numero di tutte le possibili sequenze è $N = 5^8$. Il numero delle sequenze che non contengono la lettera A è invece $N_a = 4^8$, e quindi la probabilità cercata è

$$P_a = \frac{N_a}{N} = \frac{4^8}{5^8} \simeq 16{,}78\% \ .$$

b) Le sequenze che in cui la lettera A appare due volte sono $N_b = 4^6 \cdot C_{8,2}$, ed hanno probabilità

$$P_b = \frac{N_b}{N} = \frac{4^6 \cdot C_{8,2}}{5^8} = \frac{4^7 \cdot 7}{5^8} \simeq 29{,}36\% \ .$$

c) Le sequenze che non contengono due lettere consecutive uguali sono $N_c = 5 \cdot 4^7$, ed hanno probabilità

$$P_b = \frac{N_c}{N} = \frac{4^7 \cdot}{5^7} \simeq 20{,}97\% \ .$$

5. Analogo al gruppo A.
a) Il numero 2 esce con probabilità p mentre il numero 1 esce con probabilità $1-p$. Se X è la variabile aleatoria corrispondente al numero che esce lanciando il dado, allora $\mathrm{E}(X) = 1 + p$ e $\mathrm{Var}(X) = p(1-p)$.
b) $E(X) = 1{,}4$ implica $p = 0{,}4$.
c) $|p - 0{,}04| \leq 0{,}05$ con probabilità superiore al 90%.

Commenti

- Prima parte. Negli esercizi 4 e 7, molti hanno dato come risposte valori della probabilità maggiori di 1. Questo è un errore grave: dovrebbe infatti essere noto che una probabilità è sempre compresa tra 0 e 1.
- Seconda parte, esercizio 4. Il punto a) è assolutamente immediato, ed il risultato potrebbe venir dato senza accompagnarlo con particolari spiegazioni. Lo stesso non si può dire dei punti b) e c); in questi casi mi sarei aspettato una qualche spiegazione, che invece in molti casi è mancata.
- Seconda parte, esercizio 5. Il punto c) di questo esercizio è nettamente il più difficile di tutto lo scritto, anche per la difficoltà ad intepretarne correttamente il testo. Innazitutto precisiamo che non si riesce calcolare esattamente la probabilità P che il numero 0,03 (nel caso del gruppo A) approssimi il valore reale di p con errore inferiore a 0,05; la stima $P \geq 90\%$ proposta nella soluzione non è particolarmente precisa, e anzi può essere molto migliorata approssimando la distribuzione della media campionaria X_c con la giusta distribuzione Gaussiana (ma questa è un'altra storia).

PRIMA PARTE

1. a) $r = 3$, $\alpha = \pi$; b) $r = \sqrt{8}$, $\alpha = 3\pi/4$; c) $r = 2$, $\alpha = -\pi/3$.

2. $\mu = \dfrac{10 \cdot 10 + 5 \cdot 13 + 5 \cdot 15}{20} = 12$; $\sigma^2 = \dfrac{10 \cdot 2^2 + 5 \cdot 1^1 + 5 \cdot 3^2}{20} = 4{,}5$.

3. a) $\big[\log(\sqrt[3]{x^3+1})\big]' = \dfrac{1}{3}\big[\log(x^3+1)\big]' = \dfrac{x^2}{x^3+1}$; b) $\big[(\cos x)^2 + (\sin x)^2\big]' = 1' = 0$.

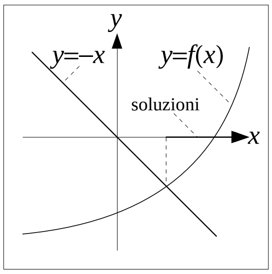
4. Ponendo $x^2 = y$ si ottiene $2x\,dx = dy$ e quindi $\displaystyle\int_0^2 x\cos(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^4 \cos y\,dy = \frac{1}{2}\sin 4$.

5. $\dot y = 3t^2 e^{-y} \Rightarrow e^y \dot y = 3t^2 \Rightarrow (e^y)' = 3t^2 \Rightarrow e^y = t^3 + c \Rightarrow e^y = t^3 + 1 \Rightarrow y = \log(t^3+1)$.

6. $P = \dfrac{1}{21^2} \simeq 0{,}23\%$.

7. $A^{-1} := \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

8. L'insieme delle soluzioni è dato dalla semiretta indicata in figura.



SECONDA PARTE

1. a) Si tratta di un'equazione differenziale lineare del secondo ordine. Il polinomio caratteristico associato è $\lambda^2 + 2\lambda + 5$ e si annulla per $\lambda = -1 \pm 2i$. Quindi le soluzioni sono

$$y(t) := e^{-t}(\alpha\cos(2t) + \beta\sin(2t)) \quad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

b) Ponendo $y(t) = at + b$ si ottiene $\dot y(t) = a$ e $\ddot y(t) = 0$. Sostituendo nell'equazione questa diventa $5at + (5b + 2a) = 5t - 3$, ovvero

$$(5a - 5)t + (5b + 2a + 3) = 0 \ .$$

Questa equazione è verificata per ogni t se e solo se i coefficienti del polinomio sono entrambi nulli, ovvero $5a - 5 = 0$ e $5b + 2a + 3 = 0$, ovvero $a = 1$ e $b = -1$. La soluzione cercata è quindi $y(t) = t - 1$.

c) Per quanto visto ai punti a) e b), la soluzione generale dell'equazione non omogenea in oggetto è

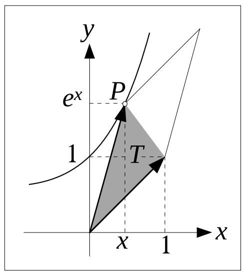
$$y(t) := e^{-t}(\alpha\cos(2t) + \beta\sin(2t)) + t - 1 \quad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Facendo i conti si ottiene che $y(0) = \alpha - 1$ e $\dot y(0) = 2\beta - \alpha + 1$, ed imponendo quindi le condizioni iniziali $y(0) = 0$ e $\dot y(0) = -2$ si ottiene infine $\alpha = 1$ e $\beta = -1$. Pertanto la soluzione cercata è

$$y(t) := e^{-t}(\cos(2t) - \sin(2t)) + t - 1 \ .$$

2. a) Il terzo vertice del triangolo si scrive come $P = (x, e^x)$ con $x \in \mathbb{R}$. Si consideri il parallelogramma di cui tre vertici coincidono con quelli di T (si veda la figura accanto). L'area di questo parallelogrammo è allora pari al determinante della matrice i cui vettori colonna sono $(1,1)$ e (x, e^x), ed è esattamente il doppio dell'area di T, ovvero

$$\text{Area}(T) = \frac{1}{2}\det\begin{pmatrix} 1 & x \\ 1 & e^x \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(e^x - x) \ .$$



b) Si verifica facilmente studiando la derivata della funzione $e^x - x$ che il minimo dell'area di T si ha per $x = 0$, ovvero quando $P = (0, 1)$.

3. a) I risultati dei diversi lanci sono indipendenti tra di loro e quindi

$$P_a = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} = 12{,}5\% \ .$$

b) Si tratta di contare tutte le diverse sequenze composte da tre T e due C. Queste sono tante quanti i modi di scegliere 2 posizioni (quelle delle C) su 5 a disposizione, ovvero $C_{5,2}$. Pertanto, siccome gli eventi possibili sono 2^5 e sono chiaramente equiprobabili,

$$P_b = \frac{C_{5,2}}{2^5} = \frac{10}{32} \simeq 31{,}25\% \ .$$

c) Le sequenze contenenti tre teste e tutte consecutive sono tre: $TTTCC$, $CTTTC$, $CCTTT$. Quindi

$$P_c = \frac{3}{2^5} = \frac{3}{32} \simeq 9{,}4\% \ .$$

c) Le sequenze con almeno tre teste consecutive sono le tre date al punto c) a cui si aggiungono altre cinque: $CTTTT$, $TCTTT$, $TTTCT$, $TTTTC$, $TTTTT$. Quindi

$$P_c = \frac{8}{2^5} = \frac{1}{4} = 25\% \ .$$

4. I punti P della circonferenza sono quelli con coordinate polari $r = 1$ ed α compreso nell'intervallo $[0, 2\pi]$. La distribuzione di probabilità giusta è quella uniforme su α. Siccome l'ascissa di P è $X = \cos\alpha$, si ottiene che il valore atteso è

$$\mathrm{E}(X) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos\alpha \, d\alpha = \frac{1}{2\pi}\Big| \sin\alpha \Big|_0^{2\pi} = 0$$

mentre la varianza è

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= \mathrm{E}((X - \mathrm{E}(X))^2) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\cos\alpha)^2 \, d\alpha \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} 1 + \cos(2\alpha) \, d\alpha = \frac{1}{4\pi}\Big| \alpha + \frac{\sin(2\alpha)}{2} \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2} \ .\end{aligned}$$

Nella terza uguaglianza abbiamo usato l'identità $\cos^2\alpha = \frac{1}{2}[1 + \cos(2\alpha)]$.

COMMENTI

- Prima parte, esercizio 1. Quasi nessuno ha calcolato gli angoli correttamente, cosa per cui bastava un disegno.
- Prima parte, esercizio 3. Se, com'è successo per quasi tutti i presenti, non si semplificano le espressioni da derivare, i conti diventano molto più complicati.
- Prima parte, esercizio 8. Sorprendentemente, quasi nessuno ha svolto correttamente questo esercizio.

Scritto del III appello, 11 luglio 2007

Prima parte

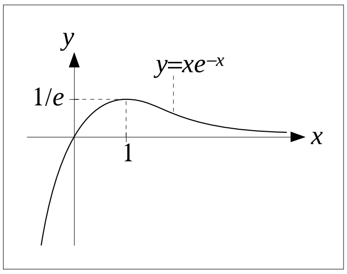
1. $\dfrac{2+i}{2-i} = \dfrac{(2+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \dfrac{3+4i}{5} = \dfrac{3}{5} + \dfrac{4}{5}i.$
2. Deve essere $1 - e^x > 0$, ovvero $x < 0$.
3. Siccome $\cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)$, ponendo $t = 2x^2$ si ottiene $\cos(2x^2) = 1 - 2x^2 + o(x^4)$.
4. $\displaystyle\int 9x^2 \log x \, dx = 3x^3 \log x - \int 3x^3 \frac{1}{x} \, dx = 3x^3 \log x - x^3 = x^3(3\log x - 1).$
5. La soluzione generale dell'equazione $\ddot{y} - 4y = 0$ è $y(t) = ae^{2t} + be^{-2t}$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Imponendo le condizioni iniziali $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 4$ si ottiene $a = 1$, $b = -1$, ovvero $y(t) = e^{2t} - e^{-2t}$.
6. $P(\{2,3,4\}) = P(2) + P(3) + P(4) = \dfrac{1}{36} + \dfrac{2}{36} + \dfrac{3}{36} = \dfrac{1}{6}.$
7. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$
8. Si tratta del grafico di $1/x$ (che dovrebbe essere noto) traslato verso sinistra di 2.

Seconda parte

1. a) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

   b) La funzione $f(x)$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, ed ha derivata $f'(x) = (1-x)e^{-x}$. Siccome la derivata è positiva per $x \leq 1$ e negativa altrimenti, la funzione f risulta essere crescente per $x \leq 1$ e decrescente per $x \geq 1$. In particolare il valore massimo viene raggiunto per $x = 1$, ed è pari a $f(1) = 1/e$. Siccome inoltre il limite di $f(x)$ per $x \to -\infty$ è $-\infty$, il valore minimo di f è $-\infty$ e non viene mai raggiunto.

   c) Tenuto conto di quanto detto al punto precedente e del fatto che $f(x) = 0$ solo per $x = 0$, è possibile tracciare il grafico di f come nella figura accanto.

   d) Siccome cf è una funzione positiva sulla semiretta $[0, +\infty)$, l'unica condizione che deve soddisfare per essere una distribuzione di probabilità è che l'integrale tra 0 e $+\infty$ sia 1. Integrando per parti si ottiene

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} c\,f(x)\,dx &= \int_0^{+\infty} cxe^{-x} dx \\ &= \Big| -cxe^{-x} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} ce^{-x} dx = 0 + \Big| -ce^{-x} \Big|_0^{+\infty} = c \;,\end{aligned}$$

   da cui si deduce che il valore cercato di c è 1.

2. a) Nel sacchetto ci sono 4 biglie nere e 4 rosse. Quale che sia il colore della prima biglia estratta, la probabilità che la seconda sia dello stesso colore è

$$P_a = \frac{3}{7} \simeq 42{,}8\% \;,$$

   infatti dopo la prima estrazione nel sacchetto sono rimaste 7 biglie di cui 3 dello stesso colore di quella già estratta.

b) Analogamente, la probabilità che la seconda biglia estratta abbia un colore diverso dalla prima è

$$P_b = \frac{4}{7} \simeq 57{,}1\% \ .$$

c) La probabilità che la prima biglia estratta sia nera e la seconda rossa è pari a

$$P_c = \frac{4}{n+4} \cdot \frac{n}{n+3}$$

e lo stesso vale per la probabilità che la prima sia rossa e la seconda sia nera. Pertanto la probabilità che le biglie siano una rossa ed una nera è $2P_c$. L'equazione $2P_c = 5/9$ diventa

$$\frac{8n}{n^2+7n+12} = \frac{5}{9} \quad \text{ovvero} \quad 5n^2 - 37n + 60 = 0 \ .$$

Le soluzioni di questa equazione sono $n = 5$ ed $n = 2{,}4$. Ovviamente la seconda non ha senso perché non è un numero intero, e quindi il numero di palline rosse nel sacchetto è $n = 5$.

3. a) Sì, è possibile: basta ad esempio che i numeri siano in totale dieci, di cui sei uguali a 10, tre uguali a 11 ed uno uguale a 7. La media è esattamente 10.
b) No, non è possibile. Infatti la media μ deve soddisfare

$$\mu \leq \frac{60}{100} \cdot 11 + \frac{30}{100} \cdot 14 + \frac{10}{100} \cdot 10 = 11{,}8 \ .$$

c) Analogamente la media μ deve anche soddisfare

$$\mu \geq \frac{60}{100} \cdot 10 + \frac{30}{100} \cdot 11 + \frac{10}{100} \cdot 5 = 9{,}8$$

e quindi i valori ammissibili di μ sono compresi tra 9,8 e 10,8.

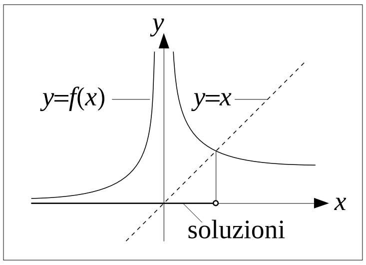
Commenti

- Seconda parte, esercizio 2a). Diverse persone hanno calcolato la probabilità di estrarre due biglie rosse, che coincide con la probabilità di estrarre due biglie nere. Questa probabilità è metà di quella corretta, visto che la domanda chiedeva di calcolare la probabilità di estrarre due biglie dello stesso colore, senza specificare se fossero rosse o nere.
- Seconda parte, esercizio 2b). Analogamente, diverse persone hanno calcolato la probabilità di estrarre prima una biglia rossa e poi una nera, escludendo il caso opposto che invece pure va bene.

Scritto del IV appello, 11 settembre 2007

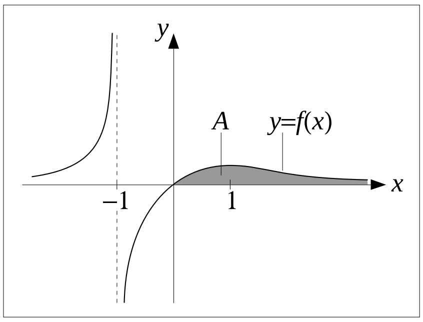
Prima parte

1. a) $\mu = \frac{60}{100} \cdot 10 + \frac{30}{100} \cdot 11 + \frac{10}{100} \cdot 9 = 10{,}2.$
   b) $\sigma^2 = \frac{60}{100} \cdot (10 - 10{,}2)^2 + \frac{30}{100} \cdot (11 - 10{,}2)^2 + \frac{10}{100} \cdot (9 - 10{,}2)^2 = 0{,}36.$
2. $\left(e^{-x^2}\right)' = -2x\, e^{-x^2}$, $\left(\frac{(2x)^3}{\sqrt{x^5}}\right)' = (8x^{1/2})' = 4x^{-1/2} = \frac{4}{\sqrt{x}}$.
3. $\int_0^\pi x \cos x\, dx = \Big| x \sin x \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin x\, dx = \Big| \cos x \Big|_0^\pi = -2.$
4. Si tratta di calcolare la probabilità che si verifichino 3 eventi indipendenti con probabilità 1/2 ciascuno. Pertanto la risposta è $P = (1/2)^3 = 1/8$.
5. $\lim_{x\to+\infty} x^{100} 2^{-x} = 0$, $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(e^x)}{e^{x^2}} = \sin 1.$
6. $N = 21 \cdot 20 \cdot 19 = 7980.$
7. $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$
8. L'insieme delle soluzioni è la semiretta indicata in figura.



Seconda parte

1. a) e b) La funzione $f(x)$ è definita per $x \neq -1$, positiva per $x > 0$, negativa per $x < 0$, si annulla solo per $x = 0$, tende a 0 per $x \to \pm\infty$, ed infine tende a $-\infty$ per $x \to -1^{\pm}$. Lo studio del segno della derivata prima
$$f'(x) := \frac{1 - x}{(1 + x)^3}$$
mostra inoltre che $f(x)$ è decrescente sulla semiretta $(-\infty, -1)$, crescente sull'intervallo $(-1, 1)$ e di nuovo decrescente sulla semiretta $(1, +\infty)$.



Utilizzando queste informazioni si ottiene il disegno riportato nella figura accanto.
c) L'area di A è data come al solito da
$$\begin{aligned} \text{Area}(A) &= \int_0^\infty \frac{x}{(1 + x)^2}\, dx \\ &= \int_1^\infty \frac{y - 1}{y^2}\, dy = \int_1^\infty \frac{1}{y} - \frac{1}{y^2}\, dy = \Big| \log y + \frac{1}{y} \Big|_1^\infty = +\infty \end{aligned}$$
(per la seconda uguaglianza abbiamo usato il cambio di variabile $y = 1 + x$).

2. a) Per $a = -3$ il polinomio caratteristico dell'equazione è $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$, ed ha soluzioni $\lambda_{1,2} = 1, -3$. Pertanto la soluzione generale di (1) è
$$y(t) = ae^t + be^{-3t} \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R}.$$
b) Per $a = 2$ il polinomio caratteristico dell'equazione è $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$, ed ha soluzioni $\lambda_{1,2} = -1 \pm i$. Pertanto la soluzione generale di (1) è
$$y(t) = e^{-t}(a \cos t + b \sin t) \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R}.$$

c) Per $a = 1$ il polinomio caratteristico dell'equazione è $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$, ed ha un'unica soluzione $\lambda = -1$. Pertanto la soluzione generale di (1) è

$$y(t) = e^{-t}(a + bt) \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R}.$$

d) In generale, il polinomio caratteristico dell'equazione è $\lambda^2 + 2\lambda + a = 0$, ed ha soluzioni

$$\lambda_{1,2} = \begin{cases} -1 \pm \sqrt{1-a} & \text{per } a \leq 1, \\ \\ -1 \pm i\sqrt{a-1} & \text{per } a > 1. \end{cases}$$

Distinguiamo diversi casi. Per $a > 1$ le soluzioni $\lambda_{1,2}$ del polinomio caratteristico sono *complesse* con parte reale negativa, e quindi tutte le soluzioni di (1) sono infinitesime per $t \to +\infty$ (cfr. il caso $a = 2$ già considerato al punto b)). Per $a = 1$ si è già visto al punto c) che tutte le soluzioni di (1) sono infinitesime per $t \to +\infty$. Per $-2 < a < 1$, $\lambda_{1,2}$ sono reali ed entrambe *negative* e quindi tutte le soluzioni di (1) sono infinitesime a $t \to +\infty$. Infine, per $a \leq -2$, $\lambda_{1,2}$ sono entrambe reali di cui una una positiva o nulla, e in tal caso non tutte le soluzioni di (1) sono infinitesime per $t \to +\infty$ (cfr. il caso $a = -3$ già visto al punto a)). Riassumendo, le soluzioni di (1) sono tutte infinitesime per $t \to +\infty$ se e solo se $a > -2$.

3. a) Il sacchetto contiene $5 + m + n$ tessere e quindi le probabilità di estrarre i valori 0, 1 e 4 sono rispettivamente

$$P_0 = \frac{5}{m+n+5}\ , \quad P_1 = \frac{m}{m+n+5}\ , \quad P_4 = \frac{n}{m+n+5}\ .$$

Pertanto il valore atteso della variabile aleatoria X corrispondente al valore della tessera estratta è

$$\mathrm{E}(X) = 0 \cdot P_0 + 1 \cdot P_1 + 4 \cdot P_4 = \frac{m+4n}{m+n+5}\ . \tag{2}$$

Imponendo $m = 4$ e $\mathrm{E}(X) = 4/3$ nella (2) si ottiene l'equazione

$$\frac{4n+4}{n+9} = \frac{4}{3}$$

da cui si ricava $n = 3$.

b) Imponendo $\mathrm{E}(X) = 3/2$ nella (2) si ottiene invece l'equazione

$$\frac{m+4n}{m+n+5} = \frac{3}{2}$$

che implica $m = 5n - 15$. A questo punto la varianza è

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) &= (0 - \mathrm{E}(X))^2 \cdot P_0 + (1 - \mathrm{E}(X))^2 \cdot P_1 + (4 - \mathrm{E}(X))^2 \cdot P_4 \\ &= \frac{9}{4} \cdot \frac{5}{m+n+5} + \frac{1}{4} \cdot \frac{m}{m+n+5} + \frac{25}{4} \cdot \frac{n}{m+n+5} \\ &= \frac{m+25n+45}{4(m+n+5)} \\ &= \frac{15(n+1)}{4(3n-5)}\ , \end{aligned}$$

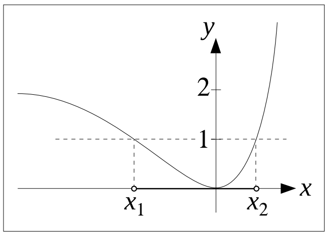
Imponendo $\mathrm{Var}(X) = 9/4$ si ottiene l'equazione

$$\frac{15(n+1)}{4(3n-5)} = \frac{9}{4}$$

da cui si ricava $n = 5$ e quindi $m = 5n - 15 = 10$.

PRIMA PARTE, GRUPPO A

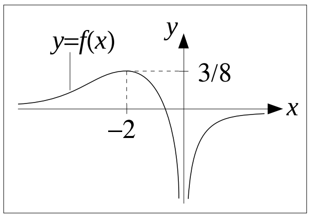
1. $P = 1/12 \sim 8{,}3\%$.
2. $C_{7,5} = 21$.
3. $\left[\log\left(\sqrt[3]{1-x^3}\right)\right]' = \left[\frac{1}{3}\log(1-x^3)\right]' = \frac{x^2}{x^3-1}$.
4. a) $\rho = \sqrt{2}$, $\alpha = 5\pi/4$; b) $\rho = 2$, $\alpha = -\pi/2$; c) $\rho = 2$, $\alpha = -\pi/3$.
5. $y(x) = -2e^{2x}$.
6. $m = 3{,}1$ e $\sigma^2 = 0{,}15$.
7. Le soluzioni della disequazione sono tutti i numeri compresi tra x_1 e x_2 dati nella figura accanto.
8. $\int_0^\infty 4e^{-2x}\,dx = \Big| -2e^{-2x}\Big|_0^\infty = 2$.



SECONDA PARTE, GRUPPO A

1. a) La funzione $f(x)$ è definita per ogni $x \neq 0$, ed è asintoticamente equivalente a $-1/x$ per $x \to \pm\infty$, e a $-1/x^4$ per $x \to 0$. Pertanto $f(\pm\infty) = 0$ e $f(0^\pm) = -\infty$.

   b) $f(x)$ risulta positiva per $x \leq -\sqrt[3]{2}$ e negativa altrimenti. Inoltre
   $$f'(x) := \frac{x^3+8}{x^5} ,$$
   e lo studio del segno di $f'(x)$ mostra che $f(x)$ è crescente per $x \leq -2$ e per $x > 0$, ed è decrescente per $-2 \leq x < 0$. In particolare -2 è un punto di massimo locale. Mettendo insieme questi dati otteniamo il grafico riportato nella figura accanto.

   c) Come si vede dal disegno del grafico di $f(x)$, l'equazione $f(x) = a$ non ha soluzioni per $a > 3/8$, ha una sola soluzione per $a = 3/8$, e due soluzioni per $0 < a < 3/8$.

2. a) Si tratta di un'equazione lineare omogenea del secondo ordine a coefficienti costanti. Il polinomio caratteristico è $\lambda^2 + 4 = 0$ ed ha soluzioni complesse coniugate $\pm 2i$. Pertanto la soluzione cercata è
   $$y(x) = a\cos(2x) + b\sin(2x) \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R}.$$
   b) Cerchiamo una soluzione della forma $y(x) = ce^{-x}$. Fatti i conti si trova che questa funzione risolve l'equazione per $c = 2$.

   c) Per quanto visto ai punti precedenti, la soluzione generale dell'equazione non omogenea $\ddot{y} + 4y = 10e^{-x}$ è
   $$y(x) = 2e^{-x} + a\cos(2x) + b\sin(2x) \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R}.$$
   Imponendo che questa y soddisfi le condizioni iniziali date si ottiene $a = 0$ e $b = 1$, ovvero la soluzione cercata è
   $$y(x) = 2e^{-x} + \sin(2x) .$$

3. Lanciando 10 monete, la probabilità che escano k teste è
   $$P_k = \binom{10}{k}\frac{1}{2^{10}}$$

e quindi la probabilità che escano al più tre teste è

$$P = P_0 + P_1 + P_2 + P_3 = \left[\binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \binom{10}{3} \right] \frac{1}{2^{10}}$$
$$= \frac{1 + 10 + 45 + 120}{2^{10}} = \frac{176}{1024} = \frac{11}{64} \ .$$

Pertanto, in media il guadagno del signor A sarà pari a

$$nP - 10(1 - P) \ .$$

Imponendo che tale guadagno medio sia positivo si ottiene

$$n \geq \frac{10(1-P)}{P} = \frac{530}{11} = 48{,}1818\ldots$$

Vale a dire che al signor A conviene giocare per $n \geq 49$.