Versione: 1 febbraio 2007

Università di Pisa
Corso di laurea in Matematica

Testi e soluzioni degli scritti d'esame di

Calcolo Differenziale e Integrazione

a.a. 2005/06

docenti: G. Alberti, M.S. Gelli

Giovanni Alberti
Dipartimento di Matematica
Università di Pisa
largo Pontecorvo 5
56127 Pisa
www.dm.unipi.it/~alberti

Avvertenze

Questa è una raccolta dei testi degli scritti d'esame per i corsi di Calcolo Differenziale ed Integrazione del corso di laurea in Matematica, a.a. 2005/06. Questi scritti si compongono di due parti: una prima parte con otto domande o problemi molto semplici a cui si deve dare solo la risposta, ed una seconda parte con tre o più problemi per cui invece si deve dare una soluzione articolata e spiegata in dettaglio. Il tempo a disposizione è di un'ora per la prima parte, e di due ore per la seconda. Per la sufficienza piena sono solitamente richieste almeno cinque risposte corrette nella prima parte, ed un problema completamente risolto nella seconda.

La prima sezione di questi appunti consta dei testi di tutti gli scritti, incluse le prove in itinere, mentre la seconda sezione contiene una breve traccia delle soluzioni.

Nei programmi sottostanti sono riportati in corsivo gli argomenti non fondamentali.

Programma di Calcolo Differenziale

1. Successioni di punti nello spazio n-dimensionale. Convergenza delle successioni di Cauchy, Teorema di Bolzano-Weierstrass.
2. Insiemi aperti, chiusi, compatti, densi. Frontiera di un insieme. Funzioni di n variabili reali: definizione di limite e continuità, proprietà delle funzioni continue, esistenza di massimo e minimo su insiemi compatti. Funzioni a valori vettoriali (mappe).
3. Derivate parziali di una funzione di n variabili, gradiente. Differenziabilità e sviluppo di Taylor all'ordine 1. Teorema del differenziale totale. Derivate parziali seconde e matrice Hessiana, teorema di Schwartz, sviluppo di Taylor all'ordine 2. Mappe derivabili. Regole di calcolo delle derivate. *Sviluppo di Taylor all'ordine n.*
4. Massimi, minimi e punti critici. Forme quadratiche e segnatura. Condizioni necessarie e sufficienti di massimalità e minimalità locale.
5. *Dimostrazione del teorema fondamentale dell'algebra.*
6. Integrale secondo Riemann-Peano-Jordan di una funzione limitata (integrali multipli). Calcolo degli integrali: teorema di Fubini, formula di cambio di variabile. Integrabilità delle funzioni continue. Approssimazione dell'integrale con somme finite. Misura (secondo Riemann-Peano-Jordan) di un insieme limitato. L'integrale come volume del sottografico.
7. *Topologia in spazi metrici, completezza, equivalenze delle diverse definizioni di continuità. Connessione e connessione per archi.*
8. Norma del sup e completezza dello spazio delle funzioni continue. Completezza dello spazio delle funzioni di classe C^1. Serie di funzioni (convergenza uniforme e totale) e serie di potenze. Teorema delle contrazioni.
9. Sistemi di equazioni differenziali del primo ordine: teorema di esistenza e unicità della soluzione del problema di Cauchy in ipotesi generali. Teorema di esistenza e unicità per equazioni differenziali di ordine k. Lemma di Gronwall ed applicazioni: teorema di dipendenza continua dai dati iniziali, condizioni sufficienti per l'esistenza globale.
10. Classi di equazioni differenziali risolubili esplicitamente (equazioni a variabili separabili, di Eulero, di Bernoulli, ecc.).
11. Equazioni lineari di ordine k. Struttura dello spazio delle soluzioni. Soluzione esplicita delle equazioni omogenee a coefficienti costanti. Metodo di riduzione dell'ordine. Metodo della variazione delle costanti. Teorema degli annichilatori.

Programma di Integrazione

12. Sistemi di equazioni lineari del primo ordine. Esponenziale di matrici e metodi di calcolo.

13. Lemma di Gronwall e teoremi di confronto. Studio qualitativo delle soluzioni delle equazioni differenziali non lineari.
14. *Completezza: Teorema di Baire ed applicazioni.*
15. *Compattezza e compattezza sequenziale. Teorema di Ascoli-Arzelà. Teorema di Peano per le equazioni differenziali ordinarie.*
16. Curve in forma parametrica. Curve regolari: retta tangente ed orientazione. Definizione di lunghezza e formula per il calcolo. Lavoro di un campo di vettori lungo una curva. Teorema di Gauss-Green.
17. Superfici in forma parametrica in $\mathbb{R}^3$. Prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$. Piano tangente ed orientazione. Calcolo dell'area. Flusso di un campo di vettori. Rotore di un campo di vettori. Teorema di Stokes.
18. Teorema di invertibilità locale per mappe da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^n$.
19. Curve e superfici come equazioni: struttura geometrica dell'insieme delle soluzioni di un sistema di k equazioni in n incognite: il teorema della funzione implicita (teorema del Dini).
20. Spazio tangente ad un insieme in un punto. Spazio tangente ad una superficie definita tramite equazioni. Massimi e minimi di una funzione differenziabile su una superficie definita tramite equazioni: metodo dei moltiplicatori di Lagrange.
21. I grafici di funzioni reali come esempi di ipersuperfici. Versore normale, piano tangente ed orientazione. Formula per il calcolo dell'area. Flusso di un campo di vettori.
22. Teorema della divergenza.
23. Potenziale di un campo di vettori. Condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza del potenziale. Calcolo del potenziale.
24. *Derivazione dell'equazione del calore e dell'equazione delle onde in dimensione (spaziale) uguale a uno. Derivazione dell'equazione di Laplace in dimensione tre.*
25. Serie di Fourier reale e complessa per funzioni di una variabile 2π-periodiche. Teorema di convergenza totale della serie di Fourier per funzioni di classe C^1.
26. *Soluzione dell'equazione del calore e delle onde in dimensione uno con condizioni di periodicità al bordo tramite serie di Fourier.*

Calcolo Differenziale, a.a. 2005/06 - Testi

Primo Compitino, 15 novembre 2005

Prima parte, gruppo A

1. Calcolare il dominio di definizione ed il gradiente di $f(x,y) := \log\left[\sqrt{\dfrac{xy}{1+x^2+y^2}}\right]$.
2. Dire se esiste il limite per $(x,y)\to(0,0)$ di $\dfrac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$ ed in caso calcolarlo.
3. a) Disegnare l'insieme E dei punti (x,y) tali che $y^2-x^2\geq 1$.
   b) Dire se il punto $(0,1)$ è interno, esterno, o sulla frontiera di E.
4. Sia $f(x,y,z) := 5x^2+2xy-4xz-2x+2y^2+z^2$.
   a) Determinare i punti critici di f,
   b) dire se sono punti di massimo locale, minimo locale, o altro.
5. Calcolare $\displaystyle\int_T 3x^2y\,dx\,dy$ dove T è il semicerchio dei punti (x,y) tali che $x^2+y^2\leq 1$ e $y\geq 0$.
6. Scrivere lo sviluppo di Taylor al secondo ordine in $(0,0)$ di $f(x,y) := \sqrt[3]{1+x^2-y^2}$.
7. Calcolare $\displaystyle\int_T \frac{9y^2}{1+x^4}\,dx\,dy$ dove T è l'insieme dei punti (x,y) tali che $|y|\leq x$.
8. Sia E l'insieme dei punti (x,y) tali che $x>0$ e $y=\sin(1/x)$. Disegnare approssimativamente E, indicando i punti di accumulazione di E che non appartengono ad E stesso (cioè $\overline{E}\setminus E$).

Prima parte, gruppo B

1. Calcolare il dominio di definizione ed il gradiente di $f(x,y) := \log\left[\sqrt{\dfrac{1+x^2+y^2}{xy}}\right]$.
2. Dire se esiste il limite per $(x,y)\to(0,0)$ di $\dfrac{1-\cos(xy)}{x^2+y^2}$ ed in caso calcolarlo.
3. a) Disegnare l'insieme E dei punti (x,y) tali che $x^2-y^2\leq 1$.
   b) Dire se il punto $(0,1)$ è interno, esterno, o sulla frontiera di E.
4. Sia $f(x,y,z) := 4x^2+2xy-4xz-2x+2y^2+z^2$.
   a) Determinare i punti critici di f,
   b) dire se sono punti di massimo locale, minimo locale, o altro.
5. Calcolare $\displaystyle\int_T 3x^2y\,dx\,dy$ dove T è il semicerchio dei punti (x,y) tali che $x^2+y^2\leq 1$ e $x\geq 0$.
6. Scrivere lo sviluppo di Taylor al secondo ordine in $(0,0)$ di $f(x,y) := \sqrt[4]{1+x^2-y^2}$.
7. Calcolare $\displaystyle\int_T \frac{9y^2}{1+x^8}\,dx\,dy$ dove T è l'insieme dei punti (x,y) tali che $0\leq y\leq x$.
8. Sia E l'insieme dei punti (x,y) tali che $x>0$ e $y=\sin^2(1/x)$. Disegnare approssimativamente E, indicando i punti di accumulazione di E che non appartengono ad E stesso (cioè $\overline{E}\setminus E$).

Seconda parte, gruppo A

1. Sia T l'insieme dei punti (x,y) tali che $x^2\leq y\leq 3x^2$ e $1\leq xy\leq 2$.
   a) Disegnare T.

b) Utilizzando un opportuno cambio di variabile, calcolare $\displaystyle\int_T y^3 e^{y/x^2}\,dx\,dy$.

2. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione omogenea di grado 3, cioè tale che $f(tx, ty) = t^3 f(x, y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ e $t > 0$, e di classe C^2.
a) Dimostrare che $xf_x + yf_y = 3f$ e $x^2 f_{xx} + 2xyf_{xy} + y^2 f_{yy} = 6f$.
b) Trovare formule analoghe per una funzione f omogenea di grado α su $\mathbb{R}^n$.

3. Dato a numero reale, sia $f(x, y) := (yx - x^2 + 2y + 3)^3 + \log(yx - x^2 + 2y + a)$.
a) Trovare i punti critici di f e discuterne la natura.
b) Determinare l'estremo superiore ed inferiore dei valori di f.

4. Fissato $r > 0$, sia C_r la parte del semipiano $y \geq 0$ contenuta nella circonferenza che passa per i punti $(0, 0)$, $(r, 1/r)$ e $(2r, 0)$.
a) Disegnare l'insieme C_r e descriverlo in coordinate polari (opportunamente centrate).
b) Calcolare $\displaystyle\int_{C_r} \frac{x}{x^2 + y^2}\,dx\,dy$.
c) Calcolare $\displaystyle\lim_{r\to+\infty} \int_{C_r} \frac{x^a}{x^2 + y^2}\,dx\,dy$ al variare di a numero reale positivo.

Seconda parte, gruppo B

1. Sia T l'insieme dei punti (x, y) tali che $x^4 \leq y \leq 3x^4$ e $1 \leq xy \leq 2$.
a) Disegnare T.
b) Utilizzando un opportuno cambio di variabile, calcolare $\displaystyle\int_T y^5 e^{y/x^4}\,dx\,dy$.

2. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione omogenea di grado 2, cioè tale che $f(tx, ty) = t^2 f(x, y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ e $t > 0$, e di classe C^2.
a) Dimostrare che $xf_x + yf_y = 2f$ e $x^2 f_{xx} + 2xyf_{xy} + y^2 f_{yy} = 2f$.
b) Trovare formule analoghe per una funzione f omogenea di grado α su $\mathbb{R}^n$.

3. Dato a numero reale, sia $f(x, y) := (yx - x^2 - 3x + 1)^3 + \ln(yx - x^2 - 3x + a)$.
a) Trovare i punti critici di f e discuterne la natura.
b) Determinare l'estremo superiore ed inferiore dei valori di f.

4. Fissato $r > 0$, sia C_r la parte del semipiano $y \geq 0$ contenuta nella circonferenza che passa per i punti $(0, 0)$, $(r, 1/r)$ e $(2r, 0)$.
a) Disegnare l'insieme C_r e descriverlo in coordinate polari (opportunamente centrate).
b) Calcolare $\displaystyle\int_{C_r} \frac{y}{x^2 + y^2}\,dx\,dy$.
c) Calcolare $\displaystyle\lim_{r\to+\infty} \int_{C_r} \frac{x^a}{x^2 + y^2}\,dx\,dy$ al variare di a numero reale positivo.

Secondo Compitino, 20 dicembre 2005

Prima parte

1. a) Determinare dove esiste e quanto vale il limite puntuale di $f_n(x) := x + n^{x-n}$ per $n \to +\infty$.
   b) Dire su quali dei seguenti intervalli la convergenza è uniforme: $\mathbb{R}$; $(-\infty, 0]$; $[0, +\infty)$; $[0, 1]$.
2. Calcolare il gradiente della funzione $f(x, y) := \displaystyle\int_0^{x^2 y} t^4 e^t \, dt$.
3. Dire per quali valori dei parametri a e b, con $a \geq 0$, la funzione $f(x) := ax^3 + b$ risulta essere una contrazione sull'insieme $X := [-1, 1]$.
4. Calcolare il raggio di convergenza ed il valore della serie di potenze $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{2^n}{n} x^{2n}$.
5. Dare un'esempio di successione di funzioni $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ che convergono uniformemente a 0 le cui derivate non convergono uniformemente.
6. Trasformare il seguente problema di Cauchy per un'equazione del secondo ordine in un problema di Cauchy per un sistema del primo ordine:
$$\begin{cases} \ddot{y} = yx^3 + \log \dot{y} \\ y(0) = 0 \\ \dot{y}(0) = 1 \end{cases}$$
7. Dare un esempio di equazione lineare omogenea a coefficienti costanti che ha come soluzione la funzione $y(x) := x \sin(2x) + 3 \cos(2x)$.
8. Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} \dot{y} = xy + 4xy^3 \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

Seconda parte

1. Si consideri la serie di funzioni
$$\sum_{n=1}^\infty (-1)^n x n^{1-x} .$$
   a) Dire per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie converge puntualmente.
   b) Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la serie converge totalmente sulla semiretta $[a, +\infty]$.
   c) Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la serie converge uniformemente sulla semiretta $[a, +\infty]$.
2. a) Trovare la soluzione generale dell'equazione $D^4 y - y = \sin x$.
   b) Sia V lo spazio affine delle soluzioni dell'equazione $D^4 y - y = \sin x$ tali che $y(x) = o(x^2)$ per $x \to +\infty$. Determinare la dimensione di V.
   c) Dato n intero positivo, trovare la soluzione generale dell'equazione $D^{2n} y - y = \sin x$.
   d) Dato n intero positivo, sia V lo spazio affine delle soluzioni dell'equazione $D^{2n} y - y = \sin x$ tali che $y(x) = o(x^2)$ per $x \to +\infty$. Determinare la dimensione di V.
3. Si consideri il sistema
$$\begin{cases} \dot{y} = y^2 \sin z \\ \dot{z} = y \cos z \end{cases} .$$
   a) Discutere l'esistenza ed unicità delle soluzioni per il problema di Cauchy associato.
   b) Trovare la soluzione che soddisfa le condizioni iniziali $y(0) = 1$ e $z(0) = \pi/2$.
   c) Trovare la soluzione che soddisfa le condizioni iniziali $y(0) = 1$ e $z(0) = 0$.

SCRITTO DEL I APPELLO, 24 GENNAIO 2006

PRIMA PARTE, GRUPPO A

1. Calcolare $\displaystyle\int_A \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2)^2}$ dove A è l'insieme dei punti (x,y,z) tali che $z^2 \le x^2+y^2 \le z^3$.
2. Calcolare, se esiste, il limite delle seguenti funzioni per (x,y) che tende a $(0,0)$:

   a) $x\log(x^2+y^2)$, b) $\displaystyle\frac{y\sin x}{x^2+2y^2}$, c) $\displaystyle\frac{x^2y}{\sin(xy)}$.

3. Determinare il gradiente della funzione $f(x,y) := \arctan\big(e^{x-y}\big) + \arctan\big(e^{y-x}\big)$.
4. Trovare i punti critici di $f(x,y) := \exp(x^2-2y+2x-yx)$ e discuterne la natura.
5. a) Determinare il limite puntuale della successione di funzioni $f_n(x) := \displaystyle\frac{\arctan(nx)}{2+\cos(x/n)}$.

   b) Dire in quali dei seguenti intervalli la convergenza è uniforme: $[0,2]$; $[1,3]$; $[1,\infty]$; $\mathbb{R}$.
6. Calcolare il valore ed il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(3^n+(-1)^n4^n)x^{2n}$.
7. Scrivere il sistema del secondo ordine $\begin{cases}\ddot{x}=x-y\\ \ddot{y}=x+y\end{cases}$ come sistema del primo ordine.
8. Risolvere l'equazione $\dot{y} = \displaystyle\frac{y}{y-x}$ con dato iniziale $y(1)=3$.

PRIMA PARTE, GRUPPO B

1. Calcolare $\displaystyle\int_A \frac{dx\,dy\,dz}{x^2+y^2}$ dove A è l'insieme dei punti (x,y,z) tali che $z^4 \le x^2+y^2 \le z^5$.
2. Calcolare, se esiste, il limite delle seguenti funzioni per (x,y) che tende a $(0,0)$:

   a) $x^2\log(x^2+y^2)$, b) $\displaystyle\frac{y^2\sin x}{x^2+2y^2}$, c) $\displaystyle\frac{xy}{\sin(xy)}$.

3. Determinare il gradiente della funzione $f(x,y) := \arctan\left(e^{xy}\right) + \arctan\big(e^{-xy}\big)$.
4. Trovare i punti critici di $f(x,y) := \exp(x^2+2y-2x-yx)$ e discuterne la natura.
5. a) Determinare il limite puntuale della successione di funzioni $f_n(x) := \displaystyle\frac{\arctan(nx)}{2+\sin(x/n)}$.

   b) Dire in quali dei seguenti intervalli la convergenza è uniforme: $[0,3]$; $[2,4]$; $[2,\infty]$; $\mathbb{R}$.
6. Calcolare il valore ed il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(7^n+(-1)^n8^n)x^{3n}$.
7. Scrivere il sistema del secondo ordine $\begin{cases}\ddot{x}=x+y\\ \ddot{y}=x-y\end{cases}$ come sistema del primo ordine.
8. Risolvere l'equazione $\dot{y} = \displaystyle\frac{y}{y-x}$ con dato iniziale $y(1)=4$.

Seconda parte, gruppo A

1. Dato a numero reale positivo, sia $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ il grafico della funzione $z = a\cos(xy)$, e sia $d(a)$ l'estremo inferiore della distanza di un punto di Γ dall'origine.
   a) Dimostrare che questo estremo inferiore è in effetti un minimo.
   b) Calcolare $d(a)$ per $a = 1$.
   c) Calcolare $d(a)$ per $a = 2$.
   d) Determinare il comportamento di $d(a)$ per $a \to +\infty$.
2. Data $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ funzione di classe C^1 ed R matrice $n \times n$, poniamo
$$\lambda := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |I - R \cdot Df(x)|$$
   dove I indica la matrice identità.
   a) Dimostrare che se $\lambda < 1$ e $R = I$ allora l'equazione $f(x) = 0$ ammette una ed una sola soluzione x. [*Usare il teorema delle contrazioni.*]
   b) Dimostrare che se $\lambda < 1$ ed R è invertibile allora l'equazione $f(x) = y$ ammette una ed una sola soluzione x per ogni dato $y \in \mathbb{R}^n$.
   c) Dati $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $a^2 + b^2 < 1$, dimostrare che il sistema
$$\begin{cases} y + \sin(ax + by) = 1 \\ -x + \cos(ax + by) = 3 \end{cases}$$
   ammette una ed una sola soluzione.
3. Dato $a \in \mathbb{R}$, si consideri l'equazione differenziale
$$D^4y + 2a\,D^2y + y = e^{-x} \ .$$
   a) Trovare la soluzione generale per $a = 1$.
   b) Trovare la soluzione generale per $a = -1$.
   c) Determinare, al variare di a, la dimensione dell'insieme V delle soluzioni dell'equazione con limite 0 per $x \to +\infty$.

Seconda parte, gruppo B

1. Dato a numero reale positivo, sia $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ il grafico della funzione $z = a\cos(4xy)$, e sia $d(a)$ l'estremo inferiore della distanza di un punto di Γ dall'origine.
   a) Dimostrare che questo estremo inferiore è in effetti un minimo.
   b) Calcolare $d(a)$ per $a = 1/2$.
   c) Calcolare $d(a)$ per $a = 1$.
   d) Determinare il comportamento di $d(a)$ per $a \to +\infty$.
2. Data $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ funzione di classe C^1 ed R matrice $n \times n$, poniamo
$$\lambda := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |I - R \cdot Df(x)|$$
   dove I indica la matrice identità.
   a) Dimostrare che se $\lambda < 1$ e $R = I$ allora l'equazione $f(x) = 0$ ammette una ed una sola soluzione x. [*Usare il teorema delle contrazioni.*]

b) Dimostrare che se $\lambda < 1$ ed R è invertibile allora l'equazione $f(x) = y$ ammette una ed una sola soluzione x per ogni dato $y \in \mathbb{R}^n$.
c) Dati $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $a^2 + b^2 < 1$, dimostrare che il sistema

$$\begin{cases} y - \cos(ax + by) = 2 \\ -x + \sin(ax + by) = -3 \end{cases}$$

ammette una ed una sola soluzione.

3. Dato $a \in \mathbb{R}$, si consideri l'equazione differenziale

$$D^4 y - 2a\, D^2 y + y = e^{-x} \ .$$

a) Trovare la soluzione generale per $a = 1$.
b) Trovare la soluzione generale per $a = -1$.
c) Determinare, al variare di a, la dimensione dell'insieme V delle soluzioni dell'equazione con limite 0 per $x \to +\infty$.

Scritto del II appello, 24 febbraio 2006

Prima parte, gruppo A

1. Calcolare $\lim_{t\to+\infty}\int_{Q_t} x^2(t+ye^x)\,dx\,dy$ dove $Q_t := [0,1]\times[0,1/t]$.
2. Disegnare la chiusura dei seguenti insiemi:
$$A := \big\{(\sin p, \cos q):\ p,q\in\mathbb{Q}\big\}\ ,\quad B := \big\{(\sin p, \sin p):\ p\in\mathbb{Q}\big\}$$
3. Dati i vettori $v := (-1,2,2)$ e $w := (2,0,-2)$, calcolare a) l'angolo θ compreso tra v e w; b) il prodotto vettoriale $v\times w$.
4. Descrivere il quadrato $Q := [0,1]\times[0,1]$ in coordinate polari.
5. Sia $f(x,y) := \big(y^3+3y+\sin(xy), e^x-e^{-x}+\cos(xy)\big)$. Calcolare il valore della funzione inversa f^{-1} e del suo gradiente Df^{-1} nel punto $(0,1)$.
6. Dare un esempio di funzione $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ di classe C^∞ e radiale (cioè che dipende solo da $|x|$) che non ammette né massimo né minimo.
7. Determinare la soluzione generale dell'equazione $x^3D^3y-3xDy+3y=0$ per $x>0$.
8. Per ciascuna delle seguenti funzioni y, scrivere un'equazione lineare omogenea a coefficienti costanti di cui y è soluzione:
$$\text{a) } y=(x+2e^x)e^x\ ,\quad \text{b) } y=xe^{-x}\cos x\ ,\quad \text{c) } y=x^n \text{ con } n>0 \text{ intero.}$$

Prima parte, gruppo B

1. Calcolare $\lim_{t\to+\infty}\int_{Q_t} x^2(3t+y^2e^x)\,dx\,dy$ dove $Q_t := [0,1]\times[0,1/t]$.
2. Disegnare la chiusura dei seguenti insiemi:
$$A := \big\{(\cos p, \cos q):\ p,q\in\mathbb{Q}\big\}\ ,\quad B := \big\{(\cos p, \sin p):\ p\in\mathbb{Q}\big\}$$
3. Dati i vettori $v := (-2,0,2)$ e $w := (1,-2,-2)$, calcolare a) l'angolo θ compreso tra v e w; b) il prodotto vettoriale $v\times w$.
4. Descrivere il quadrato $Q := [0,1]\times[-1,0]$ in coordinate polari.
5. Sia $f(x,y) := \big(e^x-e^{-x}+\cos(xy), y^3+3y+\sin(xy)\big)$. Calcolare il valore della funzione inversa f^{-1} e del suo gradiente Df^{-1} nel punto $(1,0)$.
6. Dare un esempio di funzione $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ di classe C^∞ e radiale (cioè che dipende solo da $|x|$) che non ammette né massimo né minimo.
7. Determinare la soluzione generale dell'equazione $x^3D^3y-6xDy+12y=0$ per $x>0$.
8. Per ciascuna delle seguenti funzioni y, scrivere un'equazione lineare omogenea a coefficienti costanti di cui y è soluzione:
$$\text{a) } y=(x+3e^x)e^{-x}\ ,\quad \text{b) } y=xe^x\sin x\ ,\quad \text{c) } y=x^n \text{ con } n>0 \text{ intero.}$$

SECONDA PARTE

1. a) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua, e D l'insieme dei punti (x, y) tali che $x^2 + y^2 \leq 1$. Dimostrare che

$$\int_D f(x^2 - y^2)\, dx\, dy = \int_{-1}^{1} \left[\log\left(1 + \sqrt{1 - t^2}\right) - \log|t| \right] f(t)\, dt \ .$$

   b) Dato B l'insieme dei punti (x, y, z) tali che $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, trovare una formula analoga per

$$\int_B f(x^2 - y^2 - z^2)\, dx\, dy\, dz \ .$$

2. a) Fissato a numero reale, sia V l'insieme delle soluzioni dell'equazione $\ddot{y} + ay = 0$ tali che $y(0) = y(1) = 0$. Determinare la dimensione di V al variare di a.
   b) Dato P polinomio di secondo grado, sia V l'insieme delle soluzioni dell'equazione del secondo ordine $P(D)y = 0$ tali che $y(0) = y(1) = 0$. Dire per quali P la dimensione di V è maggiore di 0.

3. Sia E un insieme in $\mathbb{R}^n$, X uno spazio metrico e $g : E \to X$ una funzione; indichiamo con F la chiusura di E.
   a) Dimostrare che se $X = \mathbb{R}$ e g è uniformemente continua, allora g può essere estesa per continuità alla chiusura di E, cioè esiste una funzione continua $\hat{g} : F \to X$ che coincide con g su E.
   b) Far vedere che l'enunciato a) non è vero se si assume solamente che g sia continua.
   c) Far vedere che l'enunciato a) non è vero se X è uno spazio metrico qualunque.
   d) Che ipotesi bisogna fare su X affinché valga l'enunciato a)?

Scritto del III appello, 15 giugno 2006

Prima parte

1. Calcolare il gradiente di $f(x) := \log(\sqrt{1+|x|^2})$ dove $x \in \mathbb{R}^n$.
2. Calcolare la derivata parziale rispetto a y della funzione $f(xy^2, yx^2)$ nel punto $(1,1)$.
3. Trovare i punti critici di $f(x,y,z) := \arctan(z^2 + x - y^2 - xy^2)$ e discuterne la natura.
4. Calcolare $\displaystyle\int_B 4xy\cos(x^2-y^2)\,dx\,dy$ dove $B := \big\{(x,y) : \, x^2+y^2 \le 1, \, x,y \ge 0\big\}$.
5. a) Calcolare il limite puntuale su $\mathbb{R}$ della successione di funzioni $f_n(x) := \log\Big(1 + \dfrac{x^2}{n}\Big)$.
   b) Dire se le funzioni f_n convergono uniformemente su $[-10,10]$.
   c) Dire se le funzioni f_n convergono uniformemente su $[1,+\infty]$.
6. Calcolare a) il raggio di convergenza e b) il valore della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(1-2^n)x^{3n}$.
7. a) Scrivere lo sviluppo di Taylor all'ordine 2 in $(0,0,0)$ di $f(x,y,z) := \exp(y^2 + \sin(xz))$.
   b) Calcolare il gradiente e la matrice Hessiana di f in $(0,0,0)$.
8. Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale $\dot{y} = xy^3 + y$.

Seconda parte

1. a) Determinare i punti critici della funzione $f(x,y) := x^4 + 4x^2y^2 - 4x^2$;
   b) dire se si tratta di massimi locali, minimi locali o altro;
   c) dire se esistono i punti di massimo e minimo assoluto di f, ed in caso determinarli.
2. Sia V l'intersezione dei tre cilindri pieni di raggio 1 con assi uguali agli assi coordinati. Calcolare il volume di $A \cap V$. [*Può essere utile cominciare con il calcolo del volume di* $A \cap V$ *dove* A *è l'insieme dei punti* (x,y,z) *tali che* $0 \le x \le y \le z$.]
3. Dato n intero positivo, si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y + Dy + D^2y + \cdots + D^ny = (n+1)e^x \\ D^ky(0) = 2 \qquad \text{per } k \text{ pari, } 0 \le k < n, \\ D^ky(0) = 0 \qquad \text{per } k \text{ dispari, } 0 \le k < n. \end{cases} \tag{1}$$

   a) Determinarne la soluzione di (1) per $n = 3$;
   b) determinarne la soluzione di (1) per ogni n dispari.

Scritto del IV appello, 21 luglio 2006

Prima parte

1. Calcolare la derivata seconda della funzione $f(x,y) := \sqrt{x^2+y^2}$.
2. Scrivere lo sviluppo di Taylor all'ordine 2 in $(0,0,0)$ della funzione $f(x,y,z) = e^{x+yz}$.
3. Dato $a \in \mathbb{R}$, sia $f(x,y,z) := -4x + 2x^2 + y^2 + ayz + 3z^2$. Calcolare al variare di $a \neq \pm\sqrt{12}$ i punti critici di f e determinarne la natura.
4. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ l'insieme D dei punti (x,y) tali che $x^2+y^2 \leq 1 + ax^4$ è limitato.
5. Calcolare il raggio di convergenza R ed il valore della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} x^n$.
6. Sia $D := \big\{(x,y) : 0 \leq x^3 \leq y \leq 2\big\}$. Calcolare $\displaystyle\int_D 6x^2 e^{y^2}\, dx\, dy$.
7. Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} \dot y - 2xy = e^{x^2} \\ y(1) = 0 \end{cases}$.
8. Scrivere $\begin{cases} \ddot y = x^2 y + y^2 \dot y \\ y(0) = 0 \\ \dot y(0) = 1 \end{cases}$ come problema di Cauchy per un sistema del primo ordine.

Seconda parte

1. Sia $A := \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1\,, 0 \leq y \leq \sqrt{x}\,\}$ e sia B l'insieme ottenuto ruotando A intorno all'asse x. Calcolare
$$\int_B e^{x^3} y^2\, dx\, dy\, dz\ .$$
2. Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzione continua e 2π-periodica, sia y la soluzione del problema di Cauchy
$$\begin{cases} \ddot y + y = f(x) \\ y(0) = 0 \\ \dot y(0) = 0 \end{cases}.$$
   a) Calcolare y nel caso particolare in cui $f(x) := \dfrac{4}{1+\sin^2 x}$.
   b) Dimostrare che y è 2π-periodica se e solo se $y(2\pi) = \dot y(2\pi) = 0$.
   c) Dimostrare che y è 2π-periodica se e solo se $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\sin t\, dt = \int_0^{2\pi} f(t)\cos t\, dt = 0$.
3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e strettamente crescente tale che $f(0) = 0$.
   a) Sia $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 che risolve l'equazione differenziale $\ddot u = f(u)$ e soddisfa $u(a), u(b) \geq 0$. Dimostrare che u è una funzione positiva. [*Suggerimento: ragionare per assurdo e vedere cosa succede nel punto di minimo di u.*]
   b) Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ e sia $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e di classe C^2 in Ω che risolve l'equazione differenziale $\Delta u = f(u)$ in Ω e soddisfa $u(x) \geq 0$ per ogni $x \in \partial\Omega$. Dimostrare che u è una funzione positiva.

Scritto del V appello, 7 settembre 2006

Prima parte

1. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da $f(x, y) := \max\{x, y\}$.
   a) Dire in quali punti f è differenziabile;
   b) calcolare il gradiente di f.
2. Calcolare la derivata della funzione $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ data da $f(x) := x|x|^4$.
3. Determinare li sviluppo di Taylor all'ordine 2 in $(0, 0)$ di $f(x, y) = 2\cos(x + y) + \sin(2xy)$.
4. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la matrice $M := \begin{pmatrix} 3-a & 2 & 0 \\ 2 & 3-a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ è definita positiva.
5. Sia T l'insieme dei punti nel *primo quadrante* che soddisfano $x \le y \le 3x$ e $1 \le xy \le 2$. Riscrivere l'integrale $\int_T f(y^2)\, dx\, dy$ nelle variabili $u = xy$ e $v = y/x$.
6. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{3^n x^{2n}}{n^2+1}$.
7. Si consideri l'equazione lineare non omogenea $D^3y - 2D^2y + Dy - 2y = \log x$. Scrivere (ma non risolvere!) il sistema che si ottiene applicando il metodo della variazione delle costanti.
8. Trovare la soluzione generale dell'equazione $\dot y = 2xy(1 + \exp(-x^2)\, y)$.

Seconda parte

1. Calcolare $\displaystyle\int_D \frac{x^3}{(x^2+y^2)^2}\, dx\, dy$ dove D è il cerchio di centro $(1, 0)$ e raggio 1.
2. a) Si consideri l'equazione lineare omogenea
$$\ddot y + \frac{2(x+1)\dot y}{1+x^2} + \frac{y}{(1+x^2)^2} = 0\ . \tag{1}$$
   Si trovi un cambio di variabile per la x che trasforma la (1) in un'equazione lineare a coefficienti costanti, e quindi si calcoli la soluzione generale della (1).
   b) Date $\alpha, \beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzioni di classe C^1 con β strettamente positiva, si consideri l'equazione lineare omogenea
$$\ddot y + \alpha \dot y + \beta y = 0\ . \tag{2}$$
   Sotto quali ipotesi su α e β è possibile trovare un cambio di variabile per la x che trasforma la (2) in un'equazione lineare a coefficienti costanti?
3. a) Siano f, g funzioni reali sull'intervallo I tali che fg è una funzione strettamente monotona. Dimostrare che se x, y risolvono il sistema
$$\begin{cases} f(x) = g(y) \\ f(y) = g(x) \end{cases}$$
   allora x è uguale a y.
   b) Si consideri l'insieme di tutti i triangoli nel piano tali che uno dei vertici è $(0, -1)$ e gli altri due appartengono a due rami distinti del grafico della funzione $1/x^2$. Dimostrare che tra tutti questi triangoli ne esiste uno di area minima.
   c) Determinare il triangolo di area minima di cui al punto b).

Scritto per l'esame unificato, 11 gennaio 2007

Prima parte

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1. Calcolare la derivata parziale rispetto alla variabile x della funzione composta $f(xy + yz, yz + zx)$.

2. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{1+2^n} x^{3n}$.

3. Trovare un'equazione lineare omogenea a coefficienti costanti che ammetta come soluzione la funzione $y = x \sin(2x)$.

4. Calcolare il volume dell'insieme E dei punti (x, y, z) tali che $x \geq -1/2$ e $1 - y^2 - z^2 \geq e^x$.

Seconda parte

1. a) Sia D il cerchio di centro $(1, 0)$ e raggio 1. Calcolare $\displaystyle\int_D x^2 + y^2 \, dx \, dy$.

   b) Sia B la palla di centro $(1, 0, 0)$ e raggio 1. Calcolare $\displaystyle\int_B x^2 + y^2 + z^2 \, dx \, dy \, dz$.

2. Sia $n \geq 2$. Data $v : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ di classe C^2, sia u la funzione radiale definita da $u(x) := v(|x|)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
   a) Esprimere il gradiente ed il laplaciano di u in termini di v e delle sue derivate.
   b) Determinare tutte le funzioni radiali u che risolvono l'equazione $\Delta u = 1/|x|$ in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Scritto per l'esame unificato, 31 gennaio 2007

Prima parte

1. Calcolare, se esistono, i seguenti limiti: a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2y}-1}{xy}$; b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y^2}{\sin(x^2+y)}$.
2. Siano dati una funzione scalare f ed un campo di vettori G su $\mathbb{R}^n$, entrambi differenziabili in ogni punto. Scrivere la formula per la divergenza del campo di vettori fG,
3. Per ogni intero positivo n ed ogni $x \in N$ sia $f_n(x) := (x/2)^n$. Dire se le funzioni f_n convergono uniformemente sui seguenti intervalli: a) $(0,1]$; b) $[0,2)$; c) $(1,3]$.
4. Sia S la superficie ottenuta facendo ruotare attorno all'asse delle x il grafico della funzione $y = \sin x$ con $-\pi \le x \le \pi$. Calcolare il volume delimitato da S.

Seconda parte

1. Sia D l'insieme dei punti (x,y,z) tali che $x^2+y^2+4z^2 \le 1$ e $x^2+4y^2+z^2 \le 1$. Calcolare

$$\int_D |xyz|\, dx\, dy\, dz\ .$$

2. Si consideri la funzione

$$f(x,y) := ((x+y)^2 - 2\log(x+y))(4xy - \log(4xy))\ .$$

   a) Determinare lo sviluppo di Taylor al secondo ordine di f nel punto $(1/2, 1/2)$.
   b) Dimostrare che se $a \ne b$ l'unica soluzione del sistema $\begin{cases} t+au=0 \\ t+bu=0 \end{cases}$ è $t=u=0$.
   c) Determinare i punti critici di f .
   d) Determinare l'estremo inferiore e superiore di f e dire se si tratta di massimo o minimo.

Integrazione, a.a. 2005/06 - Testi

Primo Compitino, 26 aprile 2006

Prima parte, gruppo A

1. a) Calcolare l'esponenziale e^{At} con $A := \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

   b) Risolvere il sistema $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y \\ \dot{y} = 3y - 2x \end{cases}$ con le condizioni iniziali $\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

2. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $z = e^{ax}$ è soprasoluzione dell'equazione $\dot{y} = y \sin x - 1$.

3. Calcolare il rotore del campo di vettori $F(x,y,z) := (x^2y, y^2z, z^2x)$.

4. Sia S la superficie in $\mathbb{R}^3$ parametrizzata da $\Phi(u,v) := (u^3+v^3, u^3-v^3, 2uv)$ con $u, v \in \mathbb{R}$. Scrivere l'equazione del piano tangente ad S nel punto $p = (1,1,0)$.

5. Scrivere la formula per la lunghezza di una curva data in coordinate polari da $\rho = \rho(\theta)$ e $a \leq \theta \leq b$.

6. Su $\mathbb{R}^2$ si consideri il campo di vettori $F(x,y) := (x^2 + ye^{xy}, y^2 + xe^{xy})$. Calcolare l'integrale di F sulle seguenti curve:
   a) il segmento orientato che va da $(-1,0)$ a $(1,0)$;
   b) la curva $\gamma(t) := \big(\cos t, (1+t^2)\sin t\big)$ con $t \in [0,\pi]$ (usare il Teorema di Gauss-Green).

7. Dare un esempio di curva $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ continua, iniettiva e di lunghezza infinita.

8. Dati v, w vettori (colonna) in $\mathbb{R}^m$, si consideri la matrice $A = v\,w^t$, ovvero $A_{ij} = v_iw_j$.
   a) Esiste un numero c tale che $A^2 = cA$: trovare c.
   b) Per ogni $n \geq 2$ esiste un numero c_n tale che $A^n = c_nA$: trovare c_n.
   b) Esiste un numero d tale che $e^A = I + dA$: trovare d.

Prima parte, gruppo B

1. a) Calcolare l'esponenziale e^{At} con $A := \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

   b) Risolvere il sistema $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 3y \\ \dot{y} = 2y - 3x \end{cases}$ con le condizioni iniziali $\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$.

2. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $z = e^{ax}$ è sottosoluzione dell'equazione $\dot{y} = y \sin x + 1$.

3. Calcolare il rotore del campo di vettori $F(x,y,z) := (xy^2, yz^2, zx^2)$.

4. Sia S la superficie in $\mathbb{R}^3$ parametrizzata da $\Phi(u,v) := (u^3-v^3, u^3+v^3, 4uv)$ con $u, v \in \mathbb{R}$. Scrivere l'equazione del piano tangente ad S nel punto $p = (-1,1,0)$.

5. Scrivere la formula per la lunghezza di una curva data in coordinate polari da $\rho = \rho(\theta)$ e $a \leq \theta \leq b$.

6. Su $\mathbb{R}^2$ si consideri il campo di vettori $F(x,y) := (x^4 + y\sin(xy), y^4 + x\sin(xy))$. Calcolare l'integrale di F sulle seguenti curve:
   a) il segmento orientato che va da $(-1,0)$ a $(1,0)$;
   b) la curva $\gamma(t) := \big(\cos t, (1+2t^2)\sin t\big)$ con $t \in [0,\pi]$ (usare il Teorema di Gauss-Green).

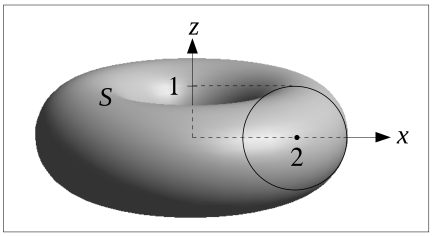
7. Dare un esempio di curva $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ continua, iniettiva e di lunghezza infinita.

8. Dati v, w vettori (colonna) in $\mathbb{R}^m$, si consideri la matrice $A = v\,w^t$, ovvero $A_{ij} = v_iw_j$.
   a) Esiste un numero c tale che $A^2 = cA$: trovare c.
   b) Per ogni $n \geq 2$ esiste un numero c_n tale che $A^n = c_nA$: trovare c_n.
   b) Esiste un numero d tale che $e^A = I + dA$: trovare d.

SECONDA PARTE

1. Per ogni $a, b > 0$, sia $L(a, b)$ la lunghezza dell'ellisse con semiassi a e b.
   a) Calcolare il gradiente di L nei punti (r, r) con $r > 0$.
   b) Dimostrare che tra tutte le ellissi con somma dei semiassi pari a 2 quella di lunghezza minima è la circonferenza. (Suggerimento: mostrare che la funzione $f(x) := L(1-x, 1+x)$ è pari e convessa).

2. Sia S il la superficie toroidale in $\mathbb{R}^3$ ottenuta facendo ruotare attorno all'asse z la circonferenza sul piano xz di centro $(2, 0)$ e raggio 1 (vedi figura), e sia la curva γ ottenuta intersecando S con la superficie di equazione $x = 2 + z^2$. Si consideri inoltre il campo di vettori



$$F(x, y, z) := \left(1 + \frac{z^2 - 4\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2}\right)(-y, x, 0)$$

   a) Trovare una parametrizzazione regolare di S e calcolare l'area di S.
   b) Dimostrare che il rotore di F è tangente in ogni punto alla superficie S.
   c) Disegnare approssimativamente γ, e calcolare l'integrale di F su γ.

3. Si consideri l'equazione differenziale

$$\dot{y} = 10\,(1 + y^2)\left(1 + \frac{x-1}{x}y\right) \tag{$*$}$$

   definita per $x > 0$. Per ogni $s > 0$, sia y_s la soluzione massimale dell'equazione $(*)$ che soddisfa la condizione iniziale $y(s) = 0$, e sia $\tau(s)$ l'estremo superiore del dominio di definizione di y_s. Dimostrare i seguenti enunciati:
   a) $y_s(x)$ è positiva e strettamente crescente per $x \geq s$;
   b) $\tau(s) \geq 1$ per ogni s;
   c) $\tau(s)$ è una funzione crescente di s;
   d) $\tau(s) < +\infty$ per ogni s e $\tau(s) \sim s$ per $s \to +\infty$;
   e) esiste $\bar{s} > 0$ tale che $\tau(\bar{s}) = 1$ (Suggerimento: cercare una sottosoluzione della forma $z = \frac{ax}{1-x} - b$ con $a, b > 0$).

Secondo Compitino, 5 giugno 2006

Prima parte

1. Sia $P := (1, 1, 0)$ e si consideri il sistema $\begin{cases} -x^2 + ay + y^2 + z^2xy = a \\ x^2 - 3y + b = 0 \end{cases}$.
   a) Per quali $a, b \in \mathbb{R}$ il sistema descrive una curva passante per il punto P e regolare in un intorno di P?
   b) Per tali valori di a, b, trovare un vettore non nullo tangente alla curva in P.
2. Trovare una funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ di classe C^∞ il cui luogo di zeri coincide con l'ellisse sul piano $z = 1$ di equazione $x^2 + 2y^2 = 1$.
3. Trovare il valore massimo e minimo della funzione $f(x, y, z) := 2x + y$ sull'insieme dei punti (x, y, z) tali che $x^2 + y^2 + yz + z^2 = 3$.
4. Sia D il cerchio di centro 0 e raggio $\sqrt{3}$ nel piano xy, e sia $f : D \to \mathbb{R}$ data da $f(x, y) := xy$. Calcolare l'area del grafico di f.
5. Dire quali dei seguenti insiemi piani sono chiusi e quali sono limitati:
$$\text{a) } \{x^2 + y^4 < 2\}\,; \qquad \text{b) } \{x^2y + y^2 \le 1\}\,; \qquad \text{c) } \{(x + y)^2 + y^4 \le 1\}\,.$$
6. Calcolare il flusso del campo di vettori $F(x, y, z) = (yz, y - x, e^{x+y} + 2z)$ uscente dall'insieme A dei punti (x, y, z) tali che $x^2 + y^2 + 2z^2 \le 1 \le 2x^2 + 2y^2 + 2z^2$.
7. Calcolare il potenziale sul primo ottante $\{x, y, z > 0\}$ del campo di vettori
$$F(x, y, z) := \Big(\frac{1}{x + y} + \frac{1}{x + z}, \frac{z - x}{(x + y)(y + z)}, \frac{y - x}{(x + z)(y + z)}\Big)\,.$$
8. Scrivere la serie di Fourier reale e complessa di $f(x) := 8 \cos^3 x$.

Seconda parte

1. Dato $\alpha \in \mathbb{R}$, sia C_α l'insieme dei punti (x, y, z) tali che $x^2 + y^2 = 1$ e $x + z^2 = \alpha$.
   a) Dire per quali α l'insieme C_α non è vuoto;
   b) dire per quali α l'insieme C_α è una curva regolare;
   c) determinare i punti di massimo e di minimo su C_0 di $f(x, y, z) := x^4 + y^4 + z^4$.
2. Dati m, n interi positivi, sia F il campo su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ definito da
$$F(x, y) := \frac{1}{(x^2 + y^2)^m} \big(-x^{n-1}y^n, x^ny^{n-1}\big)\,.$$
   a) Determinare il potenziale di F per $m = n = 2$;
   b) dire per quali m, n il campo F soddisfa la condizione delle derivate incrociate;
   c) per m, n come al punto b), calcolare il lavoro di F sulla curva γ data da
$$\gamma(t) := (\cos t, \sin t) \quad \text{con } 0 \le t \le 2\pi;$$
   d) dire per quali m, n il campo F ammette potenziale ed in caso calcolarlo.
3. Dato $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ campo di vettori continuo, si dice *potenziale vettore* di F un campo di vettori $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ di classe C^1 tale che
$$F = \operatorname{rot} V = \nabla \times V\,.$$

a) Trovare un potenziale vettore di $F(x,y,z) := (x^2 + 4y^2 - 3z^2, y^2 - 2x^2, 2 - 2xz - 2yz)$ [*suggerimento: cercare un campo V con una componente nulla, ad esempio la prima*];
b) calcolare il flusso del campo F al punto a) attraverso la superficie S data dall'intersezione della sfera di centro $(0,0,1)$ e raggio $\sqrt{2}$, orientata verso l'esterno, e del semispazio $z \geq 0$;
c) dimostrare che se un campo F di classe C^∞ ammette un potenziale vettore di classe C^∞ allora ha divergenza nulla;
d) dimostrare che se un campo F di classe C^∞ ha divergenza nulla allora ammette un potenziale vettore V di classe C^∞.

Scritto del I appello, 15 giugno 2006

Prima parte

1. Trovare un polinomio P di due variabili tale che $y := \sqrt{1-x^2}$ risolve l'equazione $\ddot{y} = P(y, \dot{y})$.
2. Calcolare l'area delimitata dalla curva chiusa $\gamma(t) := \sin t\,(\cos t, \sin t)$, con $0 \le t \le \pi$.
3. Dato $a \in \mathbb{R}$, si consideri la matrice $A := \begin{pmatrix} 1+a & 6+2a & 10+3a \\ 0 & 13+a & 18 \\ 0 & -8 & -11+a \end{pmatrix}$.
   a) Dire per quali valori di a la matrice A è nilpotente; b) per tali a, calcolare e^A.
4. Sia S l'insieme dei punti (x, y, z, t) che soddisfano le equazioni $e^{xy} - e^{zt} = 0$ e $x^2 - z^2 = y^2 - t^2$, sia p il punto $(1, -1, -1, 1)$, e sia $\mathrm{Tan}(S, p)$ lo spazio tangente ad S in p.
   a) Scrivere un vettore non nullo in $\mathrm{Tan}(S, p)$; b) trovare una base di $\mathrm{Tan}(S, p)$.
5. Sia S la superficie ottenuta intersecando la sfera di centro l'origine e raggio 2 con il semispazio $z \ge 1$. Disegnare sommariamente S e calcolarne l'area.
6. Calcolare il rotore del campo di vettori $F(x, y, z) := (x^2 + y^2 + z^2)^{-1}(x, y, z)$.
7. Dato a parametro reale, sia $F(x, y, z) := \big(y^4 + az^3, 4xy^3 + 3z^2y^2, 6xz^2 + ay^3z\big)$. Dire per quali valori di a il campo F ammette potenziale su tutto $\mathbb{R}^3$, ed in caso calcolarlo.
8. Calcolare i coefficienti di Fourier complessi della funzione $f(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } -\pi < x \le 0 \\ x & \text{se } 0 < x \le \pi \end{cases}$.

Seconda parte

1. Nel semipiano $x > 0$ si consideri l'equazione differenziale
$$\dot{y} = \frac{1+y^2}{x} - y \tag{1}$$
   e sia $y : (a, b) \to \mathbb{R}$ la soluzione (massimale) che soddisfa la condizione iniziale $y(1) = 1$.
   a) Disegnare approssimativamente il grafico di y;
   b) dimostrare che $z = 0$ è una sottosoluzione dell'equazione (1) per ogni $x > 0$;
   c) dimostrare che $z = x$ è una soprasoluzione dell'equazione (1) per ogni $x \ge 1$;
   d) dimostrare che l'estremo superiore b del dominio di y è $+\infty$;
   e) dire se esiste e calcolare il limite di y per $x \to +\infty$;
   f) dimostrare che l'estremo inferiore a del dominio di y è strettamente maggiore di 0.
2. Sia C la circonferenza di centro l'origine e raggio 2 che giace sul piano xy. Si consideri quindi un disco D di raggio 1 il cui centro si muove lungo C con velocità costante, mentre D rimane ortogonale alla curva C. Supponiamo inoltre che D ruoti attorno al suo centro con velocità costante, e che compia n rotazioni complete quando D ha compiuto una rotazione completa attorno a C.
   a) Trovare una parametrizzazione per la traiettoria di un punto fissato P sul bordo di D;
   b) trovare una formula per la lunghezza L di tale traiettoria;
   c) determinare la parte principale di L per $n \to +\infty$;
   d) determinare il termine successivo dello sviluppo di L per $n \to +\infty$.
3. Sia S la superficie dei punti (x, y, z) tali che $x^2 + y^2 = 2 + (z^2 - 1)^2$.
   a) Dimostrare che S è una superficie regolare;
   b) trovare i punti di S che rendono massima e minima la distanza dalla retta $x = 1$, $y = 0$.

Scritto del II appello, 21 luglio 2006

Prima parte

1. Calcolare la divergenza di $F(x,y,z) := \big(2xyz + y^3 + z^3, x(xz + 3y^2), x(xy + 3z^2)\big)$.
2. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ l'insieme D dei punti (x,y) tali che $x^2 + y^2 \leq 1 + ay^4$ è limitato.
3. Calcolare l'area della superficie S parametrizzata da $\Phi(u,v) := (u^2, v^2, \sqrt{2}uv)$ con u, v che soddisfano $0 \leq u, v \leq 1$.
4. Trovare una sottosoluzione dell'equazione differenziale $\dot{y} = y^2 + x^2$ definita su un intervallo I limitato a destra che ha limite $+\infty$ all'estremo destro di I.
5. Dato $a > 0$ sia S l'insieme dei punti (x,y,z) tali che $x^2 + 2y^2 = 1 + z^4$ e $x^2 + y^2 + z^2 = a$. Dire per quali valori di a le ipotesi del teorema della funzione implicita sono soddisfatte per ogni punto di S.
6. Scrivere (ma non risolvere!) il sistema dei moltiplicatori di Lagrange necessario a trovare i punti critici della funzione $f(x,y,z,t) = (x^2 + y^2)(z^2 + t^2)$ sulla superficie S determinata dalle equazioni $x^2 + y^2 = 1 + z^2$ e $e^t = xyz$.
7. Risolvere il seguente problema: $\begin{cases} u_t = u_{xx} + u & \text{su } [0,+\infty) \times (-\pi,\pi) \\ u(t,\pi) = u(t,-\pi) & \text{per } t \in [0,+\infty) \\ u_x(t,\pi) = u_x(t,-\pi) & \text{per } t \in [0,+\infty) \\ u(0,x) = \sin x + \cos x & \text{per } x \in [-\pi,\pi] \end{cases}$.
8. Enunciare il Teorema di invertibilità locale.

Seconda parte

1. Sia F il campo di vettori su $D := \mathbb{R}^2 \setminus \{(\pm 1, 1)\}$ dato da
$$F(x,y) := \frac{(2x(y-1), 1 - x^2)}{(x^2-1)^2 + (y-1)^2}$$
e sia γ la curva parametrizzata da $x = t(t^2 - 3)$, $y = \dfrac{4}{1+t^2}$ con $t \in \mathbb{R}$.
a) Dimostrare che F ammette un potenziale nel semipiano $y > 1$ e calcolarlo.
b) Dimostrare che F non ammette potenziale su tutto il dominio D.
c) Disegnare approssimativamente la curva γ e calcolare l'integrale di F lungo γ.
2. Dato a numero reale positivo, sia γ la curva in $\mathbb{R}^3$ parametrizzata da
$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = at \end{cases}$$
con $t \in [0, 4\pi]$, e sia Σ la superficie in $\mathbb{R}^3$ ottenuta congiungendo ogni punto di γ con la sua proiezione sull'asse delle z.
a) Fare un disegno approssimativo di γ e di Σ.
b) Trovare una parametrizzazione della superficie Σ e calcolarne l'area.
c) Calcolare l'integrale su γ del campo di vettori $F := \big(0, -2xz + 2ye^{(y^2+z)^2}, -xy + e^{(y^2+z)^2}\big)$. [*Suggerimento: applicare il teorema di Stokes alla superficie* Σ].
3. Data A matrice reale $n \times n$ con $\det A \neq 0$ e τ numero reale positivo, sia $V_\tau(A)$ il sottospazio dei vettori $v \in \mathbb{R}^n$ tali che la soluzione y del problema di Cauchy
$$\begin{cases} \dot{y} = Ay \\ y(0) = v \end{cases}$$

è τ-periodica, cioè $y(x) = y(x+\tau)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

a) Determinare (al variare di τ) la dimensione di $V_\tau(A)$ nel caso in cui $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Dimostrare che se A è simmetrica allora $V_\tau(A) = \{0\}$ per ogni τ.

c) Determinare la dimensione di $V_\tau(A)$ per A diagonalizzabile (in senso complesso).

d) Determinare la dimensione di $V_\tau(A)$ per A qualunque.

Scritto del III appello, 7 settembre 2006

Prima parte

1. Scrivere una parametrizzazione regolare dell'ellissoide di equazione $x^2 + y^2 + 4z^2 = 1$.
2. Sia y la soluzione massimale dell'equazione $\dot{y} = e^x y + (1+x^2)^{-1} y^2$ tale che $y(0) = 1$. Trovare una sottosoluzione della stessa equazione che permetta di dimostrare che y tende a $+\infty$ in un certo punto $x_0 > 0$.
3. Determinare i punti $x \in \mathbb{R}^3$ in cui la mappa $\Phi(x_1, x_2, x_3) = (3x_1^2 - 2x_2^3, 3x_2^2 - 2x_3^3, 3x_3^2 - 2x_1^3)$ soddisfa le ipotesi del teorema di invertibilità locale.
4. Calcolare la divergenza del campo di vettori $F(x) := x|x|^4$ con $x \in \mathbb{R}^n$.
5. Calcolare l'integrale del campo di vettori $F(x, y) := \sin(x^2 + y^2)\,(x, y)$ lungo il cammino $\gamma(t) := \big(\sqrt{t}\cos t, \sin t\big)$ con $t \in [0, \pi]$.
6. Trovare i punti di massimo e minimo di $4xy$ sulla curva di equazione $x^4 + y^4 = 2$.
7. Risolvere il problema $\begin{cases} u_t = u_{xx} + 2\cos x & \text{su } [0, +\infty) \times (-\pi, \pi) \\ u(t, \pi) = u(t, -\pi) & \text{per } t \in [0, +\infty) \\ u_x(t, \pi) = u_x(t, -\pi) & \text{per } t \in [0, +\infty) \\ u(0, x) = 0 & \text{per } x \in [-\pi, \pi] \end{cases}$.
8. a) Disegnare la superficie S di equazione $x = \frac{1}{2}\exp(y^2 + z^2)$ con $y^2 + z^2 \le 1$.
   b) Supponendo che il vettore normale ad S nel punto $(1/2, 0, 0)$ sia $(-1, 0, 0)$, indicare nel disegno la corretta orientazione del bordo di S.

Seconda parte

1. Sia S la superficie in $\mathbb{R}^3$ di equazione $z^2 = 1 + x^2 + y^2$. Trovare il triangolo (o i triangoli) di area minima tra quelli tali che uno dei vertici appartiene ad S e gli altri due sono uguali a $(1, 0, 0)$ e $(0, 2, 0)$.
2. Sia F il campo di vettori su $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ definito da $F(x) := x|x|^{-n}$, e sia D un chiuso limitato in $\mathbb{R}^n$ con frontiera regolare.
   a) Calcolare la divergenza di F.
   b) Dimostrare che se l'origine non appartiene a D allora il flusso di F uscente da ∂D è nullo.
   c) Dimostrare che se l'origine è un punto interno di D allora il flusso di F uscente da ∂D è uguale all'area $(n-1)$-dimensionale della sfera di raggio unitario in $\mathbb{R}^n$.
3. Dato C insieme chiuso in $\mathbb{R}^n$ ed $x \in \mathbb{R}^n$, poniamo $\operatorname{dist}(x, C) := \min\{|x - y| : y \in C\}$. Dati C, D insiemi chiusi in $\mathbb{R}^n$, e $\bar{x} \in C \cap D$, diciamo che D *approssima C all'ordine k in $\bar{x}$* se
   $$\operatorname{dist}(x, D) = o(|x - \bar{x}|^k) \quad \text{per ogni } x \in C,\ x \neq \bar{x}.$$
   a) Sia C una curva in $\mathbb{R}^n$ dotata di una parametrizzazione regolare. Dimostrare che per ogni $\bar{x} \in C$ esiste una retta che approssima C all'ordine 1 in $\bar{x}$.
   b) Sia C una curva in $\mathbb{R}^2$ dotata di una parametrizzazione regolare di classe C^2. Dimostrare che per ogni $\bar{x} \in C$ esiste una circonferenza o una retta che approssima C all'ordine 2 in $\bar{x}$.
   c) È possibile estendere quanto asserito al punto b) alle curve in $\mathbb{R}^n$?
   d) Sia C una superficie in $\mathbb{R}^3$ dotata di una parametrizzazione regolare di classe C^2. Dato $\bar{x} \in C$, è possibile trovare una sfera o un piano che approssima C all'ordine 2 in $\bar{x}$?

Scritto del IV appello, 11 gennaio 2007

Prima parte

1. Calcolare e^{At} per $A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
2. Si consideri la mappa $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ data da $\phi(x, y) := (x^3 - 3xy^2, y^3 - 3x^2y)$. Dire per quali punti (x, y) risulta localmente invertibile.
3. Calcolare il potenziale su $\mathbb{R}^3$ del campo di vettori $F(x, y, z) := \begin{pmatrix} z^2 - y(2x + z) \\ -x^2 + z(2y - x) \\ y^2 + x(2z - y) \end{pmatrix}$.
4. Calcolare divergenza e rotore del campo di vettori $F(x, y, z) := (y^2 - z^2, -x^2 + z^2, x^2 - y^2)$.
5. Trasformare il problema di Cauchy $\begin{cases} \ddot{y} = x^3y^2\dot{y} + 1 \\ y(0) = 0 \\ \dot{y}(0) = 0 \end{cases}$ in un sistema del primo ordine.
6. Sia C la curva in $\mathbb{R}^3$ definita dalle equazioni $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ e $x^3 - z^3 = 1$. Dire se le ipotesi del teorema della funzione implicita sono soddisfatte nel punto $(1, -1, 0)$ ed in caso trovare un vettore tangente a C in tale punto.
7. Fare un disegno approssimativo della curva descritta in coordinate polari da $\rho = 1 - \theta^2$ con $0 \leq \theta \leq 1$ e calcolarne la lunghezza.
8. Calcolare la serie di Fourier reale o complessa della funzione 2π-periodica f definita da $f(x) := \pi - |x|$ per $x \in [-\pi, \pi]$.

Seconda parte

1. a) Sia Σ la superficie in $\mathbb{R}^3$ ottenuta ruotando attorno all'asse x il grafico della funzione $y = \rho(x)$, definita per $a \leq x \leq b$, positiva e di classe C^1. Trovare una parametrizzazione regolare di Σ e dimostrare che l'area di Σ è data da
$$\text{Area}(\Sigma) = \int_a^b 2\pi\rho\,\sqrt{1 + \dot{\rho}^2}\,dx\ .$$
b) Sia Σ l'insieme dei punti (x, y, z) tali che $x \geq -1/2$ e $1 - y^2 - z^2 = e^x$. Calcolarne l'area.
2. Sia S l'insieme dei punti (x, y, z) che soddisfano l'equazione $5(x^2 + y^2) - 2xy = 4(e^z + e^{-z})$.
a) Dimostrare che S è una superficie regolare. È anche compatta?
b) Dimostrare che esistono punti in S che minimizzano la distanza dall'asse z.
c) Determinare tali punti.
d) Esistono punti in S che massimizzano la distanza dall'asse z?
3. Per ogni matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, con $m, n \geq 1$, si consideri l'usuale norma euclidea:
$$\|A\| := \Big(\sum_{ij} A_{ij}^2\Big)^{1/2}\ .$$
Dimostrare che $\|A\,B\| \leq \|A\|\,\|B\|$ per ogni $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ con $m, n, p \geq 1$.

Scritto del V appello, 31 gennaio 2007

Prima parte

1. Dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$, indicare quelli limitati e quelli chiusi:

$$\text{a) } \{x^6 + y^4 \leq 2,\ x + y = 1\}\ , \quad \text{b) } \{(x+y)^2 < 1\}\ , \quad \text{c) } \{x + y \leq 2,\ |x| + |y| \geq 1\}\ .$$

2. Calcolare divergenza e rotore del campo di vettori $F(x, y, z) := (x^2yz, xy^2z, xyz^2)$.
3. Calcolare il prodotto vettoriale di $(a, -1, 3)$ e $(-2, a + 1, -6)$, e dire per quali valori del parametro reale a questi due vettori sono paralleli.
4. Trovare il valore massimo e minimo di $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - z^2$ tra tutti i punti che soddisfano l'equazione $2x^2 + y^2 + z^2 = 2$.
5. Sia S l'insieme dei punti (x, y, z) tali che $x^2y^2 - z^4 = 0$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Determinare lo spazio tangente ad S nel punto $(1, 1, 1)$.
6. Si consideri l'equazione differenziale $\dot{y} = y^2+x$. Trovare una funzione y che sia sottosoluzione per $x \geq 0$, che valga 1 in 0 e che tenda a $+\infty$ in qualche punto $a > 0$.
7. Sia S la metà dell'ellissoide di equazione $x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$ contenuta nel semispazio $z \leq 0$, e si consideri come orientazione di S quella determinata dal vettore normale $(0, 0, -1)$ nel punto $(0, 0, -1)$. Come bisogna orientare il bordo γ di S per far sì che valga il teorema di Stokes? specificare il versore tangente a γ nel punto $(0, 2, 0)$.
8. Enunciare il teorema di invertibilità locale per mappe da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^n$.

Seconda parte

1. a) Dimostrare che tra tutti gli ellissoidi i cui semiassi a, b, c soddisfano $a^4 + b^4 + c^4 \leq 3$ ne esiste uno di volume massimo.
   b) Determinare esplicitamente tale ellissoide.
   c) Cosa succede se il vincolo $a^4 + b^4 + c^4 \leq 3$ viene sostituito da $a^4 - b^4 + c^4 \leq 1$?
2. Si consideri il campo di vettori

$$F(x, y, z) := \left(\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{-x}{x^2 + y^2}, e^z \right)\ .$$

   a) Dire se F ammette potenziale su tutto il suo dominio di definizione ed in caso calcolarlo.
   b) Dire se F ammette potenziale sul semispazio $x > 0$ ed in caso calcolarlo.
   c) Calcolare l'integrale di F lungo $\gamma_1(t) := (\cos t, \sin t, 0)$ con $0 \leq t \leq 2\pi$;
   d) Calcolare l'integrale di F lungo $\gamma_2(t) := e^{\sin t}(\cos(2t), \sin(2t), 1)$ con $0 \leq t \leq 2\pi$.
3. Sia $\gamma : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}^2$ una parametrizzazione regolare di classe C^1 che percorre in senso antiorario la frontiera di un insieme compatto D contenuto in $\mathbb{R}^2$, e sia F il campo di vettori su $\mathbb{R}^2$ dato da $F(x, y) = (-y, x)$. Identificando $\mathbb{R}^2$ con il piano complesso $\mathbb{C}$, possiamo vedere γ come funzione 2π-periodica a valori in $\mathbb{C}$ ed indichiamo quindi con c_n i coefficienti della corrispondente serie di Fourier complessa. Dimostrare le seguenti formule:
   a) $\text{Area}(D) = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_\gamma F \cdot \tau_\gamma$.
   b) $\text{Area}(D) = \pi i \langle \gamma; \dot{\gamma} \rangle$ dove $\langle\ ;\ \rangle$ è l'usuale prodotto scalare di funzioni.
   c) $\text{Area}(D) = \pi \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n|c_n|^2$.

Calcolo Differenziale, a.a. 2005/06 - Soluzioni

Primo Compitino, 15 novembre 2005

Prima parte, gruppo A

1. L'argomento della radice deve essere strettamente positivo, per cui il dominio consiste dei punti tali che $xy > 0$, ovvero l'unione del primo e terzo quadrante (esclusi gli assi). Inoltre

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\left[\log|x| + \log|y| - \log(1+x^2+y^2)\right]$$

da cui si ottiene facilmente

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{1+y^2-x^2}{2x(1+x^2+y^2)}, \frac{1+x^2-y^2}{2y(1+x^2+y^2)}\right) .$$

2. Il limite non esiste (basta considerare il limite sulle rette $y = 0$ e $y = x$).
3. Il punto appartiene alla frontiera di E (si veda la figura sotto a sinistra).
4. I punti in cui si annulla Df soddisfano il sistema

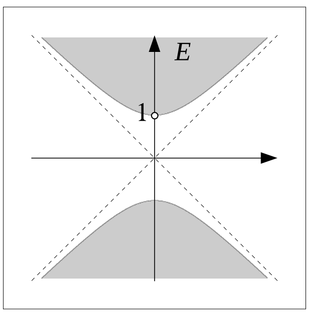
$$\begin{cases} 5x + y - 2z = 1 \\ x + 2y = 0 \\ z - 2x = 0 \end{cases} ,$$

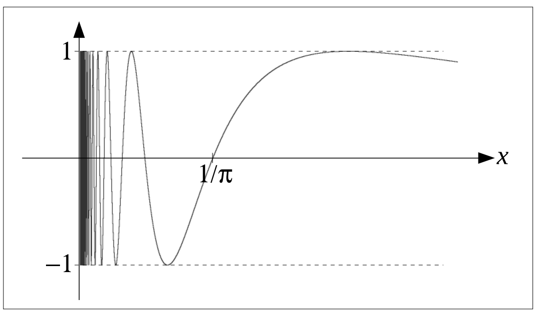
si tratta cioè del solo punto $P := (2, -1, 4)$. Siccome il polinomio caratteristico di

$$\frac{1}{2}D^2 f = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è $\lambda^3 - 8\lambda^2 + 12\lambda - 1$, allora $D^2 f$ è definita positiva, e P è un punto di minimo (assoluto!).

5. $\displaystyle\int_T 3x^2 y\, dx\, dy = \int_0^\pi \left(\int_0^1 3\rho^4 \cos^2\theta \sin\theta\, d\rho\right) d\theta = \frac{2}{5}.$
6. $f(x,y) := \sqrt[3]{1+x^2-y^2} = 1 + \frac{1}{3}(x^2-y^2) + o(x^2+y^2).$
7. $\displaystyle\int_T \frac{9y^2}{1+x^4}\, dx\, dy = \int_0^\infty \left(\int_{-x}^x \frac{9y^2}{1+x^4}\, dy\right) dx = \int_0^\infty \frac{6x^3}{1+x^4}\, dx = \Big|\frac{3}{2}\log(1+x^4)\Big|_0^\infty = +\infty.$
8. $\overline{E} \setminus E$ è il segmento verticale di estremi $(0,1)$ e $(0,-1)$ (si veda la figura sotto a destra).





Primo Compitino, 15 novembre 2005

Prima parte, gruppo B

1. Il dominio consiste dei punti tali che $xy > 0$, ovvero l'unione del primo e terzo quadrante (esclusi gli assi). Inoltre

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\left[\log(1+x^2+y^2) - \log|x| - \log|y|\right]$$

   da cui si ottiene facilmente

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{x^2-y^2-1}{2x(1+x^2+y^2)}, \frac{y^2-x^2-1}{2y(1+x^2+y^2)}\right) .$$

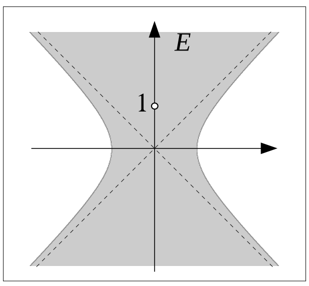
2. Il limite è 0.
3. Il punto è interno ad E (si veda la figura sotto a sinistra).
4. I punti in cui si annulla Df soddisfano il sistema

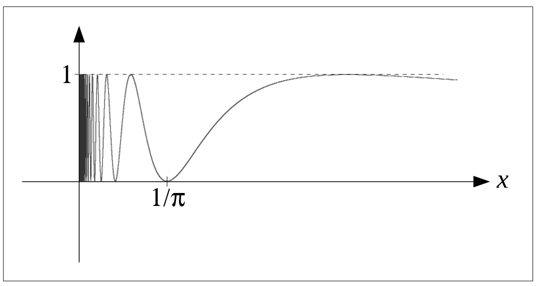
$$\begin{cases} 4x+y-2z=1 \\ x+2y=0 \\ z-2x=0 \end{cases},$$

   si tratta cioè del solo punto $P := (-2,1,-4)$. Siccome il polinomio caratteristico di

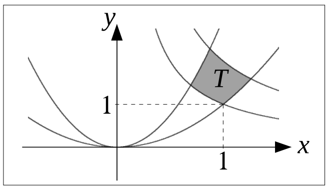
$$\frac{1}{2}D^2 f = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   è $\lambda^3 - 7\lambda^2 + 9\lambda + 1$, allora $D^2 f$ non è né semidefinita positiva, né semidefinita negativa, e quindi P è un punto di sella.
   Sia $f(x,y,z) := 4x^2 + 2xy - 4xz - x + 2y^2 + z^2$.
   a) Determinare i punti critici di f,
   b) dire se sono punti di massimo locale, minimo locale, o altro.
5. L'integrale è 0 perché l'integranda è una funzione dispari nella variabile y ed il dominio T è simmetrico rispetto all'asse delle x.
6. $f(x,y) := \sqrt[4]{1+x^2-y^2} = 1 + \frac{1}{4}(x^2-y^2) + o(x^2+y^2)$.
7. $\displaystyle\int_T \frac{9y^2}{1+x^8}\,dx\,dy = \int_0^\infty \left(\int_0^x \frac{9y^2}{1+x^8}\,dy\right)dx = \int_0^\infty \frac{3x^3}{1+x^8}\,dx = \left|\frac{3}{4}\arctan(x^4)\right|_0^\infty = \frac{3}{8}\pi.$
8. $\overline{E} \setminus E$ è il segmento verticale di estremi $(0,0)$ e $(0,1)$ (si veda la figura sotto a destra).





SECONDA PARTE, GRUPPO A



1. a) Si veda la figura accanto.
b) Consideriamo le nuove variabili $u = xy$ e $v = yx^{-2}$. Il dominio di integrazione diventa quindi l'insieme T' dei punti (u, v) tali che $1 \le u \le 2$ e $1 \le v \le 3$. Inoltre $x = u^{1/3}v^{-1/3}$ e $y = u^{2/3}v^{1/3}$ (dunque il cambio di variabili è effettivamente invertibile con inversa regolare), e quindi

$$\begin{aligned} dx\,dy &= \left|\det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}\right| du\,dv \\ &= \left|\det\begin{pmatrix} \frac{1}{3}u^{-2/3}v^{-1/3} & -\frac{1}{3}u^{1/3}v^{-4/3} \\ \frac{2}{3}u^{-1/3}v^{1/3} & \frac{1}{3}u^{2/3}v^{-2/3} \end{pmatrix}\right| du\,dv = \frac{1}{3v}du\,dv \ . \end{aligned}$$

Pertanto

$$\int_T y^3 e^{y/x^2}\,dx\,dy = \frac{1}{3}\int_{T'} u^2 e^v\,du\,dv = \frac{1}{3}\Big(\int_1^2 u^2\,du\Big)\Big(\int_1^3 e^v dv\Big) = \frac{7}{9}e(e^2-1) \ .$$

2. a) Derivando l'identità $f(tx, ty) = t^3 f(x, y)$ rispetto alla variabile t si ottiene

$$x\,f_x(tx, ty) + y\,f_y(tx, ty) = 3t^2 f(x, y) \ , \tag{1}$$

che per $t = 1$ diventa $xf_x + yf_y = 3f$. Derivando rispetto a t la (1) si ottiene

$$x^2\,f_{xx}(tx, ty) + 2xy\,f_{xy}(tx, ty) + y^2\,f_{yy}(tx, ty) = 6t\,f(x, y) \ ,$$

che per $t = 1$ diventa $x^2 f_{xx} + 2xyf_{xy} + y^2 f_{yy} = 6f$.

b) Allo stesso modo si ottiene $\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i f_i = \alpha f$ e $\displaystyle\sum_{i,j=1}^n x_i x_j f_{ij} = \alpha(\alpha-1)\,f$.

3. a) Si osservi innanzitutto che il dominio D di f è l'insieme dei punti in cui

$$yx - x^2 + 2y + a > 0 \ , \tag{2}$$

che per il teorema di permanenza del segno è aperto. La funzione f è di classe C^∞ su D, e $\nabla f = 0$ significa

$$\begin{cases} f_x(x,y) = \Big[3(yx - x^2 + 2y + 3)^2 + \dfrac{1}{yx - x^2 + 2y + a}\Big](y - 2x) = 0 \\ f_y(x,y) = \Big[3(yx - x^2 + 2y + 3)^2 + \dfrac{1}{yx - x^2 + 2y + a}\Big](x + 2) = 0 \end{cases} ,$$

e siccome l'argomento tra parentesi quadre è strettamente positivo dove vale la (2), questo sistema si riduce a

$$\begin{cases} y - 2x = 0 \\ x + 2 = 0 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} x = -2 \\ y = -4 \end{cases} .$$

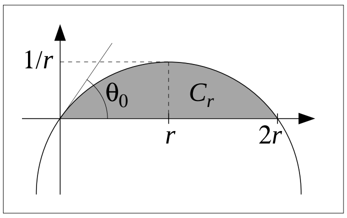
Il punto $(-2, -4)$ soddisfa la (2)—e quindi appartiene al dominio di f—se e solo se $a > 4$. Negli altri casi la funzione f non ha punti critici.

La derivata seconda di f è

$$\left[3(yx - x^2 + 2y + 3)^2 + \frac{1}{yx - x^2 + 2y + a}\right] \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ed è dunque un multiplo positivo di una matrice con autovalori discordi in tutti i punti di D ed in particolare in $(-2, -4)$. Pertanto tale punto critico è un punto di sella.
b) L'estremo superiore ed inferiore di f sono rispettivamente $+\infty$ e $-\infty$. Per verificarlo basta considerare il limite di $f(0, y)$ per $y \to +\infty$ e per $y \to (-a/2)^+$.

4. a) L'equazione della circonferenza che delimita C_r è della forma $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2$ dove (x_c, y_c) è il centro ed R il raggio. Imponendo che i punti $(0, 0)$, $(2r, 0)$ e $(r, 1/r)$ appartengano alla circonferenza si ottiene il sistema



$$\begin{cases} x_c^2 + y_c^2 = R^2 \\ (2r - x_c)^2 + y_c^2 = R^2 \\ (r - x_c)^2 + (1/r - y_c)^2 = R^2 \end{cases}$$

e risolvendolo si ricava (facilmente!)

$$x_c = r \ , \quad y_c = \frac{1 - r^4}{2r} \ , \quad R = \frac{1 + r^4}{2r} \ .$$

C_r è l'insieme dei punti (x, y) che soddisfano le disequazioni

$$y \geq 0 \quad \text{e} \quad (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 \leq R^2 \ .$$

Ponendo $x = \rho \cos\theta$ e $y = \rho \sin\theta$ e sostituendo i valori di x_c, y_c, R calcolati in precedenza, otteniamo che in coordinate polari l'insieme C_r è descritto dalle disequazioni

$$\sin\theta \geq 0 \quad \text{e} \quad \rho \leq \rho(\theta) \quad \text{dove } \rho(\theta) := 2r\cos\theta - \frac{r^4 - 1}{r} \sin\theta \ .$$

La prima disequazione equivale a $0 \leq \theta \leq \pi$. Siccome poi ρ deve essere positivo, la seconda disequazione è verificata da qualche ρ se e solo $\rho(\theta) \geq 0$. Gli angoli θ compresi tra 0 e π che soddisfano questa disequazione sono tutti e soli quelli tali che

$$0 \leq \theta \leq \theta_0 \quad \text{con } \theta_0 := \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{2r^2}{r^4 - 1}\right) & \text{per } r > 1 \\ \pi/2 & \text{per } r = 1 \\ \pi + \arctan\left(\dfrac{2r^2}{r^4 - 1}\right) & \text{per } 0 < r < 1 \end{cases}$$

(una formula più compatta è $\theta_0 := \arccos\left(\dfrac{r^4 - 1}{r^4 + 1}\right)$).
b) Usando la solita formula per il cambio di variabile negli integrali e quanto visto al punto precedente si ottiene

$$\begin{aligned} \int_{C_r} \frac{x}{x^2 + y^2}\, dx\, dy &= \int_0^{\theta_0} \int_0^{\rho(\theta)} \frac{\rho\cos\theta}{r^2}\, r\, d\rho\, d\theta \\ &= \int_0^{\theta_0} \rho(\theta)\, \cos\theta\, d\theta = \int_0^{\theta_0} 2r\cos^2\theta - \frac{r^4 - 1}{r} \sin\theta\, \cos\theta\, d\theta \\ &= \Big| r + r\sin\theta\, \cos\theta - \frac{r^4 - 1}{r} \sin^2\theta \Big|_0^{\theta_0} = r\theta_0 \ . \end{aligned}$$

c) In questo caso conviene trovare delle stime asintotiche sul comportamento dell'integrale, e non cercare di calcolarlo esattamente.
Osserviamo che per i punti in C_r si ha $x^2 + y^2 = \rho^2 = x^2/\cos^2\theta$ e poiché $0 \leq \theta \leq \theta_0$,

$$x^{a-2}\cos^2\theta_0 \leq \frac{x^a}{x^2+y^2} \leq x^{a-2}$$

Siccome θ_0 tende a 0 per $r \to +\infty$, si ha che $\cos\theta_0$ tende a 1, e dunque

$$\int_{C_r} \frac{x^a}{x^2+y^2} dx\,dy \sim \int_{C_r} x^{a-2} dx\,dy \quad \text{per } r \to +\infty. \tag{3}$$

Per calcolare il secondo integrale, descriviamo l'arco di circonferenza che delimita superiormente C_r esplicitando y in funzione di x a partire dall'equazione $(x-r)^2 + (y+h)^2 = R^2$:

$$\begin{aligned} y(x) = -h + \sqrt{h^2 + 2rx - x^2} &= h\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2rx - x^2}{h^2}}\right) \\ &= \frac{2rx - x^2}{2h} + o\left(\frac{2rx - x^2}{h}\right) \\ &= \frac{2rx - x^2}{r^3} + o(r^{-1}) \end{aligned}$$

(nel terzo passaggio si usa lo sviluppo di Taylor $\sqrt{1+t} = 1 + t/2 + o(t)$, nel quarto si usa che $h \sim r^3/2$ e $x = O(r)$ poiché $0 \leq x \leq 2r$).
Possiamo adesso stimare asintoticamente il secondo integrale in (3):

$$\int_{C_r} x^{a-2} dx\,dy = \int_0^{2r} x^{a-2} y(x)\,dx \sim \int_0^{2r} \frac{2rx^{a-1} - x^a}{r^3}\,dx = \frac{2^{a+1}}{a(a+1)} r^{a-2}\ .$$

Quindi

$$\int_{C_r} \frac{x^a}{x^2+y^2} dx\,dy \sim \frac{2^{a+1}}{a(a+1)} r^{a-2} \quad \text{per } r \to +\infty.$$

Seconda parte, gruppo B

1. Sostanzialmente uguale al gruppo A.
   b) Consideriamo le nuove variabili $u = xy$ e $v = yx^{-4}$. Il dominio di integrazione diventa quindi l'insieme T' dei punti (u,v) tali che $1 \leq u \leq 2$ e $1 \leq v \leq 3$. Inoltre $x = u^{1/5}v^{-1/5}$ e $y = u^{4/5}v^{1/5}$ e quindi $dx\,dy = \frac{1}{5v} du\,dv$. Pertanto

$$\int_T y^5 e^{y/x^4}\,dx\,dy = \frac{1}{5}\int_{T'} u^4 e^v\,du\,dv = \frac{1}{5}\Big(\int_1^2 u^4\,du\Big)\Big(\int_1^3 e^v dv\Big) = \frac{31}{25} e(e^2 - 1)\ .$$

2. Come il gruppo A.

3. Sostanzialmente uguale al gruppo A.
   a) La condizione $\nabla f = 0$ significa

$$\begin{cases} f_x(x,y) = \Big[3(yx - x^2 - 3x + 3)^2 + \dfrac{1}{yx - x^2 - 3x + a}\Big](y - 2x - 3) = 0 \\ f_y(x,y) = \Big[3(yx - x^2 - 3x + 3)^2 + \dfrac{1}{yx - x^2 - 3x + a}\Big]x = 0 \end{cases},$$

e siccome l'argomento tra parentesi quadre è strettamente positivo nel dominio di f, questo sistema si riduce a

$$\begin{cases} y - 2x - 3 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases} .$$

Il punto $(0,3)$ appartiene al dominio di f se e solo se $a > 0$. Negli altri casi la funzione f non ha punti critici.
La derivata seconda di f è

$$\left[3(yx - x^2 - 3x + 3)^2 + \frac{1}{yx - x^2 - 3x + a}\right] \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ed è dunque un multiplo positivo di una matrice con autovalori discordi in tutti i punti di D ed in particolare in $(0,3)$. Pertanto tale punto critico è un punto di sella.
b) L'estremo superiore ed inferiore di f sono rispettivamente $+\infty$ e $-\infty$. Per verificarlo basta considerare il limite di $f(1,y)$ per $y \to +\infty$ e per $y \to (4-a)^+$.

4. a) Uguale al gruppo A.
   b) Si svolge in modo analogo al gruppo A:

$$\begin{aligned} \int_{C_r} \frac{y}{x^2+y^2}\, dx\, dy &= \int_0^{\theta_0} \rho(\theta)\, \sin\theta\, d\theta \\ &= \int_0^{\theta_0} 2r \sin\theta\, \cos\theta - \frac{r^4-1}{r} \sin^2\theta\, d\theta \\ &= r - \frac{r^4-1}{2r}\theta_0 \ . \end{aligned}$$

   c) Uguale al gruppo A.

COMMENTI

- Seconda parte, esercizio 1. È possibile calcolare l'integrale usando altri cambi di variabile. Ad esempio (per il gruppo A) $u = x$, $v = y/x^2$. In tal caso T corrisponde all'inseme dei punti (u,v) tali che $1 \le v \le 3$ e $1 \le u^3 v \le 2$, ovvero $(1/v)^{1/3} \le u \le (2/v)^{1/3}$.
- Seconda parte, esercizio 2. Molti hanno deciso che una funzione omogenea di grado α è necessariamente un polinomio, mentre invece così non è. Quasi nessuno ha trovato la dimostrazione relativamente semplice data sopra.
- Seconda parte, esercizio 3. Per errore, la versione di questo esercizio effettivamente data nello scritto era leggermente diversa, e decisamente più difficile (in particolare per il gruppo A).

SECONDO COMPITINO, 20 DICEMBRE 2005

PRIMA PARTE

1. a) $f_n(x) \to x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ perché $n^{x-n} = e^{(x-n)\log n}$ e $(x-n)\log n \sim -n \log n \to -\infty$.
   b) No, sì, no, sì, Per la precisione si ha convergenza uniforme sulla semiretta $[a, +\infty)$ per ogni a reale (segue dal fatto che le funzioni n^{x-n} sono positive e decrescenti su $[a, +\infty)$ per n sufficientemente grande, e quindi $\|n^{x-n}\| = n^{a-n}$, che tende a 0) ma non su $\mathbb{R}$.
2. $\nabla f(x,y) = x^9 y^4 e^{x^2 y} \cdot (2y, x)$.
3. Siccome f è sempre crescente, affinché $f(X)$ sia contenuto in X si deve avere $-1 \leq f(-1)$ e $f(1) \leq 1$. Affinché f sia una contrazione si deve poi avere che $\sup f'(x) < 1$. Queste condizioni sono soddisfatte se e solo se $a < 1/3$ e $|b| \leq 1 - a$.
4. $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{2^n}{n} x^{2n} = -\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n}(-2x^2)^n = -\log(1-2x^2)$. Il raggio di convergenza è $R = 1/\sqrt{2}$.
5. Ad esempio $f_n(x) := \dfrac{\sin(nx)}{n}$, oppure $f_n(x) := \dfrac{x^n}{n}$.
6. Aggiungendo la variabile $z = \dot{y}$ il problema si traduce in $\begin{cases} \dot{y} = z \\ \dot{z} = yx^3 + \log z \\ y(0) = 0 \\ z(0) = 1 \end{cases}$.
7. Il polinomio caratteristico P dell'equazione cercata deve avere come radici $\pm 2i$ con molteplicità almeno 2. L'esempio più semplice è $P(\lambda) = (\lambda^2 + 4)^2$, che corrisponde all'equazione $D^4 y + 8D^2 y + 16y = 0$.
8. Si tratta di un'equazione di Bernoulli: la sostituzione $y = z^{-1/2}$ la trasforma nell'equazione lineare $\dot{z} + 2xz = -8x$ con dato iniziale $z(0) = 1$. Utilizzando la formula risolutiva per le equazioni lineari del primo ordine si ottiene $z = 5e^{-x^2} - 4$ e quindi
$$y = \frac{1}{\sqrt{5e^{-x^2} - 4}} .$$

SECONDA PARTE

1. a) Se $x = 0$ la serie converge. Se $x \neq 0$ e $x \leq 1$ allora xn^{1-x} non tende a 0, e quindi la serie non converge. Infine se $x > 1$ allora n^{1-x} decresce a 0, e quindi la serie converge per il criterio di Leibniz. Riassumendo, la serie converge se e solo se $x > 1$ oppure $x = 0$.
   b) Siccome la serie non converge in 1, ha senso studiarne la convergenza totale ed uniforme sulle semirette $[a, +\infty)$ solo per $a > 1$.
   Posto $g_n(x) := xn^{1-x}$, si ha $g_n'(x) = n^{1-x}(1 - x\log n)$ e dunque $g_n(x)$ risulta decrescente per $x \geq 1/\log n$. In particolare, fissato $a > 1$, $g_n(x)$ è crescente su $[a, +\infty)$ per ogni $n \geq 3$, e la norma del sup di $(-1)^n g_n$ su questa semiretta è
$$\|(-1)^n g_n\| = \|g_n\| = g_n(a) = an^{1-a} . \tag{1}$$
   Quindi la serie converge totalmente se e solo se $\sum n^{1-a} < +\infty$, ovvero per $a > 2$.
   b) Indichiamo con $S(x)$ la somma della serie e con $S_n(x)$ la somma parziale n-esima. Trattandosi di una serie a termini di segno alterno decrescenti in modulo, per ogni $x > 1$ vale
$$S_{n-1}(x) \leq S(x) \leq S_n(x) \quad \text{per ogni } n \text{ pari.}$$

Fissato quindi $a > 1$, ed un intero pari $n \geq 3$, le norme del sup di $S - S_n$ e di $S - S_{n-1}$ su $[a, +\infty)$ soddisfano

$$\|S - S_n\|\,,\ \|S - S_{n-1}\| \leq \|S_n - S_{n-1}\| = \|g_n\| = an^{1-a}$$

(vedi (1)) e siccome an^{1-a} tende a 0, la successione delle somme parziali S_n converge uniformemente ad S su $[a, +\infty)$.

2. Gli enunciati a) e b) sono casi particolari di c) e d).

c) Il polinomio caratteristico dell'equazione omogenea associata è $P(\lambda) = \lambda^{2n} - 1$. Gli zeri di tale polinomio sono le radici $2n$-esime dell'unità, ovvero

$$\pm 1,\ s_k \pm i\omega_k \quad \text{con } s_k := \cos(\pi k/n) \text{ e } \omega_k := \sin(\pi k/n),\ k = 1, \dots, n-1.$$

Dunque le soluzioni dell'equazione omogenea sono

$$y := a_0 e^x + b_0 e^{-x} + \sum_{k=1}^{n-1} e^{s_k x}(a_k \cos(\omega_k x) + b_k \sin(\omega_k x)) \qquad \text{con } a_k, b_k \in \mathbb{R} \text{ per } k = 0, \dots, n-1. \tag{2}$$

Non resta ora che trovare una soluzione particolare dell'equazione non omogenea.
La funzione $\sin x$ risolve l'equazione omogenea a coefficienti costanti il cui polinomio caratteristico ha radici ± 1. Per n dispari, $\pm i$ non sono radici di $P(\lambda)$, e dunque $\sin x$ non risolve l'equazione omogenea; cerchiamo allora una soluzione particolare della forma

$$\bar{y} := \alpha \sin x + \beta \cos x\ .$$

Sostituendo, l'equazione diventa $-2\alpha \sin x - 2\beta \cos x = \sin x$, che è soddisfatta per $\alpha = -1/2$ e $\beta = 0$. La soluzione generale è quindi

$$y = -\frac{1}{2} \sin x + \text{soluzione dell'omogenea in (2).}$$

Per n pari, $\pm i$ sono radici di $P(\lambda)$ ed applicando il metodo degli annichilatori cerchiamo una soluzione particolare della forma

$$\bar{y} := \alpha x \sin x + \beta x \cos x\ .$$

Si dimostra per induzione che per ogni intero m

$$D^{4m}(x \sin x) = -4m \cos x + x \sin x \quad \text{e} \quad D^{4m}(x \cos x) = 4m \sin x + x \cos x$$

e quindi l'equazione si riduce a $-n\alpha \cos x + n\beta \sin x = \sin x$, che è soddisfatta per $\alpha = 0$ e $\beta = 1/n$. La soluzione generale è quindi

$$y = \frac{1}{n} x \cos x + \text{soluzione dell'omogenea in (2).}$$

d) Siccome la soluzione particolare $\bar{y}$ trovata nel punto c) soddisfa $\bar{y}(x) = o(x^2)$ per $x \to +\infty$ sia per n pari che per n dispari, si ha che $V = \bar{y} + V'$ dove V' e lo spazio vettoriale delle soluzioni y dell'equazione *omogenea* tali che $y(x) = o(x^2)$. Non ci resta che determinare la dimensione di V'.

Osserviamo che $e^{sx} = o(x^2)$ se e solo se $s \leq 0$; ne consegue che condizione *sufficiente* affinché la funzione y in (2) appartenga a V' è che $a_0 = 0$ e $a_k = b_k = 0$ per ogni $k = 1, \dots, n-1$ tale che $s_k > 0$.
Si dimostra poi che tale condizione è anche *necessaria*. Infatti, se per assurdo $a_0 \neq 0$ allora la parte principale di y è $a_0 e^x$, e dunque $y \neq o(x^2)$. Se $a_0 = 0$, tra tutti i k tali che a_k e b_k non sono entrambi nulli, prendiamo quello per cui s_k è massimo: se per assurdo $s_k > 0$, allora avremmo che $y = e^{s_k x}(a_k \cos(\omega_k x) + a_k \sin(\omega_k x)) + o(e^{s_k x})$, e questa funzione non può essere $o(x^2)$ perché $a_k \cos(\omega_k x) + a_k \sin(\omega_k x)$ non tende a 0 all'infinito.
Non resta che determinare il numero dei k compresi tra 1 ed $n-1$ tali che $s_k > 0$. Ricordando che $s_k = \cos(\pi k/n)$, si vede che tale numero è $(n-1)/2$ quando n è dispari e $(n-2)/2$ quando n è pari, e quindi

$$\dim V = \dim V' = 2n - 1 - 2 \cdot \#\big\{k = 1, \dots, n-1 : \ s_k > 0\big\} = \begin{cases} n & \text{per } n \text{ dispari,} \\ n+1 & \text{per } n \text{ pari.} \end{cases}$$

3. a) Il sistema si scrive come $(\dot{y}, \dot{z}) = f(x, y, z)$ con $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ data da

$$f(x, y, z) := (y^2 \sin z, y \cos z) \ .$$

Siccome f è di classe C^1, anzi C^∞, valgono le ipotesi del teorema di esistenza ed unicità (ma non quelle del teorema di esistenza ed unicità globale, perché f non è a crescita lineare nelle variabili y e z).
b) Ponendo $z(x) := \pi/2$ per ogni x, la seconda equazione del sistema è automaticamente soddisfatta, come pure la condizione iniziale $z(0) = \pi/2$, mentre le prima equazione si riduce all'equazione a variabili separabili $\dot{y} = y^2$. La soluzione di quest'ultima con dato iniziale $y(0) = 0$ è $y(x) := 1/(1-x)$. Pertanto la soluzione del problema di Cauchy è

$$\begin{cases} y(x) = 1/(1-x) \\ z(x) = \pi/2 \end{cases} \quad \text{definita per } x < 1.$$

a) Moltiplicando l'equazione $\dot{y} = y^2 \sin z$ per $y \cos z = \dot{z}$ si ottiene $y\dot{y} \cos z = y^2 \dot{z} \sin z$ e quindi

$$\frac{\dot{y}}{y} = \frac{\dot{z} \sin z}{\cos z} \quad \text{ovvero} \quad (\log y)' = -(\log \cos z)' \ ,$$

e siccome le condizioni iniziali implicano $\log(y(0)) = -\log\cos(z(0)) = 0$, abbiamo anche $\log y = -\log \cos z$, ovvero $y = 1/\cos z$. A questo punto la seconda equazione del sistema diventa $\dot{z} = y \cos z = 1$, che con il dato iniziale $z(0) = 0$ implica $z = x$. Pertanto la soluzione del problema di Cauchy è

$$\begin{cases} y(x) = 1/\cos x \\ z(x) = x \end{cases} \quad \text{definita per } -\pi/2 < x < \pi/2. \tag{3}$$

La procedura ottenuta per ricavare la (3) presenta diversi passaggi problematici: ad un certo punto si divide per y e per $\cos z$ (operazione non legittima se queste quantità si annullano) e poi si considera come primitiva di $\dot{y}/y$ la funzione $\log y$ invece di $\log|y|$. Tuttavia è possibile giustificare la formula (3) a posteriori, verificando che si tratta effettivamente di una soluzione massimale del problema di Cauchy di partenza, ed utilizzando il teorema di unicità per assicurarsi che non vi sono altre soluzioni.

COMMENTI

- Prima parte, esercizio 3. Molti si sono dimenticati di imporre che $f(X) \subset X$.

Prima parte, gruppo A

1. Integriamo prima rispetto a x, y usando le coordinate polari. Integriamo poi sull'insieme dei valori di z tali che $z^2 \leq z^3$, cioè $z \geq 1$:

$$\int_A \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2)^2} = \int_1^\infty \left(\int_z^{z^{3/2}} \frac{2\pi\rho\,d\rho}{\rho^4} \right) dz = \int_1^\infty \pi \left[\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} \right] dz = \frac{\pi}{2} \ .$$

2. a) 0, perché $\log(x^2+y^2) = o((x^2+y^2)^{-1/2}) = o(x^{-1})$.
   b) Non esiste; come si vede calcolando il limite per $y = 0, x \to 0$ e poi per $y = x, x \to 0$.
   c) 0, perché $\sin(xy) \sim xy$.

3. $f(x,y) = \pi/2$ per ogni x, y (perché $\arctan t + \arctan(1/t) = \pi/2$ per ogni $t > 0$) e quindi $\nabla f(x,y) = 0$ per ogni x, y.

4. Il gradiente di f è $Df(x,y) = \exp(\dots)\,(2x+2-y, -2-x)$, e l'unico punto critico è $(-2,-2)$. Siccome $D^2 f(-2,-2) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ha determinante negativo, è un punto di sella.

5. a) Il limite è $f(x) := \begin{cases} \pi/6 & \text{per } x > 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \\ -\pi/6 & \text{per } x < 0 \end{cases}$. b) La convergenza è uniforme solo su $[1,3]$.

6. $\displaystyle\sum_{n=0}^\infty (3^n + (-1)^n 4^n) x^{2n} = \sum_{n=0}^\infty (3x^2)^n + \sum_{n=0}^\infty (-4x^2)^n = \frac{1}{1-3x^2} + \frac{1}{1+4x^2} = \frac{2+x^2}{1+x^2-12x^4}.$
   Il raggio di convergenza è il minore tra quello delle due serie, vale a dire $R = 1/2$.

7. Ponendo $u_1 = x$ e $u_2 = y$ ed introducendo le variabili ausiliarie $u_3 = \dot{x}$ e $u_4 = \dot{y}$ il sistema diventa

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = u_3 \\ \dot{u}_2 = u_4 \\ \dot{u}_3 = u_1 - u_2 \\ \dot{u}_4 = u_1 + u_2 \end{cases} .$$

8. La funzione a destra dell'uguale è omogenea di grado 0 in x e y, e quindi conviene usare la sostituzione $y = xz$. Si ottiene così l'equazione a variabili separabili $x\dot{z} = z/(z-1) - z$. Risolvendola si ricava $\log z + \log(z-2) = -2\log x + c$, e la condizione iniziale $y(1) = 3$ implica $z(1) = 3$, ovvero $c = \log 3$. Pertanto $z(z-2) = 3/x^2$, da cui si ricava $z = 1\sqrt{1+3/x^2}$, ed infine

$$y = x + \sqrt{3+x^2} \ .$$

Prima parte, gruppo B

1. Integriamo prima rispetto a x, y usando le coordinate polari. Integriamo poi sull'insieme dei valori di z tali che $z^4 \leq z^5$, cioè $z \geq 1$:

$$\int_A \frac{dx\,dy\,dz}{x^2+y^2} = \int_1^\infty \left(\int_{z^2}^{z^{5/2}} \frac{2\pi\rho\,d\rho}{\rho^2} \right) dz = \int_1^\infty \pi \log z\,dz = +\infty \ .$$

2. a) 0, perché $\log(x^2+y^2) = o((x^2+y^2)^{-1}) = o(x^{-2})$.
   b) 0, perché $y^2 \sin x \sim xy^2 \leq (x^2+2y^2)^{3/2}$.

c) 1, perché $\sin(xy) \sim xy$.

3. $f(x,y) = \pi/2$ per ogni x, y e quindi il gradiente è nullo.
4. Il gradiente di f è $Df(x,y) = \exp(\dots)\,(2x-2-y, 2-x)$, e l'unico punto critico è $(2,2)$. Siccome $D^2 f(2,2) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ha determinante negativo, è un punto di sella.
5. a) Il limite è $f(x) := \begin{cases} \pi/4 & \text{per } x > 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \\ -\pi/4 & \text{per } x < 0 \end{cases}$. b) La convergenza è uniforme solo su $[2,4]$.
6. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (7^n + (-1)^n 8^n) x^{3n} = \sum_{n=0}^{\infty} (7x^3)^n + \sum_{n=0}^{\infty} (-8x^3)^n = \frac{1}{1-7x^3} + \frac{1}{1+8x^3} = \frac{2+x^3}{1+x^3-56x^6}$.
   Il raggio di convergenza è il minore tra quello delle due serie, vale a dire $R = 1/2$.
7. Ponendo $u_1 = x$ e $u_2 = y$ ed introducendo le variabili ausiliarie $u_3 = \dot{x}$ e $u_4 = \dot{y}$ il sistema diventa
$$\begin{cases} \dot{u}_1 = u_3 \\ \dot{u}_2 = u_4 \\ \dot{u}_3 = u_1 + u_2 \\ \dot{u}_4 = u_1 - u_2 \end{cases} .$$
8. La funzione a destra dell'uguale è omogenea di grado 0 in x e y, e quindi conviene usare la sostituzione $y = xz$. Si ottiene così l'equazione a variabili separabili $x\dot{z} = z/(z-1) - z$. Risolvendola si ricava $\log z + \log(z-2) = -2\log x + c$, e la condizione iniziale $y(1) = 4$ implica $z(1) = 4$, ovvero $c = \log 8$. Pertanto $z(z-2) = 8/x^2$, da cui si ricava $z = 1\sqrt{1 + 8/x^2}$, ed infine
$$y = x + \sqrt{8 + x^2}\ .$$

Seconda parte, gruppo A

1. a) I punti di Γ sono della forma $(x, y, a\cos(xy))$ con $x, y \in \mathbb{R}$. Il quadrato della distanza di un tale punto dall'origine è
$$f(x,y) := x^2 + y^2 + a^2\cos^2(xy) = x^2 + y^2 + \frac{a^2}{2}(\cos(2xy) + 1)$$
e quindi $d(a) := \sqrt{\inf f}$. Non ci resta che dimostrare che la funzione f ammette un punto di minimo assoluto.
Siccome f è continua, ammette un punto di minimo assoluto sulla palla chiusa B con centro l'origine e raggio a. Questo valore minimo è inferiore a $f(0,0) = a^2$, e siccome il valore di f fuori da B è sempre maggiore di a^2, il punto trovato corrisponde anche al minimo assoluto per f su tutto $\mathbb{R}^2$.
b) Siccome f è di classe C^1, il punto di minimo di f deve essere un punto critico, ovvero risolve il sistema
$$\begin{cases} 0 = D_x f(x,y) = 2x - a^2\sin(2xy)\,y \\ 0 = D_y f(x,y) = 2y - a^2\sin(2xy)\,x \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} 2x = a^2\sin(2xy)\,y \\ 2y = a^2\sin(2xy)\,x \end{cases} .$$
Moltiplicando la prima equazione per x e la seconda per y otteniamo $2x^2 = a^2\sin(2xy)\,xy$ e $2y^2 = a^2\sin(2xy)\,xy$, da cui segue che $y^2 = x^2$, ovvero $y = \pm x$. Sostituendo $y = \pm x$ nella prima equazione otteniamo infine
$$x(2 - a^2\sin(2x^2)) = 0 \tag{1}$$

Osserviamo ora che per $a = 1$ il fattore $2 - a^2 \sin(2x^2) = 2 - \sin(2x^2)$ è sempre strettamente positivo, e quindi l'unica soluzione di (1) è $x = 0$, e l'unico punto critico di f è $(0, 0)$. Questo deve pertanto essere il punto di minimo di f, e quindi

$$d(1) = \sqrt{\min f} = \sqrt{f(0,0)} = 1 \ .$$

c) Per $a = 2$, l'espressione $2 - a^2 \sin(2x^2) = 2 - 4 \sin(2x^2)$ si annulla quando $\sin(2x^2) = 1/2$, ovvero quando

$$2x^2 = \pi/6 + 2k\pi \text{ con } k = 0, 1, 2, \dots \tag{2a}$$

oppure

$$2x^2 = 5\pi/6 + 2k\pi \text{ con } k = 0, 1, 2, \dots \tag{2b}$$

(si considerano solo i valori positivi di k perché $2x^2$ non può essere negativo).
Dunque, oltre a $(0, 0)$, i punti critici di f sono tutti quelli della forma $(x, \pm x)$ dove x soddisfa $(2a)$ oppure $(2b)$. Per trovare il valore minimo di f dobbiamo dunque confrontare i valori di f in questi punti. Osserviamo innanzitutto che $f(0, 0) = 4$. Se x soddisfa $(2a)$ allora

$$f(x, \pm x) = 2x^2 + 2\cos(2x^2) + 2 = \pi/6 + 2k\pi + \sqrt{3} + 2$$

ed il minimo di questi valori è $\pi/6 + \sqrt{3} + 2$ (ottenuto per $k = 0$). Usando le disuguaglianze $\pi > 3$ e $\sqrt{3} > 3/2$ si vede che $\pi/6 + \sqrt{3} + 2 > 4$. Se invece x soddisfa $(2b)$ allora

$$f(x, \pm x) = 2x^2 + 2\cos(2x^2) + 2 = 5\pi/6 + 2k\pi - \sqrt{3} + 2$$

ed il minimo di questi valori è $5\pi/6 - \sqrt{3} + 2$ (ottenuto per $k = 0$). Usando le disuguaglianze $\pi < 4$ e $\sqrt{3} > 3/2$ si ottiene $5\pi/6 - \sqrt{3} + 2 < 4$.
Possiamo quindi concludere che il valore minimo di f è $5\pi/6 - \sqrt{3} + 2$, e dunque

$$d(2) = \sqrt{\min f} = \sqrt{5\pi/6 - \sqrt{3} + 2} \ .$$

d) Procedendo come nel punto c) si vede che i punti critici di f sono $(0, 0)$ e poi tutti quelli della forma $(x, \pm x)$ con x che soddisfa

$$2x^2 = \alpha + 2k\pi \text{ con } k = 0, 1, 2, \dots \tag{3a}$$

oppure

$$2x^2 = \pi - \alpha + 2k\pi \text{ con } k = 0, 1, 2, \dots \tag{3b}$$

dove $\alpha := \arcsin(2/a^2)$. Confrontiamo ora i valori di f in questi punti. Per prima cosa, osserviamo che $f(0, 0) = a^2$, e converge a $+\infty$ quando $a \to +\infty$. Se x soddisfa $(3a)$ allora

$$f(x, \pm x) = \alpha + 2k\pi + \frac{a^2}{2}(\cos\alpha + 1)$$

ed il minimo di questi valori è

$$\alpha + \frac{a^2}{2}(\cos\alpha + 1) \to +\infty \qquad \text{per } a \to +\infty$$

(si usi il fatto che α tende a 0 per $a \to +\infty$). Se invece x soddisfa $(3b)$ allora

$$f(x, \pm x) = \pi - \alpha + 2k\pi + \frac{a^2}{2}(-\cos\alpha + 1)$$

ed il minimo di questi valori è

$$\pi - \alpha + \frac{a^2}{2}(-\cos\alpha + 1) \to \pi \qquad \text{per } a \to +\infty$$

(si usi il fatto che $(1-\cos\alpha) \sim \alpha^2/2 \sim 2/a^4$ per $a \to +\infty$). Possiamo quindi concludere che per $a \to +\infty$ il valore minimo di f tende a π, e dunque

$$\lim_{a\to+\infty} d(a) = \sqrt{\pi}\ .$$

2. a) Consideriamo la mappa $\Psi(x) := x - f(x)$. La definizione di λ implica che $|D\Psi(x)| \le \lambda$ per ogni x, e dunque Ψ è una contrazione (si tratta di un lemma dimostrato a lezione). Pertanto Ψ ammette uno ed un solo punto fisso, ovvero l'equazione $\Psi(x) = x$ ammette una ed una sola soluzione, il che equivale a dire che l'equazione $f(x) = 0$ ammette una ed una sola soluzione.
b) dato $y \in \mathbb{R}^n$, consideriamo la mappa $\Psi(x) := x - R(f(x) - y)$. Siccome Ψ è una contrazione, l'equazione $\Psi(x) = x$ ammette una ed una sola soluzione, ovvero l'equazione $R(f(x) - y) = 0$ ammette una ed una sola soluzione. La tesi segue dall'invertibilità di R.
c) Posto $f(x, y) := \big(x - \cos(ax+by), y + \sin(ax+by)\big)$, il sistema equivale a $f(x, y) = (-3, 1)$. Osserviamo ora che

$$Df(x,y) = I + \begin{pmatrix} a\sin(\dots) & b\sin(\dots) \\ a\cos(\dots) & b\cos(\dots) \end{pmatrix}$$

e dunque

$$|Df - I| = \left|\begin{pmatrix} a\sin(\dots) & b\sin(\dots) \\ a\cos(\dots) & b\cos(\dots) \end{pmatrix}\right| = \sqrt{a^2+b^2}$$

Se $a^2 + b^2 < 1$ allora sono soddisfatte le ipotesi dell'enunciato b) per $R = I$, da cui segue che il sistema $f(x, y) = (-3, 1)$ ammette una ed una sola soluzione.

3. Il polinomio caratteristico dell'equazione omogenea associata è $\lambda^4 + 2a\lambda^2 + 1$; gli zeri sono

$$\lambda = \pm\sqrt{-a \pm \sqrt{a^2-1}}\ . \tag{4}$$

a) Per $a = 1$, gli zeri del polinomio sono $\pm i$ con molteplicità 2 entrambi: la soluzione generale dell'equazione omogenea è

$$y = (a_1 + a_2x)\sin x + (a_3 + a_4x)\cos x \quad \text{con } a_1, \dots, a_4 \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Usando il metodo degli annichilatori, si cerca una soluzione particolare della forma $\bar{y} = \alpha e^{-x}$. L'equazione è soddisfata per $\alpha = 1/4$, e quindi la soluzione generale è

$$y = \frac{e^{-x}}{4} + \text{soluzione dell'equazione omogenea in (5).}$$

b) Per $a = -1$, gli zeri del polinomio sono ± 1 con molteplicità 2 entrambi: la soluzione generale dell'equazione omogenea è

$$y = (a_1 + a_2x)e^x + (a_3 + a_4x)e^{-x} \quad \text{con } a_1, \dots, a_4 \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Usando il metodo degli annichilatori, si cerca una soluzione particolare della forma $\bar{y} = \alpha x^2 e^{-x}$. Si trova allora che l'equazione è soddisfata per $\alpha = 1/8$, e quindi la soluzione generale è

$$y = \frac{x^2 e^{-x}}{8} + \text{soluzione dell'equazione omogenea in (6).}$$

c) Il metodo degli annichilatori garantisce che esiste una soluzione particolare dell'equazione della forma $\bar{y} = \alpha e^{-x}$ o, nel caso in cui e^{-x} sia soluzione dell'equazione omogenea, con $Q(x)e^{-x}$ con Q polinomio. In entrambi i casi $\bar{y}$ è infinitesima per $x \to +\infty$. Pertanto le soluzioni dell'equazione infinitesime a $+\infty$ sono tutte e sole quelle della forma $\bar{y} + y$ con y soluzione dell'equazione omogenea infinitesima a $+\infty$.
L'insieme di quest'ultime è uno spazio vettoriale che indichiamo con V'. Questo spazio coincide con lo spazio V'' generato dalle soluzioni canoniche corrispondenti a zeri λ del polinomio caratteristico P con parte reale strettamente negativa, e quindi $\dim V = \dim V' = \dim V'' = d$ dove d è il numero di zeri di P con parte reale strettamente negativa. verifichiamo che $V'' \subset V'$: se λ è uno zero di P allora la soluzione associata $e^{\lambda x}$ appartiene a V' se (e solo se) $\lambda < 0$, se $\lambda = \alpha \pm i\beta$ sono zeri complessi coniugati di P, allora le soluzioni associate $e^{\alpha x}\sin(\beta x)$ e $e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ appartengono a V' se (e solo se) $\alpha < 0$, e lo stesso discorso vale per le soluzioni associate a zeri con molteplicità maggiore di 1. Bisognerebbe poi dimostrare che $V'' \subset V'$, cosa che non segue da quanto detto finora (la dimostrazione è la stessa che per l'esercizio 2 della seconda parte dello scritto del 20.12.2005).
Determiniamo infine il valore di d. Siccome gli zeri di P sono accoppiati a due a due con segno opposto (vedi (4)), ad uno con parte reale strettamente negativa ne corrisponde uno con parte reale strettamente positiva e viceversa. Pertanto $d = (4-n)/2$ dove n è il numero di zeri puramente immaginari di P. Si presentano quindi diversi casi:
(i) Se $a \geq 1$ allora i numeri $-a \pm \sqrt{a^2-1}$ sono entrambi negativi, gli zeri di P sono tutti immaginari puri (vedi (4)), e quindi $d = 0$.
(ii) Se $1 > a > -1$ allora i numeri $-a \pm \sqrt{a^2-1}$ non sono reali, gli zeri di P non sono mai immaginari puri, e quindi $d = 2$.
(iii) Se $-1 > a$ allora i numeri $-a \pm \sqrt{a^2-1}$ sono entrambi strettamente positivi, gli zeri di P sono tutti reali e non nulli, e quindi $d = 2$.
Riassumendo $d = 0$ per $a \geq 1$, e $d = 2$ altrimenti.

SECONDA PARTE, GRUPPO B

1. Analogo al gruppo A. a) La funzione di cui si cerca il punto di minimo è
$$f(x,y) := x^2 + y^2 + a^2\cos^2(4xy) = x^2 + y^2 + \frac{a^2}{2}(\cos(8xy)+1)\ .$$
b) $d(1/2) = \sqrt{f(0,0)} = 1/2$.
c) $d(1) = \sqrt{\min f} = \sqrt{\frac{5\pi}{24} - \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2}}$.
d) $\lim\limits_{a\to+\infty} d(a) = \sqrt{\pi}/2$.
2. Uguale al gruppo A.
3. Analogo al gruppo A. a) Per $a = 1$ la soluzione generale dell'equazione è
$$y = \frac{x^2e^{-x}}{8} + (a_1 + a_2x)e^x + (a_3 + a_4x)e^{-x} \quad \text{con } a_1, \ldots, a_4 \in \mathbb{R}.$$
b) Per $a = -1$ la soluzione generale dell'equazione è
$$y = \frac{e^{-x}}{4} + (a_1 + a_2x)\sin x + (a_3 + a_4x)\cos x \quad \text{con } a_1, \ldots, a_4 \in \mathbb{R}.$$
c) La dimensione di V è $d = (4-n)/2$ dove n è il numero di zeri puramente immaginari del polinomio caratteristico P. Si ha dunque che $d = 0$ per $a \leq -1$, e $d = 2$ altrimenti.

Commenti

- Prima parte, esercizio 3. Pur avendolo calcolato correttamente, quasi nessuno si è accorto che il gradiente di f è nullo, eppure bastava fare un po' di semplificazioni!
- Seconda parte, esercizio 1a). Per dimostrare l'esistenza del minimo di f si poteva usare un'osservazione di valore più generale (che dovrebbe essere più o meno nota): una funzione $f(x)$ continua su $\mathbb{R}^n$ il cui valore tende a $+\infty$ quando $|x|$ tende a $+\infty$ ammette sempre un punto di minimo (assoluto).
- Seconda parte, esercizio 1. Molti hanno deciso che nei punti b) e c) il gradiente di f si annulla solo in $(0,0)$, senza motivare questa affermazione (che infatti risulta essere falsa nel caso c)). Secondo molti altri, l'equazione $\sin t = 1/2$ ha come uniche soluzioni $t = \pi/6 + 2k\pi$, dimenticando $t = 5\pi/6 + 2k\pi$.
- Seconda parte, esercizio 1. Una via alternativa per trovare il minimo di $f(x,y)$ è questa: tramite il cambio di variabili $xy = t$ e $x/y = s$ si ottiene $f(x,y) = t(s + 1/s) + a^2 \cos^2 t$ (per il gruppo A); inoltre, fissato $t > 0$, il minimo di questa espressione si ottiene per $s = 1$, e quindi ci si riduce a cercare il minimo di $2t + a^2 \cos^2 t$ per $t \geq 0$.
- Seconda parte, esercizio 3. La determinazione di d nell'ultima domanda ha dato problemi a molte (anzi, troppe!) persone.

Scritto del II appello, 24 febbraio 2006

Prima parte, gruppo A

1. $\displaystyle\int_{Q_t} x^2(t + ye^x)\, dx\, dy = \int_0^1 x^2 + \frac{x^2 e^x}{2t^2}\, dx = \frac{1}{3} + O(1/t^2) \to \frac{1}{3}$.
2. La chiusura di A è il quadrato $[-1, 1]^2$; quella di B è il segmento di vertici $(-1, -1)$ e $(1, 1)$.
3. a) $\cos\theta = \dfrac{v \cdot w}{|v| \cdot |w|} = \dfrac{-6}{3 \cdot 2\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ e quindi $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$.
   b) $v \times w = \det\begin{pmatrix} i & j & k \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} = (-4, 2, -4)$.
4. Il quadrato Q corrisponde all'insieme dei punti le cui coordinate polari appartengono a
$$\Big\{(\rho, \theta) :\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}\ ,\ 0 \le \rho \le \frac{1}{\cos\theta}\Big\} \bigcup \Big\{(\rho, \theta) :\ \frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{2}\ ,\ 0 \le \rho \le \frac{1}{\sin\theta}\Big\}\ .$$
5. Si vede subito che $f(0, 0) = (0, 1)$ e quindi $f^{-1}(0, 1) = (0, 0)$ (si assume che f sia invertibile). Inoltre
$$(Df^{-1})(0, 1) = \big(Df(0, 0)\big)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/3 & 0 \end{pmatrix}\ .$$
6. Ad esempio $f(x) = |x|^2 \sin(|x|^2)$: l'estremo superiore è $+\infty$ e quello inferiore $-\infty$.
7. Si tratta di un'equazione lineare omogenea di Eulero, e la si risolve tramite il cambio di variabile $x = e^t$. In alternativa si cercano soluzioni particolari del tipo x^α: sostituendo nell'equazione si ottiene che α deve soddisfare l'equazione $(\alpha - 1)(\alpha + 1)(\alpha - 3) = 0$, ovvero $\alpha = 1, -1, 3$. Quindi x, x^{-1}, x^3 sono soluzioni dell'equazione, ed essendo linearmente indipendenti generano tutte le altre soluzioni:
$$y = a_1 x + a_2 x^{-1} + a_3 x^3 \quad \text{con } a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}.$$
8. a) $P(D)y = 0$ con $P(D) = (D - 1)^2(D - 2) = D^3 - 4D^2 + 5D - 2$.
   b) $P(D)y = 0$ con $P(D) = (D^2 + 2D + 2)^2 = D^4 + 4D^3 + 8D^2 + 8D + 4$.
   c) $P(D)y = 0$ con $P(D) = D^{n+1}$.

Prima parte, gruppo B

1. $\displaystyle\int_{Q_t} x^2(3t + y^2 e^x)\, dx\, dy = \int_0^1 3x^2 + \frac{x^2 e^x}{3t^3}\, dx = 1 + O(1/t^3) \to 1$.
2. La chiusura di A è il quadrato $[-1, 1]^2$; quella di B è la circonferenza di centro l'origine e raggio 1.
3. a) $\cos\theta = \dfrac{v \cdot w}{|v| \cdot |w|} = \dfrac{-6}{2\sqrt{2} \cdot 3} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ e quindi $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$.
   b) $v \times w = \det\begin{pmatrix} i & j & k \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} = (4, -2, 4)$.
4. Il quadrato Q corrisponde all'insieme dei punti le cui coordinate polari appartengono a
$$\Big\{(\rho, \theta) :\ -\frac{\pi}{2} \le \theta \le -\frac{\pi}{4}\ ,\ 0 \le \rho \le -\frac{1}{\sin\theta}\Big\} \bigcup \Big\{(\rho, \theta) :\ -\frac{\pi}{4} \le \theta \le 0\ ,\ 0 \le \rho \le \frac{1}{\cos\theta}\Big\}\ .$$

5. Si vede subito che $f(0,0) = (1,0)$ e quindi $f^{-1}(1,0) = (0,0)$ (si assume che f sia invertibile). Inoltre
$$(Df^{-1})(1,0) = \big(Df(0,0)\big)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} .$$

6. Uguale al gruppo A.

7. Cercando soluzioni particolari del tipo x^α si ottiene che α deve essere $2, -2$ oppure 3. Quindi x^2, x^{-2}, x^3 sono soluzioni dell'equazione, ed essendo linearmente indipendenti generano tutte le altre soluzioni:
$$y = a_1x^2 + a_2x^{-2} + a_3x^3 \quad \text{con } a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}.$$

8. a) $P(D)y = 0$ con $P(D) = (D+1)^2D = D^3 + 2D^2 + D$.
b) $P(D)y = 0$ con $P(D) = (D^2 - 2D + 2)^2 = D^4 - 4D^3 + 8D^2 - 8D + 4$.
c) $P(D)y = 0$ con $P(D) = D^{n+1}$.

SECONDA PARTE

1. a) Siccome sia la funzione $f(x^2-y^2)$ che il dominio D sono invarianti per riflessione rispetto ad entrambi gli assi, l'integrale di $f(x^2-y^2)$ sull'intersezione di D con ciascuno dei quattro quadranti è lo stesso. Detta dunque D' l'intersezione di D con il primo quadrante abbiamo
$$\int_D f(x^2-y^2)\,dx\,dy = 4\int_{D'} f(x^2-y^2)\,dx\,dy .$$
Consideriamo ora il cambio di variabile
$$\begin{cases} s = x^2 + y^2 \\ t = x^2 - y^2 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} x = \sqrt{\dfrac{s+t}{2}} \\ y = \sqrt{\dfrac{s-t}{2}} \end{cases}$$
(le formule che esplicitano x e y in funzione di s e t valgono solo se x e y sono entrambi positivi, cosa che è in effetti verificata per i punti di D'). Abbiamo allora che
$$dx\,dy = \frac{1}{4\sqrt{s^2-t^2}}\,ds\,dt .$$
Inoltre D' corrisponde all'insieme D'' dei punti (s,t) tali che $s = x^2 + y^2 \leq 1$ e le formule che esplicitano x e y in funzione di s e t hanno senso; in altre parole D'' è l'insieme dei punti (s,t) tali che
$$\begin{cases} s \leq 1 \\ s+t \geq 0 \\ s-t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s \leq 1 \\ s \geq -t \\ s \geq t \end{cases} \Leftrightarrow |t| \leq s \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq t \leq 1 \\ |t| \leq s \leq 1 \end{cases} .$$
Utilizzando le formula precedenti e quest'ultima descrizione di D'' otteniamo infine
$$\begin{aligned} \int_D f(x^2-y^2)\,dx\,dy &= 4\int_{D'} f(x^2-y^2)\,dx\,dy \\ &= \int_{D''} \frac{f(t)}{\sqrt{s^2-t^2}}\,ds\,dt \\ &= \int_{-1}^{1} \left(\int_{|t|}^{1} \frac{ds}{\sqrt{s^2-t^2}} \right) f(t)\,dt \end{aligned}$$
usando quindi il cambio di variabile $s = \sigma|t|$

$$= \int_{-1}^{1} \left(\int_{1}^{1/|t|} \frac{d\sigma}{\sqrt{\sigma^2 - 1}} \right) f(t)\, dt$$
$$= \int_{-1}^{1} \left[\log\left(1 + \sqrt{1-t^2}\right) - \log|t| \right] f(t)\, dt \; .$$

b) Utilizzando il cambio di variabile $y = \rho\cos\theta$, $z = \rho\sin\theta$ ed integrando in θ otteniamo

$$\int_B f(x^2 - y^2 - z^2)\, dx\, dy\, dz = \int_D f(x^2 - \rho^2)\, 2\pi\rho\, dx\, d\rho$$

dove D è l'insieme dei punti (x, ρ) tali che $x^2 + \rho^2 \leq 1$ e $\rho \geq 0$. A questo punto procediamo come nel punto a) con la variabile ρ al posto di y, ovvero utilizziamo il cambio di variabile $s = x^2 + \rho^2$ e $t = x^2 - \rho^2$:

$$\begin{aligned}
\int_B f(x^2 - y^2 - z^2)\, dx\, dy\, dz &= 2\pi \int_D f(x^2 - \rho^2)\, \rho\, dx\, d\rho \\
&= 4\pi \int_{D'} f(x^2 - \rho^2)\, \rho\, dx\, d\rho \\
&= \pi \int_{D''} \frac{f(t)\sqrt{\frac{s-t}{2}}}{\sqrt{s^2 - t^2}}\, ds\, dt \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} \left(\int_{|t|}^{1} \frac{ds}{\sqrt{s+t}} \right) f(t)\, dt = \pi\sqrt{2} \int_{-1}^{1} \phi(t)\, f(t)\, dt \; ,
\end{aligned}$$

dove

$$\phi(t) := \begin{cases} \sqrt{1+t} - \sqrt{2t} & \text{per } t \geq 0 \\ \sqrt{1+t} & \text{per } 0 > t \geq -1 \end{cases} \; .$$

2. a) Distinguiamo tre casi: (i) $a > 0$, (ii) $a = 0$, (iii) $a < 0$.
Caso (i): la soluzione generale dell'equazione è

$$y = \alpha_1 \cos(\sqrt{a}x) + \alpha_2 \sin(\sqrt{a}x) \quad \text{con } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

Imponendo la condizione $y(0) = y(1) = 0$ otteniamo il sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \cos(\sqrt{a})\alpha_1 + \sin(\sqrt{a})\alpha_2 = 0 \end{cases}$$

la cui matrice associata è

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cos(\sqrt{a}) & \sin(\sqrt{a}) \end{pmatrix} \; .$$

La dimensione d di V è uguale a quella dell'insieme delle soluzioni di questo sistema, cioè alla dimensione del kernel di A, e quindi $d = 2 - r$ dove r è il rango di A. Quando il determinante di A è diverso da 0 allora $r = 2$ e $d = 0$, mentre $r = 1$ e $d = 1$ quando il determinante di A è 0, vale a dire per $\sin(\sqrt{a}) = 0$, cioè $a = k^2\pi^2$ con $k = 1, 2, \ldots$
Caso (ii): la soluzione generale dell'equazione è $y = \alpha_1 + \alpha_2 x$ e la condizione $y(0) = y(1) = 0$ equivale al sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

la cui matrice associata è
$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} .$$
Siccome il determinante di A non è nullo, il rango di A è $r = 2$ e quindi $d = 0$.
Caso (iii): la soluzione generale dell'equazione è $y = \alpha_1 \exp(\sqrt{|a|}x) + \alpha_2 \exp(-\sqrt{|a|}x)$ e la condizione $y(0) = y(1) = 0$ equivale al sistema
$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \exp(\sqrt{|a|})\alpha_1 + \exp(-\sqrt{|a|})\alpha_2 = 0 \end{cases}$$
la cui matrice associata è
$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \exp(\sqrt{|a|}) & \exp(-\sqrt{|a|}) \end{pmatrix} .$$
Siccome il determinante di A non è mai nullo, il rango di A è $r = 2$ e quindi $d = 0$.
In sintesi, la dimensione di V è $d = 1$ per $a = k^2\pi^2$ con $k = 1, 2, \ldots$, e $d = 0$ altrimenti.
b) Siano λ_1, λ_2 gli zeri di P. Distinguiamo tre casi: (i) $\lambda_{1,2}$ complessi coniugati, cioè $\lambda_{1,2} = \rho \pm \omega i$ con $\omega > 0$, (ii) $\lambda_{1,2}$ reali e coincidenti, (iii) $\lambda_{1,2}$ reali distinti.
Caso (i): la soluzione generale dell'equazione è $y = e^{\rho x}\big(\alpha_1 \cos(\omega x) + \alpha_2 \sin(\omega x)\big)$ e la condizione $y(0) = y(1) = 0$ equivale al sistema
$$\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ (\cos\omega)\,\alpha_1 + (\sin\omega)\,\alpha_2 = 0 \end{cases}$$
la cui matrice associata è
$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cos\omega & \sin\omega \end{pmatrix} .$$
Il determinante di A è nullo se e solo se $\omega = k\pi$ con $k = 1, 2, \ldots$; in tal caso il rango di A è $r = 1$ e quindi $d = 1$; negli altri casi il rango di A è $r = 2$ e quindi $d = 0$.
I casi (ii) e (iii) sono analoghi ai casi (ii) ed (iii) del punto a), e d è sempre uguale a 0.
In sintesi, la dimensione di V è $d = 1$ quando $\lambda_{1,2} = \rho \pm k\pi i$ con $k = 1, 2, \ldots$, ovvero quando il polinomio $P(\lambda) = \lambda^2 + b\lambda + c$ (ci limitiamo al caso P monico) soddisfa la condizione $c = (b/2)^2 + \pi^2 k^2$ con $k = 1, 2, \ldots$; in tutti gli altri casi $d = 0$.

3. a) La condizione che g sia uniformemente continua significa che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che
$$|x - x'| \le \delta \;\Rightarrow\; |g(x) - g(x')| \le \varepsilon . \tag{1}$$
Da questo fatto segue che se (x_n) è una successione di Cauchy contenuta nel dominio di g allora $(g(x_n))$ è pure una successione di Cauchy (la verifica è immediata).
Per ogni $x \in F$ prendiamo una successione successione di punti $x_n \in E$ che converge ad x. Siccome (x_n) è una successione di Cauchy, lo stesso vale per $(g(x_n))$; chiamiamo $\hat g(x)$ il limite di quest'ultima successione. Si noti che se x appartiene ad E, allora $\hat g(x) = g(x)$ per la continuità di g in x.
Dimostriamo infine che $\hat g$ è uniformemente continua su tutto F; per la precisione, dato $\varepsilon > 0$ prendiamo $\delta > 0$ tale che vale la (1) e dimostriamo che $|x - x'| \le \delta/2$ implica $|\hat g(x) - \hat g(x')| \le \varepsilon$. Dati dunque $x, x' \in F$, siano (x_n) e (x'_n) le successioni utilizzate per definire $\hat g(x)$ e $\hat g(x')$; siccome $|x - x'| \le \delta/2$, allora $|x_n - x'_n| \le \delta$ definitivamente in n, e quindi $|g(x_n) - g(x'_n)| \le \varepsilon$. Passando al limite si ottiene infine $|\hat g(x) - \hat g(x')| \le \varepsilon$.

b) Per $n = 1$ basta prendere $E := (0, +\infty)$ e $g(x) := 1/x$: g, pur essendo continua su E, non può essere estesa per continuità in 0 (il valore dovrebbe essere $+\infty$). Analoghi esempi si costruiscono per ogni insieme E che non sia chiuso.
c) Sia X la semiretta $(0, +\infty)$ dotata della distanza usuale. Se $E := (0, 1]$ e $g(x) := x$ allora g non può essere estesa per continuità in 0 ($\hat{g}(0)$ dovrebbe essere uguale a 0, che però non appartiene a X).
d) Basta richiedere che X sia uno spazio metrico completo. La dimostrazione è identica a quella del punto a).

COMMENTI

- Prima parte, esercizio 6. Molti hanno dato come risposta $f(x) := |x| \sin(|x|)$; questa funzione è in effetti di classe C^∞, ma non si tratta di un fatto poi così evidente, visto che la funzione $|x|$ è continua su tutto $\mathbb{R}^n$ ma non è di classe C^1. Un'altra risposta frequente è stata $f(x) := \arctan(|x|)$; però questa funzione ha un punto di minimo assoluto in 0.
- Seconda parte, esercizio 3a). Molti hanno definito $\hat{g}(x)$ per $x \in F \setminus E$ come il limite di $g(y)$ per $y \to x$, ed hanno dato per scontato che la funzione $\hat{g}$ così costruita sia continua nei punti x in cui tale limite esiste. Questo è corretto, ma richiede una dimostrazione: infatti tale costruzione implica solo che $\hat{g}(x_n)$ converge a $\hat{g}(x)$ per ogni successione di punti x_n *appartenenti ad* E che convergono ad x, ma resta da dimostrare che lo stesso vale quando i punti x_n appartengono ad F ma non ad E.
- Seconda parte, esercizio 3. Nel risolvere i punti b) e c) molti non hanno esibito alcun esempio, ma si sono limitati e sottolineare che le ipotesi che l'uniforme continuità di g e la completezza di X sono necessarie nella dimostrazione del punto a). Il ragionamento è sbagliato: il fatto che certe ipotesi siano necessarie in una dimostrazione non vuol dire che non può esistere un'altre dimostrazione in cui non servono.

Prima parte

1. $D_i f(x) = \dfrac{x_i}{1+|x|^2}$ per ogni i, ovvero $Df(x) = \dfrac{x}{1+|x|^2}$.

2. Si ha $\dfrac{\partial}{\partial y}\big(f(xy^2, yx^2)\big) = D_1 f(xy^2, yx^2)\cdot 2xy + D_2 f(xy^2, yx^2)\cdot x^2$.

   Quindi $\dfrac{\partial}{\partial y}\big(f(xy^2, yx^2)\big)\Big|_{x=1,y=1} = 2\,D_1 f(1,1) + D_2 f(1,1)$.

3. Siccome $t \mapsto \arctan t$ è una funzione di classe C^1 con derivata sempre strettamente positiva, i punti critici di f sono gli stessi di $\tilde f(x,y,z) := z^2 + x - y^2 - xy^2$ e sono dello stesso tipo. I punti in cui si annulla $D\tilde f = (1-y^2, -2(1+x)y, 2z)$ sono $(-1,\pm 1, 0)$; la derivata seconda di $\tilde f$ mostra che entrambi sono punti di sella.

4. Passando in coordinate polari e poi facendo il cambio di variabile $\cos(2t) = u$ si ottiene:

$$\begin{aligned}
\int_B 4xy\cos(x^2-y^2)\,dx\,dy &= \int_0^1\int_0^{\pi/2} 4\rho^2\cos t\sin t\,\cos(\rho^2(\cos^2 t - \sin^2 t))\,\rho\,dt\,d\rho \\
&= \int_0^1\int_0^{\pi/2} 2\rho^3\sin(2t)\,\cos(\rho^2\cos(2t))\,dt\,d\rho \\
&= \int_0^1\int_{-1}^1 \rho^3\cos(\rho^2 u)\,du\,d\rho \\
&= \int_0^1 \Big|\rho\sin(\rho^2 u)\Big|_{-1}^{+1} d\rho \\
&= \int_0^1 2\rho\,\sin(\rho^2)d\rho = \Big| -\cos(\rho^2)\Big|_0^1 = 1-\cos 1
\end{aligned}$$

5. Il limite puntuale è 0; la convergenza è uniforme su $[-10,10]$ ma non su $[1,+\infty]$.

6. b) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty (1-2^n)x^{3n} = \sum_{n=0}^\infty (x^3)^n - \sum_{n=0}^\infty (2x^3)^n = \frac{1}{1-x^3} - \frac{1}{1-2x^3} = -\frac{x^3}{(1-x^3)(1-2x^3)}$.

   a) Il raggio di convergenza coincide con il più piccolo delle due serie ed è $R = 1/\sqrt[3]{2}$.

7. a) $f(x,y,z) := \exp(y^2 + \sin(xz)) = \exp(y^2 + xz + o(xz)) = 1 + y^2 + xz + o(x^2+y^2+z^2)$.

   b) Dalla formula precedente segue che $Df(0,0,0) = (0,0,0)$ e $D^2 f(0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

8. Si tratta di un'equazione di Bernoulli: la sostituzione $y = u^{-1/2}$ la riduce all'equazione lineare $\dot u + 2u = -2x$. Le soluzioni sono

$$y = \pm(u)^{-1/2} = \pm\Big(ae^{-2x} - x + \frac{1}{2}\Big)^{-1/2} \qquad \text{con } a \in \mathbb{R}.$$

Seconda parte

1. a) Imponendo che il gradiente di $f = x^4 + 4x^2y^2 - 4x^2$ si annulli otteniamo il sistema

$$\begin{cases} x(x^2+2y^2-2) = 0 \\ xy = 0 \end{cases}.$$

Le soluzioni sono $(0, y)$ con y qualunque, e $(\pm\sqrt{2}, 0)$.
b) Nei punti $(\pm\sqrt{2}, 0)$ la derivata seconda di f è

$$D^2 f(\pm\sqrt{2}, 0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$$

cioè si tratta di una matrice definita positiva. Dunque $(\pm\sqrt{2}, 0)$ sono punti di minimo locale. Per i punti del tipo $(0, y)$ la derivata seconda è sempre semidefinita, e quindi non permette di determinare la natura di questi punti critici. Osserviamo tuttavia che $f(0, y) = 0$ per ogni y e $f(x, y) = x^2 g(x, y)$ dove $g(x, y) := x^2 + 4y^2 - 4$; pertanto, preso $\bar{y}$ tale che $|\bar{y}| > 1$ si ha che $g(0, \bar{y}) = 4(\bar{y}^2 - 1) > 0$ e quindi $g(x, y) > 0$ in un intorno di $(0, \bar{y})$. Ne segue che $f(x, y) \geq 0$ in un intorno di $(0, \bar{y})$ e quindi $(0, \bar{y})$ è un punto di minimo locale. Analogamente $(0, \bar{y})$ è un punto di massimo locale se $|\bar{y}| < 1$. Allo stesso modo si vede che f assume valori sia negativi che positivi in ogni intorno di $(0, \pm 1)$, e quindi questi non sono punti né di minimo né di massimo locale.
c) Non è difficile vedere che l'estremo superiore dei valori assunti da f su $\mathbb{R}^2$ è $+\infty$, e quindi non esistono punti di massimo. Per quanto riguarda il minimo, si osservi che la funzione g assume valori positivi al di fuori dell'ellisse piena E definita dalla disequazione $x^2 + ry^2 \leq 4$, e lo stesso vale per f. Essendo E compatto ed f una funzione continua, quest'ultima ammette un punto di minimo p in E, e siccome $f(p)$ è negativo ed f è positiva fuori da E, tale p sarà anche un punto di minimo di f su tutto $\mathbb{R}^2$. A questo punto sappiamo che p deve essere un punto critico di f, e per quanto detto nei punti a) e b) non può che trattarsi di $(\pm\sqrt{2}, 0)$.

2. V è l'insieme dei punti che risolvono contemporaneamente le disequazioni che definiscono i tre cilindri:
$$x^2 + y^2 \leq 1 \ , \quad x^2 + z^2 \leq 1 \ , \quad y^2 + z^2 \leq 1 \ . \tag{2}$$
Per i punti di A si ha $x^2 + y^2 \leq x^2 + z^2 \leq y^2 + z^2$ e quindi l'ultima disequazione in (2) implica le altre due, ovvero
$$\begin{aligned} A \cap V &= \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq y \leq z, \ y^2 + z^2 \leq 1\} \\ &= \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq y, \ (y, z) \in B\} \end{aligned}$$
dove B è l'insieme dei punti (y, z) tali che $0 \leq y \leq z$ e $y^2 + z^2 \leq 1$.
L'insieme B è l'ottavo del cerchio di centro l'origine e raggio 1 delimitato dall'asse delle z e dalla bisettrice del primo quadrante. Nelle coordinate polari $y = \rho \cos t, z = \rho \sin t$, tale insieme è descritto dalle disequazioni $\pi/4 \leq \theta \leq \pi/2$ e $0 \leq \rho \leq 1$. Pertanto
$$\mathrm{vol}(V \cap A) = \int_{V \cap A} 1 \, dx \, dy \, dz = \int_B y \, dy \, dz = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^1 (\rho \cos t) \, \rho \, d\rho \, dt = \frac{2 - \sqrt{2}}{6} \ .$$
Osserviamo adesso che indicato con A' il primo ottante, cioè l'insieme dei punti tali che $x, y, z \geq 0$, si ha
$$\mathrm{vol}(V \cap A') = 6 \cdot \mathrm{vol}(V \cap A) \ ,$$
infatti $V \cap A'$ può essere scritto come unione di sei copie opportunamente ruotate di $V \cap A$ che hanno in comune al più una parte della frontiera (quindi di volume nullo). Per la precisione si tratta degli insiemi che si ottengono intersecando V con i sei insiemi definiti come A ma permutando le variabili nella catena di disequazioni $0 \leq x \leq y \leq z$.
Infine il volume dell'intersezione di V con ciascun ottante è lo stesso, e quindi
$$\mathrm{vol}(V) = 8 \cdot \mathrm{vol}(V \cap A') = 8 \cdot 6 \cdot \mathrm{vol}(V \cap A) = 8(2 - \sqrt{2}) \ .$$

3. b) Si vede subito che, indipendentemente da n, una soluzione particolare dell'equazione non omogenea in (1) è

$$y_0 = e^x \ . \tag{3}$$

Il polinomio caratteristico dell'equazione omogenea associata è

$$P(\lambda) = 1 + \lambda + \cdots + \lambda^n = \frac{\lambda^{n+1} - 1}{\lambda - 1} \ ,$$

quindi le radici sono tutte le radici complesse $(n+1)$-esime dell'unità ad esclusione di 1. Posto $n + 1 = 2m$ (si ricordi che per ipotesi n è dispari e quindi $n + 1$ è pari) le radici di P sono dunque

$$-1 \text{ e } \alpha_k \pm i\beta_k \text{ con } \alpha_k := \cos(\pi k/m),\ \beta_k := \sin(\pi k/m),\ k = 1, \dots, m - 1.$$

Pertanto, ricordando la (3), la soluzione generale dell'equazione differenziale in (1) è

$$y = e^x + a_0 e^{-x} + \sum_{k=1}^{m-1} e^{\alpha_k x}\big(a_k \cos(\beta_k x) + b_k \sin(\beta_k x)\big) \tag{4}$$

con $a_0, \dots, a_{m-1}, b_1, \dots, b_{m-1} \in \mathbb{R}$.
Tra queste soluzioni, quella che verifica le condizioni iniziali imposte in (1) è

$$y = e^x + e^{-x} \ .$$

(Il difficile qui non è tanto verificare che la funzione $y = e^x + e^{-x}$ risolve il problema di Cauchy (1), quanto arrivare a congetturare che la questa sia la soluzione cercata; per far ciò può essere utile fare prima tutti i conti necessari nel caso $n = 3$ e magari anche $n = 5$.)

COMMENTI

- Prima parte, esercizio 7. Il modo più semplice di risolvere questo esercizio consiste nel trovare lo sviluppo di Taylor di f a partire dagli sviluppi noti per le funzioni e^x e $\sin x$, e quindi determinare la derivata prima e seconda di f in $(0,0,0)$ a partire dallo sviluppo. Non il contrario!
- Seconda parte, esercizio 3. È possibile trovare la soluzione del problema di Cauchy (1) imponendo che la soluzione generale (4) soddisfi le condizioni iniziali previste. Questo richiede però di risolvere un sistema lineare di n equazioni in n incognite (i coefficienti a_k e b_k), e non è affatto semplice.

Scritto del IV appello, 21 luglio 2006

Prima parte

1. $D^2 f(x,y) = (x^2+y^2)^{-3/2} \begin{pmatrix} y^2 & -xy \\ -xy & x^2 \end{pmatrix}$.

2. $e^{x+yz} = 1 + (x+yz) + \frac{1}{2}(x+yz)^2 + o((x+yz)^2) = \underbrace{1 + x + \frac{x^2}{2} + yz}_{P_2} + o(x^2+y^2+z^2)$.

3. Per $a \neq \pm\sqrt{12}$ l'unico punto critico è $(1,0,0)$; studiando la matrice Hessiana di f in tale punto si vede che si tratta di un *minimo locale* se $a^2 < 12$ e di un *punto di sella* se $a^2 > 12$.

4. D è limitato se e solo se $a \leq 0$ (per $a > 0$ contiene la successione illimitata $(0, \sqrt{a}\,n)$).

5. $R = 1/2$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}(-2x)^n = -\log(1-2x)$.

6. $\displaystyle\int_D 6x^2 e^{y^2}\, dx\, dy = \int_0^2 \left(\int_0^{y^{1/3}} 6x^2\, dx \right) e^{y^2} dy = \int_0^2 2y e^{y^2} dy = \Big| e^{y^2} \Big|_0^2 = e^4 - 1.$

7. Si tratta di un'equazione lineare del primo ordine (a coefficienti non costanti e non omogenea). La formula risolutiva dà $y = (x-1)\exp(x^2)$.

8. $\begin{cases} \dot y = z \\ \dot z = x^2 y + y^2 z \\ y(0) = 0 \\ z(0) = 1 \end{cases}$.

Seconda parte

1. Utilizzando il cambio di variabili $y = \rho\cos\theta$ e $z = \rho\sin\theta$, l'insieme B corrisponde (quasi) bigettivamente all'insieme B' dei punti (x,ρ,θ) tali che $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq \rho \leq \sqrt{x}$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Pertanto
$$\begin{aligned} \int_B e^{x^3} y^2\, dx\, dy\, dz &= \int_{B'} e^{x^3} (\rho\cos\theta)^2 \rho\, dx\, d\rho\, d\theta \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta \right) \left(\int_0^{\sqrt{x}} \rho^3\, d\rho \right) e^{x^3} dx \\ &= \int_0^1 \frac{\pi}{4} x^2 e^{x^3} dx = \left| \frac{\pi}{12} e^{x^3} \right|_0^1 = \frac{\pi}{12}(e-1) \ . \end{aligned}$$

2. Troviamo la soluzione per f qualunque usando il metodo della variazione delle costanti. Due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea associata $\ddot y + y = 0$ sono $\cos x$ e $\sin x$; quindi, usando la sostituzione
$$y = u\cos x + v \sin x \ , \tag{1}$$
l'equazione $\ddot y + y = f(x)$ equivale al sistema
$$\begin{cases} \dot u \cos x + \dot v \sin x = 0 \\ -\dot u \sin x + \dot v \cos x = f(x) \end{cases} \tag{2}$$
la cui soluzione è data da $\dot u = -f(x)\sin x$ e $\dot v = f(x)\cos x$.

Tenuto conto della (1), la condizione $y(0) = 0$ equivale a $u(0) = 0$. Inoltre la (1) e la prima equazione in (2) implicano

$$\dot{y} = -u \sin x + v \cos x \tag{3}$$

e dunque la condizione $\dot{y}(0) = 0$ equivale a $v(0) = 0$. Pertanto la soluzione y del problema di Cauchy di partenza è data dalla formula (1) con

$$u(x) = -\int_0^x f(t) \sin t \, dt \quad \text{e} \quad v(x) = \int_0^x f(t) \cos t \, dt \; . \tag{4}$$

a) Applichiamo la formula (4) per calcolare u e v quando $f(x) := \dfrac{4}{1+\sin^2 x}$:

$$\begin{aligned} u(x) = -\int_0^x \frac{4 \sin t \, dt}{2-\cos^2 t} &= -\int_{\cos x}^1 \frac{4ds}{2-s^2} \\ &= -\sqrt{2} \int_{\cos x}^1 \frac{1}{\sqrt{2}-s} + \frac{1}{\sqrt{2}+s} \, ds \\ &= \sqrt{2} \left[\log\left(\frac{\sqrt{2}+\cos x}{\sqrt{2}+1} \right) - \log\left(\frac{\sqrt{2}-\cos x}{\sqrt{2}-1} \right) \right] \end{aligned}$$

$$v(x) = \int_0^x \frac{4 \cos t \, dt}{1+\sin^2 t} = \int_0^{\sin x} \frac{4ds}{1+s^2} = 4 \arctan(\sin x) \; .$$

b) Sia y una soluzione del problema di Cauchy di partenza. È chiaro che se y è 2π-periodica allora la condizione iniziale $y(0) = \dot{y}(0) = 0$ implica $y(2\pi) = \dot{y}(2\pi) = 0$. Dimostriamo ora il viceversa: posto $z(x) := y(x + 2\pi)$ si ha che per ogni x

$$\ddot{z}(x) + z(x) = \ddot{y}(x + 2\pi) + y(x + 2\pi) = f(x + 2\pi) = f(x) \; ,$$

mentre la condizione $y(2\pi) = \dot{y}(2\pi) = 0$ implica $z(0) = \dot{z}(0) = 0$. Ma allora z risolve il problema di Cauchy di partenza, e quindi deve coincidere con y per via del teorema di unicità. Dunque $y(x) = z(x) = y(x + 2\pi)$ per ogni x, il che significa che y è 2π-periodica.

c) Per via di quanto dimostrato al punto b), si tratta di far vedere che $y(2\pi) = \dot{y}(2\pi) = 0$ se e solo se gli integrali tra 0 e 2π di $f(t) \cos t$ e $f(t) \sin t$ sono entrambi nulli. Tenuto conto delle formule (1), (3) e (4) si ha

$$y(2\pi) = u(2\pi) = -\int_0^{2\pi} f(t) \sin t \, dt \quad \text{e} \quad \dot{y}(2\pi) = v(2\pi) = \int_0^{2\pi} f(t) \cos t \, dt \; ,$$

sa cui la tesi segue immediatamente.

3. a) Sia m il valore minimo assunto da u su $[a, b]$, e sia x_0 un punto di minimo di u; dobbiamo dimostrare che $m = u(x_0) \geq 0$. Se x_0 è uguale ad a o b allora $u(x_0) \geq 0$ per ipotesi. Se invece x_0 è interno all'intervallo $[a, b]$ allora la derivata seconda di u in x_0 deve essere positiva o nulla, ovvero

$$0 \leq \ddot{u}(x_0) = f(u(x_0)) = f(m) \; ,$$

e siccome f è strettamente crescente e $f(0) = 0$ otteniamo che $m \geq 0$.

b) La dimostrazione è analoga a quella del punto a): sia m il valore minimo assunto da u su $\overline{\Omega}$, e sia x_0 un punto di minimo di u su $\overline{\Omega}$ (tale punto esiste perché $\overline{\Omega}$ è chiuso e limitato ed u è continua). Se x_0 appartiene al bordo di Ω allora $m = u(x_0) \geq 0$ per ipotesi. Se invece x_0 appartiene ad Ω allora la matrice Hessiana $D^2u(x_0)$ deve essere semi-definita positiva, da cui segue che la sua traccia deve essere positiva o nulla, e quindi

$$0 \leq \text{traccia}(D^2u(x_0)) = \Delta u(x_0) = f(u(x_0)) = f(m) \; ;$$

come prima, si deduce che $m \geq 0$.

Commenti

- Seconda parte, esercizio 2c). Per via di quanto dimostrato al punto b), si tratta di far vedere che $y(2\pi) = \dot{y}(2\pi) = 0$ se e solo se gli integrali tra 0 e 2π di $f(t)\cos t$ e $f(t)\sin t$ sono entrambi nulli. Ecco una dimostrazione alternativa, che non ricorre alla formula risolutiva ma solo all'equazione: siccome $\ddot{y} + y = f$,

$$\int_0^{2\pi} f(t)\sin t\, dt = \int_0^{2\pi} \ddot{y}\sin t\, dt + \int_0^{2\pi} y\sin t\, dt$$

ed integrando due volte per parti il primo integrale si ottiene

$$\int_0^{2\pi} f(t)\sin t\, dt = \Big|\dot{y}\sin t\Big|_0^{2\pi} - \Big|y\cos t\Big|_0^{2\pi} = -y(2\pi)\ ,$$

ed analogamente

$$\int_0^{2\pi} f(t)\cos t\, dt = \Big|\dot{y}\cos t\Big|_0^{2\pi} + \Big|y\sin t\Big|_0^{2\pi} = \dot{y}(2\pi)\ .$$

- Seconda parte, esercizio 3. In molte delle soluzioni proposte le disuguaglianze rilevanti sono state trattate in modo impreciso, spesso senza fare caso al fatto se erano strette o meno (ad esempio, il fatto che una funzione u abbiamo minimo in x_0 implica $\ddot{u}(x_0) \geq 0$ e non $\ddot{u}(x_0) > 0$) mentre questo dettaglio è rilevante al fine di ottenere una dimostrazione corretta.
- Seconda parte, esercizio 3b). Nessuno ha messo in evidenza due fatti fondamentali, e cioè che il laplaciano è la traccia della matrice Hessiana, e che una matrice simmetrica semi-definita positiva ha traccia positiva o nulla.

Prima parte

1. a) f è differenziabile in tutti i punti in cui $x \neq y$; b) $\nabla f(x,y) = \begin{cases} (1,0) & \text{se } x > y \\ (0,1) & \text{se } x < y \end{cases}$.

2. $(Df)_{ij} = D_j f_i = |x|^4 \delta_{ij} + 4|x|^2 x_i x_j = \begin{cases} |x|^2(|x|^2 + 4x_i^2) & \text{se } i = j \\ 4|x|^2 x_i x_j & \text{se } i \neq j \end{cases}$.

3. $f(x,y) = 2\big[1 - \frac{1}{2}(x+y)^2 + O((x+y)^4)\big] + \big[xy - O((xy)^3))\big] = \underbrace{2 - x^2 - y^2}_{P_2} + O((x^2+y^2)^2)$.

4. Il polinomio caratteristico di M è $P(\lambda) = \det(\lambda I - M) = (\lambda - a)(\lambda + a - 1)(\lambda + a - 5)$, quindi gli autovalori sono $a, 1-a, 5-a$, e sono tutti positivi se e solo se $0 < a < 1$.

5. T corrisponde all'insieme dei punti (u,v) tali che $1 \leq u \leq 2$ e $1 \leq v \leq 3$. Inoltre $du\, dv = (2y/x)\, dx\, dy = 2v\, dx\, dy$ e quindi

$$\int_T f(y^2)\, dx\, dy = \int_1^3 \left(\int_1^2 \frac{f(uv)}{2v}\, du \right) dv \ .$$

6. $$R = \left[\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\frac{3^n}{n^2+1}} \right]^{-1} = \lim_{n\to\infty} \exp\left(-\frac{\log(3^n/(n^2+1))}{2n} \right)$$
$$= \exp\left(-\lim_{n\to\infty} \frac{n \log 3 - \log(n^2+1))}{2n} \right) = \exp\left(-\frac{\log 3}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \ .$$

7. Tre soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea associata sono e^{2x}, $\cos x$ e $\sin x$. Ponendo $y = e^{2x} u_1 + \cos x\, u_2 + \sin x\, u_3$, il sistema da risolvere è

$$\begin{cases} e^{2x} \dot u_1 + \cos x\, \dot u_2 + \sin x\, \dot u_3 = 0 \\ 2e^{2x} \dot u_1 - \sin x\, \dot u_2 + \cos x\, \dot u_3 = 0 \\ 4e^{2x} \dot u_1 - \cos x\, \dot u_2 - \sin x\, \dot u_3 = \log x \end{cases} \ .$$

8. L'equazione $\dot y = 2xy + 2x \exp(-x^2)\, y^2$ è di Bernoulli. Per $\alpha = -1$ il cambio di variabile $y = u^\alpha$ la trasforma nell'equazione lineare $-\dot u = 2xu + 2x \exp(-x^2)$, la cui soluzione generale è $u = (a - x^2) \exp(-x^2)$ con $a \in \mathbb{R}$, e dunque

$$y = \frac{\exp(x^2)}{a - x^2} \quad \text{con } a \in \mathbb{R}.$$

Seconda parte

1. Passiamo in coordinate polari centrate nell'origine, cioè $x = \rho \cos\theta$, $y = \rho \sin\theta$. Il cerchio di centro $(1,0)$ e raggio 1 è definito dalla disequazione $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$, ovvero $x^2 + y^2 \leq 2x$, che in coordinate polari diventa $\rho \leq 2\cos\theta$. Pertanto

$$\int_D \frac{x^3}{(x^2+y^2)^2}\, dx\, dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\cos\theta} \frac{\rho^3 \cos^3\theta}{\rho^4} \rho\, d\rho\, d\theta = \int_0^{2\pi} 2\cos^4\theta\, d\theta = \cdots = \frac{3\pi}{4} \ .$$

2. a) Consideriamo dunque un cambio di variabile $t = g(x)$, dove $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una di classe C^2 con derivata mai nulla, e poniamo

$$y(x) := u(g(x)) \ .$$

Cerchiamo quindi di riscrivere l'equazione in (1) nella nuova incognita u. Per far questo osserviamo che

$$\dot y = \dot u \dot g \ , \quad \ddot y = \ddot u \dot g^2 + \dot u \ddot g$$

(per semplificare la notazione ho scritto $\dot u$ e $\ddot u$ invece di $\dot u \circ g$ e $\ddot u \circ g$ come sarebbe corretto) e quindi, sostituendo nella (1) e dividendo per $\dot g^2$, otteniamo la nuova equazione

$$\ddot u + \Big(\frac{\ddot g}{\dot g^2} + \frac{2x+2}{(1+x^2)\dot g}\Big)\dot u + \frac{1}{(1+x^2)^2 g^2} u = 0 \ . \tag{3}$$

Vogliamo ora trovare una g tale che i coefficienti nell'equazione (3) siano delle costanti. Cominciamo quindi con l'imporre che il coefficiente di fronte ad u sia uguale ad una costante, ad esempio 1 (imponendo che sia 1 e non un altro numero perderemo sicuramente qualche g ammissibile, ma questo non è un problema purché alla fine se ne trovi almeno una). Dunque g deve soddisfare $(1+x^2)^2\dot g^2 = 1$, e supponendo che $\dot g$ sia sempre positiva otteniamo $\dot g = (1+x^2)^{-1}$ ovvero

$$g(x) = \arctan x \ .$$

Ora si verifica che il coefficiente di fronte ad $\dot u$ nella (3) assume valore costante 2. Pertanto la (3) diventa $\ddot u + 2\dot u + u = 0$, la cui soluzione generale è $u(t) = e^{-t}(a+bt)$ con $a, b \in \mathbb{R}$. La soluzione generale della (1) è quindi

$$y(x) = e^{-\arctan x}(a + b \arctan x) \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R}.$$

b) Come prima, consideriamo il cambio di variabile $t = g(x)$, dove $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una di classe C^2 con derivata mai nulla, e poniamo $y(x) := u(g(x))$. L'equazione (2) diventa allora

$$\ddot u + \Big(\frac{\ddot g}{\dot g^2} + \frac{\alpha}{\dot g}\Big)\dot u + \frac{\beta}{\dot g^2} u = 0 \ . \tag{4}$$

Supponiamo ora di aver trovato una g per cui i coefficienti di fronte a $\dot u$ e u nella (4) sono due costanti, cioè

$$\frac{\ddot g}{\dot g^2} + \frac{\alpha}{\dot g} = a \quad \text{e} \quad \frac{\beta}{\dot g^2} = b \ , \tag{5}$$

e cerchiamo di vedere quale relazione questo implica tra α e β (stiamo quindi cercando condizioni *necessarie* per l'esistenza di g). La seconda equazione in (5) implica

$$\dot g = \pm\sqrt{\frac{\beta}{b}} \quad \text{e quindi} \quad \ddot g = \pm\frac{\dot\beta}{2\sqrt{b\beta}} \ . \tag{6}$$

Sostituendo le identità in (6) nella prima equazione in (5) otteniamo infine

$$\alpha = \pm\frac{a}{\sqrt b}\sqrt\beta - \frac{\dot\beta}{2\beta} \ .$$

Pertanto, condizione *necessaria* affinché esista un cambio di variabile che trasforma la (2) in un'equazione a coefficienti costanti è che esista una costante $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$\alpha = c\sqrt\beta - \frac{\dot\beta}{2\beta} \ . \tag{7}$$

È facile verificare che questa condizione è anche *sufficiente*. Procedendo come al punto a), prendiamo g uguale ad una primitiva della funzione $\sqrt{\beta}$, per cui la seconda condizione in (5) vale con $b = 1$, ed osserviamo che, grazie alla condizione (7) e alle formule in (6), la prima condizione in (5) è soddisfatta con $a = c$.

3. a) Supponiamo che x e y soddisfino il sistema in questione. Moltiplicando la prima equazione per la seconda si ottiene $f(x)\,g(x) = f(y)\,g(y)$, e quindi $x = y$ per via della stretta monotonia della funzione fg.

b) I due vertici del triangolo oltre a $v_0 = (0, -1)$ possono essere scritti come $v_1 = (x, 1/x^2)$ e $v_2 = (-y, 1/y^2)$ con x, y numeri reali positivi. Il doppio dell'area del triangolo coincide con quella del parallelogrammo generato da $v_1 - v_0$ e $v_2 - v_0$, ovvero

$$F(x,y) = \left|\det\begin{pmatrix} v_1 - v_0 \\ v_2 - v_0 \end{pmatrix}\right| = \left|\det\begin{pmatrix} x & 1 + 1/x^2 \\ y & 1 + 1/y^2 \end{pmatrix}\right| = x\Big(1 + \frac{1}{y^2}\Big) + y\Big(1 + \frac{1}{x^2}\Big)\ .$$

La funzione F è continua, ma per dimostrare che ammette minimo su $D := (0, +\infty)^2$ non possiamo utilizzare direttamente il teorema di Weierstrass perché il dominio D non è compatto. Tuttavia, preso un valore L assunto da F a piacere, ci basta trovare un insieme compatto K contenuto in D tale che $L \geq F(x, y)$ implica $(x, y) \in K$: in tal caso il punto di minimo di F su K – che esiste per via del Teorema di Weierstrass – deve anche essere un punto di minimo di F su D.

Per trovare K, osserviamo che se $L \geq F(x, y)$ allora $L \geq x$ perché $F(x, y) \geq x$. Analogamente $L \geq y$. Inoltre $F(x, y) \geq y/x^2$ implica $Lx^2 \geq y$, ed analogamente $Ly^2 \geq x$. Combinando queste due disuguaglianze otteniamo $L^3x^4 \geq x$, ovvero $x \geq 1/L$. Analogamente $y \geq 1/L$. Dunque basta prendere $K := [1/L, L]^2$.

c) Siccome F è di classe C^1, i punti di minimo sono tra quelli dove si annulla il ∇F, cioè soddisfano il sistema

$$\begin{cases} 1 + \dfrac{1}{y^2} - \dfrac{2y}{x^3} = 0 \\ 1 + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2x}{y^3} = 0 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{y^3} = \dfrac{2}{x^3} \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^3} = \dfrac{2}{y^3} \end{cases}. \tag{8}$$

Siccome la funzione

$$\Big(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}\Big)\frac{2}{x^3} = \frac{2}{x^4} + \frac{2}{x^6}$$

è strettamente decrescente sull'intervallo $(0, +\infty)$, per quanto visto al punto a) tutte le soluzioni *positive* del sistema (8) soddisfano $x = y$. Il sistema si riduce allora all'equazione

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} = \frac{2}{x^3}$$

che ha come unica soluzione positiva $x = 1$. Pertanto l'unica soluzione del sistema (8) è $x = y = 1$, e deve per forza di cose corrispondere al punto di minimo di F. Il triangolo cercato è dunque quello di vertici $(0, -1)$, $(1, 1)$ e $(-1, 1)$.

Commenti

- Prima parte, esercizio 2. La mappa f va da $\mathbb{R}^4$ in $\mathbb{R}^4$, e quindi la derivata di f è una mappa a valori nelle matrici 4×4. Molti hanno invece dato come risposta una funzione scalare; questo è un errore grave.

- Seconda parte, esercizio 3. Inaspettatamente, il calcolo dell'area del triangolo si è rivelato un ostacolo serio per quasi tutti.
- Seconda parte, esercizio 3. Si può dimostrare direttamente senza usare le derivate che il valore $F(1,1) = 4$ è il minimo valore assunto da F, risolvendo così tutto l'esercizio. Applicando ripetutamente la disuguaglianza nota $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ si ottiene infatti

$$F(x,y) = x + y + \frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2} \geq 2\sqrt{xy} + 2\sqrt{\frac{x}{y^2} \cdot \frac{y}{x^2}} = 2\sqrt{xy} + \frac{2}{\sqrt{xy}} \geq 2\sqrt{2\sqrt{xy} \cdot \frac{2}{\sqrt{xy}}} = 4 \ .$$

- Seconda parte, esercizio 3b). Un altro modo per dimostrare l'esistenza del minimo di F consiste nel far vedere che $F(x,y)$ ha limite $+\infty$ quando $x \to +\infty$ oppure $x \to 0^+$ (siccome F è simmetrica si ottiene che lo stesso vale se si scambia x con y). Bisogna però precisare che il limite di $F(x,y)$ non deve venir calcolato ad y costante – cosa che è facile – ma lasciando la variabile y libera. In altre parole si tratta di dimostrare che $F(x_n, y_n)$ tende a $+\infty$ per ogni successione (x_n, y_n) tale che $x_n \to +\infty$ oppure $x_n \to 0$, senza restrizioni su y_n.
- Seconda parte, esercizio 3c). Si può dimostrare che tutte le soluzioni del sistema (8) soddisfano $x = y$ senza utilizzare il punto a): scrivendo le due equazioni come $x^3y^2 + x^3 - 2y^3 = 0$ e $x^2y^3 + y^3 - 2x^3 = 0$ e sottraendo la seconda alla prima si ottiene infatti

$$(x - y)(x^2y^2 + 3x^2 + 3xy + 3y^2) = 0$$

e siccome il fattore $x^2y^2 + 3x^2 + 3xy + 3y^2$ non si annulla mai quando x e y sono positive, se ne deduce che $x = y$.

PRIMA PARTE

1. $D_x\big[f(xy+yz, yz+zx)\big] = \nabla f(xy+yz, yz+zx)\cdot(y,z)$.

2. $R = \left[\lim_{n\to+\infty} \sqrt[3n]{\dfrac{\log n}{1+2^n}}\right]^{-1} = \exp\left[-\lim_{n\to+\infty}\dfrac{1}{3n}\log\Big(\dfrac{\log n}{1+2^n}\Big)\right] = \exp\left(\dfrac{\log 2}{3}\right) = \sqrt[3]{2}$.

3. Il polinomio caratteristico dell'equazione deve avere (almeno) due soluzioni uguali a $\pm 2i$ con molteplicità (almeno) 2; per esempio $P(\lambda) := (\lambda^2+4)^2$. L'equazione corrispondente è $D^4y + 8D^2y + 16y = 0$.

4. La sezione E_x di E all'altezza x è un cerchio di raggio $\sqrt{1-e^x}$ (ed in particolare non è vuoto solo per $x \le 0$). Quindi

$$\mathrm{Vol}(E) = \int_{-1/2}^{0} \mathrm{Area}(E_x)\,dx = \int_{-1/2}^{0} \pi(1-e^x)\,dx = \pi\Big(\frac{1}{\sqrt{e}} - \frac{1}{2}\Big)\ .$$

SECONDA PARTE

1. a) Il cerchio D è definito dalla disequazione $x^2+y^2-2x \le 0$, che in coordinate polari diventa $\rho^2 - 2\rho\cos\theta \le 0$, vale a dire $0 \le \rho \le 2\cos\theta$ con $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$. Pertanto

$$\begin{aligned}\int_D x^2+y^2\,dx\,dy &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta} \rho^3\,d\rho\,d\theta \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4\cos^4\theta\,d\theta \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos(2\theta)+1)^2\,d\theta \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{3}{2} + 2\cos(2\theta) + \frac{1}{2}\cos(4\theta)\,d\theta = \frac{3\pi}{2}\end{aligned}$$

dove nella terza e quarta uguaglianza si è usata l'identità $2\cos^2\alpha = \cos(2\alpha)+1$.
b) La palla B è definito dalla disequazione $x^2+y^2+z^2-2x \le 0$; nelle coordinate sferiche $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta\,\cos\varphi$, $z = \rho\sin\theta\,\sin\varphi$, questa disequazione diventa $0 \le \rho \le 2\cos\theta$ con $0 \le \theta \le \pi/2$ e $0 \le \varphi \le 2\pi$. Pertanto

$$\begin{aligned}\int_B x^2+y^2+z^2\,dx\,dy\,dz &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta} \rho^4\sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{64\pi}{5}\cos^5\theta\,\sin\theta\,d\theta = \left| -\frac{32\pi}{15}\cos^6\theta \right|_0^{\pi/2} = \frac{32\pi}{15}\ .\end{aligned}$$

2. a) Posto $u(x) := v(|x|)$, per ogni $x \ne 0$ si ha

$$\nabla u(x) = \dot v(|x|)\frac{x}{|x|} \quad \text{e} \quad \Delta u(x) = \ddot v(|x|) + \frac{n-1}{|x|}\dot v(|x|)\ .$$

b) Posto $|x| = t$, si tratta di determinare le funzioni $v : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ tali che

$$\ddot v + \frac{n-1}{t}\dot v = \frac{1}{t}\ .$$

Si tratta quindi di un'equazione lineare del primo ordine in $\dot{v}$, la cui soluzione è data da

$$\dot{v}(t) = \frac{1}{n-1} + at^{1-n} \quad \text{con } a \in \mathbb{R},$$

e quindi, per $n > 2$,

$$v(t) = \frac{t}{n-1} + at^{2-n} + b \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R},$$

vale a dire

$$u(x) = \frac{|x|}{n-1} + a|x|^{2-n} + b \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R}.$$

Per $n = 2$ le soluzioni sono invece $u(x) = |x| + a \log |x| + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$.

Scritto per l'esame unificato, 31 gennaio 2007

Prima parte

1. a) $\dfrac{e^{x^2y}-1}{xy} \sim \dfrac{x^2y}{xy} = x \to 0$; b) non esiste (basta considerare il limite sulle rette $y = ax$).
2. $\nabla \cdot (fG) = \nabla f \cdot G + f\,\nabla G$.
3. a) Sì; b) no; c) no.
4. $\text{Vol} = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \pi |\sin x|^2\, dx = \pi^2$.

Seconda parte

1. Sia D' l'insieme dei punti $(x,y,z) \in D$ tali che $x,y,z \geq 0$. Chiaramente D può essere scritto come unione di otto copie di D' (con parti interne a due a due disgiunte) ottenute riflettendo D' rispetto ad uno o più dei tre piani coordinati, e siccome la funzione integranda $|xyz|$ è invariante rispetto a tali riflessioni si ha che

$$\int_D |xyz|\, dx\, dy\, dz = 8 \int_{D'} xyz\, dx\, dy\, dz \ . \tag{1}$$

Sia D'' l'insieme dei punti $(x,y,z) \in D'$ tali che $y \leq z$, vale a dire

$$D'' := \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x,y,z \geq 0, \ y \leq z, \ x^2 + y^2 + 4z^2 \leq 1\big\} \ .$$

L'insieme D' si scrive come unione di D'' e della sua riflessione rispetto al piano $y = z$ e siccome la funzione integranda xyz è invariante rispetto a tale riflessione si ha che

$$\int_{D'} xyz\, dx\, dy\, dz = 2 \int_{D''} xyz\, dx\, dy\, dz \ . \tag{2}$$

Si ponga infine

$$E := \big\{(x',y',z') \in \mathbb{R}^3 : \ x',y',z' \geq 0, \ y' \leq z', \ x' + y' + 4z' \leq 1\big\} \ .$$

Il cambio di variabile $x' = x^2$, $y' = y^2$ e $z' = z^2$ mappa D'' in E bigettivamente, ed il determinate di tale trasformazione è $8xyz$; pertanto

$$\begin{aligned}\int_{D''} xyz\, dx\, dy\, dz &= \frac{1}{8} \int_E dx'\, dy'\, dz' \\ &= \frac{1}{8} \int_0^1 dx' \int_0^{(1-x')/5} dy' \int_{y'}^{(1-x'-y')/4} dz' = \frac{1}{960} \ . \end{aligned} \tag{3}$$

Mettendo insieme le uguaglianze (1), (2) e (3) otteniamo infine $\displaystyle\int_D |xyz|\, dx\, dy\, dz = \frac{1}{60}$.

2. a) Il dominio di f è dato dall'insieme dei punti (x,y) con $x,y > 0$. Osserviamo che posto $g(t) := t - \log t$ si ha

$$f(x,y) = g((x+y)^2)\, g(4xy) \ . \tag{3}$$

Siccome $g(1+s) = 1 + s - \log(1+s) = 1 + s^2/2 + O(s^3)$ allora

$$\begin{aligned} f(1/2+h, 1/2+k) &= g((1+h+k)^2)\, g((1+2h)(1+2k)) \\ &= \big[g(1 + 2(h+k) + O(h^2+k^2))\big]^2 \\ &= \big[1 + 2(h+k)^2 + O((h^2+k^2)^{3/2})\big]^2 \\ &= 1 + 4(h+k)^2 + O((h^2+k^2)^{3/2}) \end{aligned}$$

e quindi lo sviluppo di Taylor cercato è $1 + 4(h + k)^2$.
b) Basta osservare che il determinante della matrice associata al sistema è $b - a$, e quindi per ipotesi è diverso da 0.
c) Utilizzando la formula (3), la condizione $Df(x, y) = 0$ diventa

$$\begin{cases} \dot g((x+y)^2)\, g(4xy)\, 2(x+y) + g((x+y)^2)\, \dot g(4xy)\, 4y = 0 \\ \\ \dot g((x+y)^2)\, g(4xy)\, 2(x+y) + g((x+y)^2)\, \dot g(4xy)\, 4x = 0 \end{cases} \tag{4}$$

Supponiamo per cominciare che $x \neq y$. Allora per quanto visto al punto b) si deve avere

$$\begin{cases} t = \dot g((x+y)^2)\, g(4xy)\, 2(x+y) = 0 \\ \\ u = \dot g((x+y)^2)\, \dot g(4xy) = 0 \end{cases}$$

Si osservi che $x + y > 0$ nel dominio di f, $g(t) > 0$ per ogni t, e $\dot g(t) = 0$ se e solo se $t = 1$. Pertanto il sistema precedente implica $(x + y)^2 = 1$ e $4xy = 1$, condizioni che sono soddisfatte da un solo punto nel dominio di f, vale a dire $x = y = 1/2$.
Se invece $x = y$, allora il sistema (4) si riduce a $g(4x^2)\, \dot g(4x^2)\, 4x = 0$ ovvero $\dot g(4x^2) = 0$, ovvero $x = y = 1/2$. Pertanto l'unico punto critico di f è il punto $(1/2, 1/2)$.
d) Si verifica facilmente che $t = 1$ è il punto di minimo assoluto di g e quindi

$$f(x, y) = g((x+y)^2)\, g(4xy) \geq g^2(1) = f(1/2, 1/2)$$

e dunque $(1/2, 1/2)$ è il punto di minimo assoluto di f, ed il valore minimo è $g^2(1) = 1$. Viceversa è immediato osservare che l'estremo superiore dei valori assunti da f è $+\infty$.

Commenti

- Seconda parte, esercizio 1. Il calcolo dell'integrale $\int_E dx'\, dy'\, dz'$ può essere semplificato osservando che E è il tetraedro di vertici $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 1/5, 1/5)$, $(1, 0, 1/4)$, e pertanto

$$\int_E dx'\, dy'\, dz' = \mathrm{Vol}(E) = \frac{1}{6} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1/5 & 1/5 \\ 1 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} = \frac{1}{120}\ .$$

Integrazione, a.a. 2005/06 - Soluzioni

Primo Compitino, 26 aprile 2006

Prima parte, gruppo A

1. a) $\exp(At) = \exp(3tI)\exp\begin{pmatrix} 0 & 2t \\ -2t & 0 \end{pmatrix} = e^{3t}\exp\begin{pmatrix} \cos(2t) & \sin(2t) \\ -\sin(2t) & \cos(2t) \end{pmatrix}$.

   b) $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \exp(At)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t}\sin(2t) \\ e^{3t}\cos(2t) \end{pmatrix}$.

2. Bisogna trovare i valori di a per cui $ae^{ax} \geq e^{ax}\sin x - 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Una possibilità è $a = 0$. Per $a < 0$ la disuguaglianza non è verificata quando $x = \pi/2 - 2n\pi$ con n sufficientemente grande. Per $0 < a < 1$ la disuguaglianza non è verificata quando $x = \pi/2 + 2n\pi$ con n sufficientemente grande. Per $1 \leq a$ la disuguaglianza è sempre verificata. I valori di a cercati sono dunque $a = 0$ e $a \geq 1$.

3. $\nabla \times F = (-y^2, -z^2, -x^2)$.

4. Siccome $p = \Phi(1,0)$, un vettore normale a S in p è

$$n := \frac{\partial\Phi}{\partial u}(1,0) \times \frac{\partial\Phi}{\partial u}(1,0) = (3,3,0) \times (0,0,2) = (6,-6,0)\ .$$

   Pertanto $\mathrm{Tan}(S,p) = n^\perp = \{v \in \mathbb{R}^3 :\ v_x = v_y\}$.

5. $L = \displaystyle\int_a^b \sqrt{\rho^2 + \dot\rho^2}\, d\theta$.

6. a) Detta $\tilde\gamma(t) := (t,0)$ con $t \in [-1,1]$ la parametrizzazione del segmento, si ottiene

$$\int_{\tilde\gamma} F \cdot \tau_{\tilde\gamma} = \int_{-1}^{1} F(\tilde\gamma)\cdot\dot\gamma\, dt = \int_{-1}^{1} t^2\, dt = \frac{2}{3}\ .$$

   b) Siccome percorrendo γ e poi $\tilde\gamma$ si ottiene una curva chiusa che delimita un certo insieme A, applicando il Teorema di Gauss-Green e tenendo conto del fatto che $D_xF_y - D_yF_x = 0$, si ha che

$$\int_\gamma F\cdot\tau_\gamma + \int_{\tilde\gamma} F\cdot\tau_{\tilde\gamma} = \int_A D_xF_y - D_yF_x\, dx\, dy = 0$$

   Dunque $\displaystyle\int_\gamma F\cdot\tau_\gamma = -\int_{\tilde\gamma} F\cdot\tau_{\tilde\gamma} = -\frac{2}{3}$.

7. Basta prendere una spirale che tende all'origine in modo sufficientemente lento. Ad esempio

$$\gamma(t) := \begin{cases} t^a(\cos(1/t), \sin(1/t)) & \text{per } 0 < t \leq 1 \\ (0,0) & \text{per } t = 0 \end{cases}$$

   con $a > 0$. Si vede infatti che $|\dot\gamma| = \sqrt{a^2t^{2(a-1)} + t^{2(a-2)}}$ è asintoticamente equivalente a t^{a-2} per $t \to 0$, e dunque ha integrale infinito per $a < 1$.

8. a) $(A^2)_{ij} = \sum_k A_{ik}A_{kj} = \sum_k v_iw_kv_kw_i = \big(\sum_k w_kv_k\big)v_iw_j = cA$ con $c := \sum_k w_kv_k = v\cdot w$.

   b) $A^n = c^{n-1}A$ per ogni $n \geq 1$.

   c) $e^A = I + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c^{n-1}}{n!}A = I + dA$ con $d := \frac{e^c - 1}{c}$ se $c \neq 0$ e $d := 1$ se $c = 0$.

PRIMA PARTE, GRUPPO B

1. a) $\exp(At) = e^{2t} \exp \begin{pmatrix} \cos(3t) & \sin(3t) \\ -\sin(3t) & \cos(3t) \end{pmatrix}$. b) $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t}\cos(3t) \\ -e^{2t}\sin(3t) \end{pmatrix}$.
2. Analogo al gruppo A: le soluzioni sono $a = 0$ e $a \leq -1$.
3. $\nabla \times F = (-2yz, -2xz, -2xy)$.
4. Siccome $p = \Phi(0,1)$, un vettore normale a S in p è $n = (-12, -12, 0)$ e quindi $\mathrm{Tan}(S,p) = \{v \in \mathbb{R}^3 : \ v_x + v_y = 0\}$.
5. Uguale al gruppo A.
6. Analogo al gruppo A: a) $\displaystyle\int_{\tilde\gamma} F \cdot \tau_{\tilde\gamma} = \frac{2}{5}$. b) $\displaystyle\int_{\gamma} F \cdot \tau_{\gamma} = -\int_{\tilde\gamma} F \cdot \tau_{\tilde\gamma} = -\frac{2}{5}$.
7. Uguale al gruppo A.
8. Uguale al gruppo A.

SECONDA PARTE

1. a) Una parametrizzazione regolare dell'ellisse di semiassi a e b è $\gamma(t) := (a\cos t, b\sin t)$ con $t \in [0, 2\pi]$, e quindi

$$L = \int_0^{2\pi} |\dot\gamma(t)|\, dt = \int_0^{2\pi} \big(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t\big)^{1/2}\, dt \ . \tag{1}$$

Derivando sotto il segno di integrale otteniamo che

$$\frac{\partial L}{\partial a} = \int_0^{2\pi} \frac{a \sin^2 t}{\big(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t\big)^{1/2}}\, dt \ , \quad \frac{\partial L}{\partial b} = \int_0^{2\pi} \frac{b \cos^2 t}{\big(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t\big)^{1/2}}\, dt \ . \tag{2}$$

Per $a = b = r$ il termine sotto radice è identicamente uguale a r^2 e quindi entrambi gli integrali in (2) sono facilmente calcolabili:

$$\nabla L(r,r) = (\pi, \pi) \ .$$

b) Utilizzando la (1) si ottiene

$$f(x) = \int_0^{2\pi} \big(1 + x^2 + 2x\cos(2t)\big)^{1/2}\, dt$$

da cui segue che

$$f'(x) = \int_0^{2\pi} \frac{x + \cos(2t)}{\big(1 + x^2 + 2x\cos(2t)\big)^{1/2}}\, dt$$

e, facendo un po' di conti,

$$f''(x) = \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2(2t)}{\big(1 + x^2 + 2x\cos(2t)\big)^{3/2}}\, dt \ .$$

Dunque $f''(x) > 0$ in quanto integrale di una funzione positiva e non identicamente nulla. Pertanto f è una funzione strettamente convessa e pari (la parità segue dalla simmetria di L), e quindi 0 è il punto di minimo (stretto) di f.

Dati a, b tali che $a+b=2$, ponendo $x := (b-a)/2$ si ha che $a = 1-x$ e $b = 1+x$ e dunque

$$L(a,b) = f(x) \geq f(0) = L(1,1) \ .$$

2. a) La circonferenza di raggio 1 e centro $(2,0)$ sul piano xz si parametrizza come $z = \sin u$, $x = 2+\cos u$ con $u \in [0, 2\pi]$. Facendo ruotare ciascuno di questi punti attorno all'asse delle z otteniamo quindi la circonferenza sul piano parallelo al piano xy con centro nell'origine e raggio $r = 2+\cos u$ (traslata lungo l'asse z fino all'altezza $z = \sin u$); tale circonferenza può essere sua volta parametrizzata da $x = r\cos v$, $y = r \sin v$ con $v \in [0, 2\pi]$. Pertanto la superficie S è parametrizzata da

$$\begin{cases} x = (2+\cos u)\cos v \\ y = (2+\cos u)\sin v \\ z = \sin u \end{cases} \quad \text{con } (u,v) \in [0,2\pi]^2. \tag{3}$$

Non è difficile verificare che la mappa

$$\Phi(u,v) := \big((2+\cos u)\cos v, (2+\cos u)\sin v, \sin u\big)$$

è di classe C^1 e iniettiva all'interno del dominio di parametrizzazione $D := [0, 2\pi]^2$. Inoltre

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} = (-\sin u \cos v, -\sin u \sin v, \cos u)$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial v} = (2+\cos u)(-\sin v, \cos v, 0)$$

e quindi

$$\eta := \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} = (2+\cos u)(-\cos u\, \cos v, -\cos u\, \sin v, -\sin u) \ . \tag{4}$$

Pertanto il vettore η ha modulo $(2+\cos u)$ e non si annulla mai, il che implica che $D\Phi$ ha sempre rango uguale a due, e Φ è una parametrizzazione regolare di S. Inoltre

$$\text{Area}(S) = \int_D \left| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right| du\, dv = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} 2+\cos u \, du\, dv = 8\pi^2 \ .$$

b) Ricordando che il vettore η dato nella formula (4) è ortogonale in ogni punto al piano tangente ad S, ed è non nullo, ci basta dimostrare che il prodotto scalere di $\nabla \times F$ e η è nullo in tutti i punti di S. Calcoliamo il rotore di F:

$$\nabla \times F = \left(-\frac{2xz}{x^2+y^2}, -\frac{2yz}{x^2+y^2}, 2 - \frac{4}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) \ .$$

Tramite la (3) otteniamo che per ogni punto di S si ha

$$\nabla \times F = \frac{2}{2+\cos u}(-\sin u\, \cos v, -\sin u\, \sin v, \cos u)$$

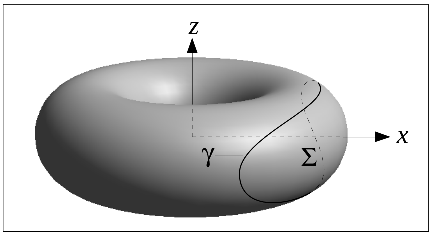
e quindi

$$(\nabla \times F)\cdot \eta = 2\sin u\, \cos u\, \cos^2 v + 2 \sin u\, \cos u\, \sin^2 v - 2\sin u\, \cos u = 0 \ .$$

c) La curva γ è il bordo della superficie Σ ottenuta intersecando S con l'insieme $x \geq 2+z^2$. Scegliendo opportunamente l'orientazione di γ ed applicando il teorema di Stokes otteniamo quindi

$$\int_\gamma F \cdot \tau_\gamma = \int_\Sigma (\nabla \times F)\cdot \eta = 0$$

(chiaramente il risultato non dipende dalla scelta dell'orientazione di γ).



3. a) Studiando il segno della funzione

$$f(x,y) := 10\,(1+y^2)\left(1+\frac{x-1}{x}y\right)$$

per $x>0$ si ottiene che f è negativa o nulla per $x<1$ ed $y \geq \frac{x}{1-x}$ e per $x>1$ e $y \leq \frac{x}{1-x}$. Tracciando un disegno si vede subito che $z_1 = \frac{x}{1-x}$ deve essere una soprasoluzione dell'equazione per $0<x<1$, mentre 0 è una sottosoluzione per $x>0$ (si verifica facilmente che le cose stanno effettivamente così). Essendo $z_1(s) > y_s(s) = 0$, ne segue che $z_1 > y_s$ per $s<x<1$ e $y_s>0$ per $s<x$. In particolare $\dot{y}_s = f(x,y_s) > 0$. Quindi y_s è strettamente positiva e strettamente crescente per $x>s$.
b) Osserviamo che se $\tau(s)$ è finito allora y_s tende a $+\infty$ per $x \to \tau(s)$ (è noto dalla teoria che in questo caso y deve tendere a $+\infty$ o a $-\infty$, e la seconda possibilità è esclusa dal fatto che y è crescente). Se per assurdo avessimo $\tau(s)<1$ allora la disuguaglianza $z_1>y_s$ per $s<x<\tau(s)$ implicherebbe che y_s non tende a $+\infty$ per $x\to\tau(s)$.
c) Siano dati $s \leq \bar{s}$. Siccome y_s e $y_{\bar{s}}$ sono sia sopra- che sottosoluzioni dell'equazione e $y_s(\bar{s}) > 0 = y_{\bar{s}}(\bar{s})$, allora $y_s > y_{\bar{s}}$ per $x>\bar{s}$. Se per assurdo si avesse $\tau(\bar{s}) < \tau(s)$, la maggiorazione $y_s > y_{\bar{s}}$ implicherebbe che $y_{\bar{s}}$ non tende a $+\infty$ per $x\to\tau(s)$.
d) Per ottenere una stima dall'alto di $\tau(s)$, cerchiamo una sottosoluzione z_s dell'equazione tale che $z_s(s)=0$ (per cui $z_s \leq y_s$ per $x>s$) e che tende a $+\infty$ per x per x che tende ad un certo x_s finito (per cui $\tau(s)\leq x_s$). Supponiamo $s\geq 1$: siccome per ogni $x\geq 1$ e $y>0$ si ha

$$f(x,y) = 10\,(1+y^2)\left(1+\frac{x-1}{x}y\right) \geq 10(1+y^2)$$

è sensato provare a prendere come z_s la soluzione dell'equazione $\dot{z} = 10(1+z^2)$ tale che $z(s)=0$.
In effetti tale soluzione si calcola esplicitamente ed è $z_s(x) = \tan(10(x-s))$. Si verifica subito che z_s è una sottosoluzione dell'equazione $\dot{y} = f(x,y)$ per $s \leq x < s+\pi/20$, z_s vale 0 in s e tende a $+\infty$ quando $x\to s+\pi/20$. Pertanto $\tau(s) \leq s+\pi/20$. Questo vale per $s\geq 1$; per $s<1$ si ha invece $\tau(s)\leq\tau(1)\leq 1+\pi/20$ usando la monotonia di $\tau(s)$.
Mettendo insieme questa stima e la minorazione $\tau(s)>s$ otteniamo inoltre $\tau(s) = s+O(1)$ per $s\to+\infty$.
e) Cerchiamo una sottosoluzione dell'equazione della forma

$$z = \frac{ax}{1-x} - b = \frac{(a+b)x-b}{1-x} \tag{5}$$

con $a,b>0$. Tale sottosoluzione (ammesso che esista) vale 0 in $x_0 := b(a+b)$, per cui $y_s(x_0) \geq 0 = z(x_0)$ per ogni $s\leq x_0$. Per tali valori di s si ha quindi $y_s \geq z$ per $x\geq x_0$, e siccome z tende a $+\infty$ per $x\to 1$, necessariamente $\tau(s)\leq 1$ (d'altra parte già sappiamo che $\tau(s)\geq 1$ per ogni s).
La funzione z in (5) è una sottosoluzione per $x<1$ se e solo se

$$a \leq 10\big[(x-1)^2 + ((a+b)x-b)^2\big]\left[1-(a+b)+\frac{b}{x}\right] \quad \text{per ogni } x<1. \tag{6}$$

Affinché valga la (6) è sufficiente che

$$a \leq 10 m_1 m_2 \tag{7}$$

dove m_1 ed m_2 sono i valori minimo assunti nell'intervallo $(0, 1]$ dalle due funzioni tra parentesi quadre in (6). Non è difficile verificare che $m_1 = a^2/(1 + (a + b)^2)$ e $m_2 = 1 - a$. Pertanto la (7) equivale a

$$a \le 10 \frac{a^2}{1 + (a + b)^2}(1 - a)$$

ovvero

$$11a^2 + b^2 + 2ab - 10a + 1 \le 0 \ . \tag{8}$$

Si vede infine che questa disequazione è soddisfatta per $a = b = 1/2$.

COMMENTI

- Prima parte, esercizio 6b). Molti hanno applicato il Teorema di Gauss-Green supponendo che la curva γ sia chiusa, mentre non lo è. Si applica invece il teorema alla curva chiusa ottenuta percorrendo γ e poi il segmento che congiunge $(0, -1)$ a $(0, 1)$.
- Seconda parte, esercizio 1a). Il gradiente di L nei punti (r, r) può essere ottenuto senza fare conti: per la simmetria di L si ha che $D_a L(r, r) = D_b L(r, r)$; d'altra parte $L(r, r) = 2\pi r$, per cui, derivando rispetto ad r, $D_a L(r, r) + D_b L(r, r) = 2\pi$. Mettendo insieme queste identità si ottiene $D_a L(r, r) = D_b L(r, r) = \pi$.
- Seconda parte, esercizio 1b). La tesi segue anche dalla disuguaglianza $L(a, b) \ge \pi(a+b)$ (che per $a = b$ risulta essere un'uguaglianza). Per dimostrare questa disuguaglianza utilizziamo la parametrizzazione $\gamma(t) := (a \cos t, b \sin t)$ dell'ellisse di semiassi a e b, ed il campo di vettori unitario $v(t) := (-\sin t, \cos t)$:

$$L(a, b) = \int_0^{2\pi} |\dot\gamma| \, dt \ge \int_0^{2\pi} \dot\gamma \cdot v \, dt = \int_0^{2\pi} a \sin^2 t + b \cos^2 t \, dt = (a + b)\pi \ .$$

- Seconda parte, esercizio 2b). Per dimostrare che $\nabla \times F$ è tangente alla superficie basta osservare che è un multiplo di $\partial\Phi/\partial u$, senza bisogno di calcolarne il prodotto scalare con la normale.
- Seconda parte, esercizio 3c). Alcuni hanno argomentato la tesi in modo incompleto: non basta dire che se $s < \bar s$ e $\tau(s) > \tau(\bar s)$ allora le soluzioni y_s ed $y_{\bar s}$ dovrebbero incontrarsi, ma bisogna anche spiegare perché. Infatti, affinché le cose stiano così è essenziale che $y_s > y_{\bar s}$ per $x \ge x_{\bar s}$, e che $y_{\bar s} \to +\infty$ per $x \to \tau(\bar s)$ (se $y_{\bar s}$ tendesse a $-\infty$, potrebbe anche succedere che $\tau(s) > \tau(\bar s)$).
- Seconda parte, esercizio 3e). Se uno non si accorge che $a = b = 1/2$ risolve la disuguaglianza (8), può comunque trovare una soluzione in questo modo: si dimostra innanzitutto che esiste in valore positivo di a tale che $11a^2 - 10a + 1$ è negativo (basta calcolare le radici). Quindi si osserva che per continuità $11a^2 + b^2 + 2ab - 10a + 1$ deve essere negativo per b sufficientemente piccolo.

Prima parte

1. Il punto $P := (1,1,0)$ soddisfa il sistema se e solo se $b = 2$. Posto $\Phi(x,y,z) := (-x^2 + ay + y^2 + z^2xy - a, x^2 - 3y + b)$, la derivata di Φ nel punto P è
$$\begin{pmatrix} -2 & a+2 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$
ed ha rango 2 se e solo se il determinante del primo minore 2×2 è diverso da 0, vale a dire se e solo se $a \neq 1$. Un vettore non nullo nel ker di tale matrice è chiaramente $(0,0,1)$. Riassumendo, le risposte sono a) $b = 2$, $a \neq 1$; b) $v = (0,0,1)$.

2. Ad esempio $f(x,y,zx) := (z-1)^2 + (x^2 + 2y^2 - 1)^2$.

3. Massimo e minimo esistono perché f è continua ed il vincolo è compatto. Per trovarli si applica il metodo dei moltiplicatori di Lagrange: la funzione ausiliaria è $F(x,y,z,\lambda) := 2x + y - \lambda(x^2 + y^2 + yz + z^2 - 3)$; i punti critici di F sono le soluzioni del sistema
$$\begin{cases} 2 - 2\lambda x = 0 \\ 1 - \lambda(2y+z) = 0 \\ \lambda(y+2z) = 0 \\ x^2 + y^2 + yz + z^2 - 3 = 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} \lambda = 1/x \\ x = 2y + z = -3z \\ y = -2z \\ 12z^2 = 3 \end{cases}$$
ovvero i punti $(3/2, 1, -1/2)$ e $(-3/2, -1, 1/2)$. Nel primo il valore della funzione è 4 (massimo) e nell'altro è -4 (minimo).

4. $\mathrm{Area}(\Gamma f) = \displaystyle\int_D \sqrt{1 + |\nabla f|^2}\, dx\, dy = \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1+\rho^2}\, 2\pi\rho\, d\rho = \left| \frac{2\pi}{3}(1+\rho^2)^{3/2} \right|_0^{\sqrt{3}} = \frac{14\pi}{3}.$

5. a) Aperto e limitato; b) chiuso e illimitato; c) chiuso e limitato.

6. Siccome la divergenza di F è uguale a 3 ovunque e A è uguale ad un ellissoide di semiassi 1, 1 e $1/\sqrt{2}$ meno una palla di raggio $1/\sqrt{2}$, si ha
$$\int_{\partial A} F \cdot n = \int_A \operatorname{div} F = 3 \operatorname{vol}(A) = 3\frac{4\pi}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = \pi\sqrt{2}\ .$$

7. Imponendo $D_xV = F_x$ si ottiene $V = \int F_x\, dx = \log(x+y) + \log(x+z) + a(y,z)$.
Imponendo $D_yV = F_y$ si ottiene $D_y a(y,z) = -1/(y+z)$ ovvero $a(y,z) = -\log(y+z) + b(z)$.
Imponendo $D_zV = F_z$ si ottiene infine $D_z b(z) = 0$ ovvero b costante. Pertanto
$$V(x,y,z) = \log(x+y) + \log(x+z) - \log(y+z) + c\ .$$

8. $8\cos^3 x = (e^{ix} + e^{-ix})^3 = \underbrace{e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}}_{\text{serie di F. complessa}} = \underbrace{2\cos(3x) + 6\cos x}_{\text{serie di F. reale}}.$

Seconda parte

1. a) Risolvendo le equazioni che definiscono C_α
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + z^2 = \alpha \end{cases} \tag{1}$$

si ottiene $z = \pm\sqrt{\alpha - x}$ e $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$. Affinché tali soluzioni esistano x deve soddisfare $x \leq \alpha$ e $-1 \leq x \leq 1$; tale sistema di disequazioni ammette almeno una soluzione se e solo se $\alpha \geq -1$. Dunque C_α non è vuoto se e solo se $\alpha \geq -1$.

b) Vogliamo vedere per quali $\alpha \geq -1$ le ipotesi del teorema della funzione implicita sono verificate da tutti i punti di C_α. Sia $\Phi(x, y, z) := (x^2 + y^2 - 1, x + z^2 - \alpha)$ la mappa che definisce C_α. Allora

$$D\Phi = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 1 & 0 & 2z \end{pmatrix} \; ;$$

questa matrice ha rango inferiore a 2 se e solo se tutti i minori 2×2 hanno determinante nullo ovvero se (x, y, z) risolve il sistema

$$\begin{cases} -2y = 0 \\ 4xz = 0 \\ 4yz = 0 \end{cases} . \tag{2}$$

Cerchiamo le soluzioni che appartengono a C_α: la prima equazione in (2) implica $y = 0$, da cui segue $x = \pm 1$ per la prima equazione in (1), e quindi la seconda equazione in (2) implica $z = 0$ (mentre la terza è automaticamente soddisfatta). A questo punto la seconda equazione in (1) diventa $\pm 1 = \alpha$. Dunque per tutti gli $a \neq \pm 1$ la matrice $D\Phi$ ha rango 2 in tutti i punti di C_α, e pertanto C_α è una curva regolare.

c) L'insieme C_0 è chiuso (controimmagine di un punto secondo una mappa continua) e limitato (la prima equazione in (1) implica $|x|, |y| \leq 1$ e quindi la seconda equazione in (1) implica $z^2 = -x \leq 1$). Pertanto C_0 è un compatto, e la funzione f, essendo continua, ammette punti di minimo e di massimo. Inoltre la funzione f è di classe C^1 mentre il vincolo che definisce C_0 soddisfa le ipotesi del teorema della funzione implicita in tutti i punti – vedi punto b) – pertanto i punti di massimo e minimo di f possono essere trovati tramite il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, ovvero sono punti critici della funzione ausiliaria

$$F(x, y, z, \lambda, \mu) := x^4 + y^4 + z^4 - \lambda(x^2 + y^2 - 1) - \mu(x + z^2 - \alpha) \; .$$

Tali punti critici sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 4x^3 - 2\lambda x - \mu = 0 \\ 4y^3 - 2\lambda y = 0 \\ 4z^3 - 2\mu z = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ x + z^2 = 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} 2(2x^2 - \lambda)x = \mu \\ (2y^2 - \lambda)y = 0 \\ (2z^2 - \mu)z = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \\ x + z^2 = 0 \end{cases} \tag{3}$$

Tenendo presenti la seconda e la terza equazione, risolviamo il sistema (3) considerando tre casi distinti: (A) $y = 0$, (B) $z = 0$, (C) $y \neq 0$ e $z \neq 0$.

(A) Se $y = 0$, la quarta equazione in (3) implica $x = \pm 1$ e la quinta implica $z^2 = -x = \mp 1$. Le soluzioni ammissibili sono quindi $(-1, 0, \pm 1)$, e per queste $f = 2$.

(B) Se $z = 0$, la quinta equazione in (3) implica $x = 0$ e la quarta implica $y = \pm 1$. Le soluzioni corrispondenti sono $(0, \pm 1, 0)$ e per queste $f = 1$.

(C) se $y \neq 0$ e $z \neq 0$, la seconda e la terza equazione in (3) diventano $2y^2 - \lambda = 0$ e $sz^2 - \mu = 0$, per cui il sistema (3) si riduce a

$$\begin{cases} 2(2x^2 - \lambda)x = \mu \\ \lambda = 2y^2 = 2(1 - x^2) \\ \mu = 2z^2 = -2x \\ y^2 = 1 - x^2 \\ z^2 = -x \end{cases} .$$

Sostituendo le ultime quattro equazioni nella prima si ottiene $4x^3 - x = 0$, ovvero $x = 0$, $x = \pm 1/2$. Le corrispondenti soluzioni del sistema sono $(0, \pm 1, 0)$, già considerate al punto (B), e $(-1/2, \pm\sqrt{3}/2, \pm 1/\sqrt{2})$, dove $f = 7/8$.
In conclusione ci sono quattro punti di minimo $(-1/2, \pm\sqrt{3}/2, \pm 1/\sqrt{2})$ in cui $f = 7/8$, e due punti di massimo $(-1, 0, \pm 1)$ in cui $f = 2$.

2. a) Imponendo $D_x V = F_x$ si ottiene

$$V = \int F_x \, dx = \frac{y^2}{2(x^2 + y^2)} + a \ ,$$

dove a è una qualunque funzione di y; imponendo $D_x V = F_x$ si ottiene quindi $a'(y) = 0$, ovvero a costante.
b) Facendo i conti si ottiene

$$\begin{aligned} D_y F_x &= x^{n-1} y^{n-1} (x^2 + y^2)^{-m-1} (-nx^2 + (2m - n) y^2) \\ D_x F_y &= x^{n-1} y^{n-1} (x^2 + y^2)^{-m-1} (-(2m - n) x^2 + n y^2) \end{aligned}$$

e quindi la condizione delle derivate incrociate è soddisfatta se e solo se $n = m$.
c) Fissati $n = m$ positivi, l'integrale di F su γ è

$$\begin{aligned} I_m &:= \int_0^{2\pi} (-\cos^{m-1} t \, \sin^m t, -\cos^m t \, \sin^{m-1} t) \cdot (-\sin t, \cos t) \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^{m-1} t \, \sin^{m-1} t \, dt \\ &= \frac{1}{2^{m-1}} \int_0^{2\pi} \sin^{m-1} (2t) \, dt \\ &= \frac{1}{2^{m-2}} \int_0^{\pi} \sin^{m-1} (2t) \, dt = \frac{1}{2^{m-1}} \int_0^{2\pi} \sin^{m-1} u \, du \ . \end{aligned} \tag{4}$$

Se m è pari, l'integrale di $\sin^{m-1} u$ tra 0 e π è l'opposto dell'integrale tra π e 2π, e quindi

$$I_m = 0 \ .$$

Se invece m è dispari, $\sin^{m-1} u$ è una funzione positiva, e quindi $I_m > 0$ (ed in particolare F non può avere potenziale). Per la precisione, ponendo $m - 1 = 2a$ otteniamo

$$\begin{aligned} I_m = \frac{1}{2^{2a}} \int_0^{2\pi} \sin^{2a} u \, du &= \frac{1}{2^{2a}} \int_0^{2\pi} \left(\frac{e^{iu} - e^{-iu}}{2i} \right)^{2a} du \\ &= \frac{(-1)^a}{2^{4a}} \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{2a} \binom{2a}{k} (e^{iu})^{2a-k} (-e^{-iu})^k \, du \\ &= \frac{(-1)^a}{2^{4a}} \sum_{k=0}^{2a} \binom{2a}{k} (-1)^k \int_0^{2\pi} e^{i2(a-k)u} du \end{aligned}$$

e siccome l'ultimo integrale è 0 tranne che per $k = a$, allorché l'integrando è 1,

$$I_m = \frac{\pi}{2^{4a-1}} \binom{2a}{a} = \frac{\pi}{2^{2m-3}} \binom{m-1}{(m-1)/2} \ . \tag{5}$$

d) Per via del punto b) e del punto c) è chiaro che F ammette potenziale al più per $m = n$ pari. A questo punto supponiamo che esista un potenziale V e cerchiamo di calcolarlo. Una volta ottenuta la formula, verificheremo direttamente che $\nabla V = F$, cioè che V è effettivamente un potenziale di F.
Osserviamo innanzitutto che $F(x, y) \perp (x, y)$ ovunque, e quindi, preso $t > 0$, l'integrale di F sul segmento che congiunge (x, y) e (tx, ty) è 0, e quindi $V(x, y) = V(tx, ty)$. Dunque, presi $\rho > 0$ e $\theta \in [0, 2\pi)$ tali che $(x, y) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$ si ha

$$V(x, y) = V(\cos\theta, \sin\theta)\ .$$

Posto $V(1, 0) = 0$, il valore di $V(\cos\theta, \sin\theta)$ è allora uguale all'integrale di F lungo un qualunque cammino che va da $(1, 0)$ a $(\cos\theta, \sin\theta)$, ad esempio $\gamma(t) := (\cos t, \sin t)$ con $0 \le t \le \theta$. Procediamo ora come al punto c):

$$\begin{aligned} V(x, y) = V(\cos\theta, \sin\theta) &= \frac{1}{2^{m-1}} \int_0^{2\theta} \sin^{m-1} u\, du \\ &= \frac{1}{2^{m-1}} \int_0^{2\theta} \left(\frac{e^{iu} - e^{-iu}}{2i}\right)^{m-1} du \\ &= \frac{i(-1)^{m/2}}{2^{2m-2}} \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m-1}{k} \int_0^{2\theta} e^{i(m-1-2k)u}\, du \\ &= \frac{(-1)^{m/2}}{2^{2m-2}} \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m-1}{k} \frac{e^{i(m-1-2k)2\theta} - 1}{m-1-2k} \\ &= \frac{(-1)^{m/2}}{2^{2m-2}} \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m-1}{k} \frac{(e^{i\theta})^{2(m-1-2k)}}{m-1-2k}\ , \end{aligned} \tag{6}$$

e siccome $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta = \dfrac{x + iy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

$$V(x, y) = \frac{(-1)^{m/2}}{2^{2m-2}} \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m-1}{k} \frac{(x + iy)^{2(m-1-2k)}}{(m-1-2k)(x^2 + y^2)^{m-1-2k}}\ .$$

La funzione V così ottenuta è ben definita e di classe C^∞ su tutto il piano meno l'origine. Per verificare che V è effettivamente un potenziale di F si può calcolarne direttamente il gradiente di V. Alternativamente, si può osservare che sul dominio semplicemente connesso Ω ottenuto rimuovendo dal piano la semiretta delle x positive il potenziale di F deve esistere perché F soddisfa la condizione delle derivate incrociate, e a questo punto deve coincidere a meno di costante con la funzione V costruita sopra. Ma allora $F = \nabla V$ su Ω e lo stesso vale per continuità su tutto il piano meno l'origine.

3. b) Si verifica con un po' di pazienza che per qualunque campo di vettori V di classe C^2 si ha $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\, V) = \nabla \cdot (\nabla \times V) = 0$.
c) Cerchiamo un potenziale V della forma $V = (0, V_y, V_z)$. La condizione $\nabla \times V = F$ equivale quindi al seguente sistema:

$$\begin{cases} D_y V_z - D_z V_y = F_x \\ D_x V_z = -F_y \\ D_x V_y = F_z \end{cases}\ . \tag{7}$$

Le ultime due equazioni in (7) sono soddisfatte a patto di porre

$$
\begin{aligned}
V_z(x,y,z) &:= -\int_0^x F_y(t,y,z)\,dt + a(y,z)\\
V_y(x,y,z) &:= \int_0^x F_z(t,y,z)\,dt + b(y,z)
\end{aligned}
$$

con a e b sono funzioni arbitrarie di classe C^1 nelle variabili y e z. A questo punto la prima equazione in (4) diventa

$$F_x(x,y,z) = -\int_0^x D_yF_y(t,y,z) + D_zF_z(t,y,z)\,dt + D_ya(y,z) - D_zb(y,z)$$

e ricordando che $D_yF_y + D_zF_z = -D_xF_x$ (perché F ha divergenza nulla)

$$
\begin{aligned}
F_x(x,y,z) &= \int_0^x D_xF_x(t,y,z)\,dt + D_ya(y,z) - D_zb(y,z)\\
&= F_x(x,y,z) - F_x(0,y,z) + D_ya(y,z) - D_zb(y,z)
\end{aligned}
$$

e quindi a e b devono soddisfare l'equazione

$$F_x(0,y,z) = D_ya(y,z) - D_zb(y,z)\ .$$

Risolviamo quest'equazione ponendo

$$b(y,z) := 0\ ,\quad a(y,z) := \int_0^y F_x(0,t,z)\,dt\ .$$

a) La costruzione usata per risolvere il punto c) dà

$$
\begin{aligned}
V_x &:= 0\\
V_y &:= \int_0^x 2 - 2tz - 2yz\,dt = 2x - x^2z - 2xyz\\
V_z &:= -\int_0^x y^2 - 2t^2\,dt + \int_0^y 4t^2 - 3z^2\,dt = -xy^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{3}y^3 - 3yz^2
\end{aligned}
$$

b) Il bordo della superficie S coincide con la circonferenza di centro l'origine e raggio 1 sul piano xy, orientata in senso antiorario, che parametrizziamo come $\gamma(t) := (\cos t, \sin t, 0)$ con $0 \le t \le 2\pi$. Usando il Teorema di Stokes si ottiene

$$
\begin{aligned}
\int_S F\cdot\eta &= \int_S (\nabla\times V)\cdot\eta\\
&= \int_{\partial S} V\cdot\tau\\
&= \int_0^{2\pi} V(\cos t,\sin t,0)\cdot(-\sin t,\cos t,0)\,dt\\
&= \int_0^{2\pi} (0, 2\cos t,\dots)\cdot(-\sin t,\cos t,0)\,dt = \int_0^{2\pi} 2\cos^2 t\,dt = 2\pi\ .
\end{aligned}
$$

Commenti

- Seconda parte, esercizio 1c). Molti hanno omesso di dimostrare l'esistenza di minimo e massimo, requisito necessario per applicare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

- Seconda parte, esercizio 1c). Un'altra soluzione consiste nell'osservare che per i punti di C_0 si ha
$$f(x,y,z) = x^4 + y^4 + z^4 = x^4 + (1-x^2)^2 + (-x)^2 = 2x^4 - x^2 + 1 \ .$$
A questo punto basta trovare massimo e minimo per la funzione $g(x) := 2x^4 - x^2 + 1$ sull'insieme I dei punti x per cui esistono y, z tali che $(x,y,z) \in C_0$. Non è difficile vedere che $I = [-1, 0]$ (si veda la soluzione della parte a) dell'esercizio), e che l'unico punto critico di g interno ad I è $x = -1/2$. Confrontando il valore di g in questo punto con quello negli estremi di I si ottiene che il valore massimo viene raggiunto per $x = -1$ e vale 2, mentre il valore minimo viene raggiunto in $x = -1/2$ e vale $7/8$. Per concludere basta trovare i corrispondenti valori di y e z.

- Seconda parte, esercizio 2. Dato un campo di vettori F di classe C^1 definito sul piano meno l'origine e che soddisfa la condizione delle derivate incrociate, allora si può dimostrare che F ammette potenziale se e solo se l'integrale di F lungo la circonferenza di centro l'origine e raggio 1 è nullo (in effetti questa circonferenza non ha nulla di speciale e può essere sostituita da qualunque altra circonferenza o curva chiusa che racchiude l'origine). Mentre è ovvio che questa condizione è necessaria per l'esistenza di un potenziale, non è altrettanto ovvio che sia anche sufficiente. Utilizzando questo risultato e quanto fatto nei punti b) e c) dell'esercizio 3 si vede subito che il campo F ammette potenziale se e solo se $n = m$ è pari, senza bisogno di costruirlo esplicitamente.

- Seconda parte, esercizio 2c). La (4) permette di ottenere una formula iterativa per il valore di I_m:
$$\begin{aligned} I_m &= \frac{1}{2^{m-1}} \int_0^{2\pi} \sin^{m-1} u \, du \\ &= \frac{1}{2^{m-1}} \int_0^{2\pi} \sin^{m-3} u \, (1 - \cos^2 u) \, du \\ &= \frac{1}{4} I_{m-2} - \frac{1}{2^{m-1}} \int_0^{2\pi} \sin^{m-3} u \, \cos^2 u \, du \\ &= \frac{1}{4} I_{m-2} - \frac{1}{2^{m-1}} \left| \frac{\sin^{m-2} u}{m-2} \cos u \right|_0^{2\pi} + \frac{1}{2^{m-1}} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^{m-2} u}{m-2} (-\sin u) \, du \\ &= \frac{1}{4} I_{m-2} - \frac{1}{m-2} I_m \end{aligned}$$
ovvero $I_m = \dfrac{m-2}{4(m-1)} I_{m-2}$. Siccome $I_1 = 2\pi$, per ogni $m > 1$ dispari si ottiene infine
$$I_m = \frac{(m-2)!!}{(m-1)!!} \frac{\pi}{2^{m-2}}$$
(espressione che coincide con quella data in (5)).

- Seconda parte, esercizio 2d). Indichiamo con V_m il potenziale di F per $n = m$. Procedendo come sopra è possibile partire dalla formula (6) ed ottenere una formula ricorsiva per V_m:
$$V_m(x,y) = \frac{m-2}{4(m-1)} V_{m-2}(x,y) - \frac{x^{m-2} y^{m-2} (x^2 - y^2)}{2(m-1)(x^2+y^2)^{m-1}}$$

PRIMA PARTE

1. Posto $y := (1-x^2)^{1/2}$ si ha $\dot y = -x(1-x^2)^{-1/2}$. Da questo segue che $\dot y^2 + 1 = (1-x^2)^{-1}$ e
$$\ddot y = -(1-x^2)^{-3/2} = -(1-x^2)^{1/2}(1-x^2)^{-2} = -y(1+\dot y^2)^2 \ .$$

2. La curva γ delimita un insieme A di cui percorre la frontiera in senso *antiorario*; per una nota formula si ha allora che
$$\begin{aligned}\mathrm{Area}(A) &= \int_\gamma \frac12(-y,x)\cdot\tau \\ &= \frac12\int_0^\pi (-\sin^2 t, \sin t\,\cos t)\cdot(\sin^2 t - \cos^2 t, 2\sin t\,\cos t)\,dt \\ &= \frac12\int_0^\pi \sin^2 t\,dt = \frac{\pi}{4}\ .\end{aligned}$$

3. a) Una matrice 3×3 è nilpotente se e solo se il polinomio caratteristico è λ^3. Calcolando il polinomio caratteristico di A si vede subito che questa condizione è soddisfatta se e solo se $a=-1$.
b) Per $a=-1$ si ha $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -8 & -12 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ e quindi $e^A = I + A + \dfrac{A^2}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 13 & 18 \\ 0 & -8 & -11\end{pmatrix}$.

4. a), b) L'insieme S è il luogo di zeri della mappa $\Phi(x,y,z,t) := (xy - zt, x^2-y^2-z^2+t^2)$. Siccome
$$M := D\Phi(1,-1,-1,1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2\end{pmatrix}$$
è una matrice di rango 2, lo spazio tangente ad S in $P := (1,-1,-1,1)$ coincide con il $\ker(M)$ ed ha quindi dimensione 2. Due vettori linearmente indipendenti in $\ker(M)$ sono $(1,0,-1,0)$ e $(0,1,0,01)$.

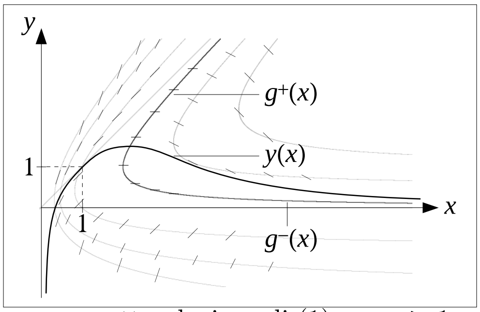
5. La superficie S è il grafico della funzione $z = \sqrt{4-x^2-y^2}$ ristretta all'insieme D dei punti (x,y) tali che $x^2+y^2\le 3$. Pertanto
$$\begin{aligned}\mathrm{Area}(S) &= \int_D \sqrt{1+|\nabla f|^2}\,dx\,dy \\ &= \int_D \frac{2\,dx\,dy}{\sqrt{4-x^2-y^2}} = \int_0^{\sqrt3}\frac{4\pi\rho\,d\rho}{\sqrt{4-\rho^2}} = \int_0^3 \frac{2\pi\,dt}{\sqrt{4-t}} = \Big| -4\pi\sqrt{4-t}\Big|_0^3 = 4\pi\end{aligned}$$

6. $\mathrm{rot}\,F = (0,0,0)$.

7. La condizione delle derivate incrociate è soddisfatta solo per $a=2$. In tal caso si ottiene $V(x,y,z) + xy^4 + 2xz^3 + z^2y^3 = c$ con $c\in\mathbb{R}$.

8. per $n=0$ si ha $c_0 = \dfrac{\pi}{4}$, mentre per $n\neq 0$
$$\begin{aligned}c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi xe^{-inx} &= \left| x\frac{e^{-inx}}{-2\pi ni}\right|_0^\pi - \int_0^\pi \frac{e^{-inx}}{-2\pi ni}\,dx \\ &= \frac{\pi(-1)^n}{-2\pi ni} - \left|\frac{e^{-inx}}{2\pi(-ni)^2}\right|_0^\pi = \begin{cases} \dfrac{i}{2n} & \text{per } n \text{ pari} \\ -\dfrac{i}{2n} - \dfrac{1}{\pi n^2} & \text{per } n \text{ dispari}\end{cases}\ .\end{aligned}$$

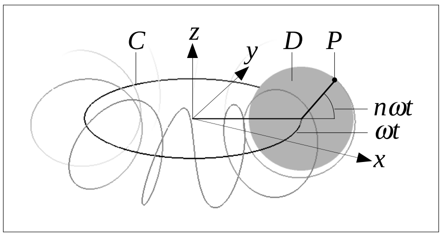
Seconda parte



1. a) Per cominciare s tracciano alcune curve di livello della funzione che definisce l'equazione (1), cioè $f(x, y) := x^{-1}(y^2 + 1) - y$. In particolare la curva corrispondente la livello 0, è descritta dall'equazione $y^2 + 1 - xy = 0$. A questo punto è facile intuire l'andamento della soluzione y (si veda la figura accanto).
   b), c) Si tratta di verifiche immediate a partire dalla definizione di sopra- e sottosoluzione.
   d) Siccome le funzioni x e 0 sono rispettivamente sopra- e sottosoluzione di (1) per $x \geq 1$, e siccome $1 = y(1) > 0$, il teorema del confronto implica che $x \geq y(x) > 0$ per ogni $x \geq 0$. In particolare questo esclude che y possa avere asintoti verticali per $x > 1$, e dunque l'estremo superiore del dominio di y deve essere $+\infty$.
   e) Supponiamo per il momento che y ammetta limite finito L per $x \to +\infty$; passando al limite per $x \to +\infty$ nell'equazione (1) si ottiene che $\dot{y}$ converge a $-L$. Ma poiché y ha limite finito, $\dot{y}$ può convergere al più a 0, e dunque $L = 0$. Resta da far vedere che y ammette limite finito a $+\infty$.
   Dimostreremo in effetti che la soluzione y è definitivamente compresa tra le funzioni
$$g^{\pm}(x) := \frac{x \pm \sqrt{x^2 - 4}}{2}$$
   e siccome $f(x, y) < 0$ se e solo se $g^-(x) < y < g^+(x)$ (l'unione dei grafici di g^+ e g^- è la curva di equazione $y^2 + 1 - xy = 0$, vale a dire la curva di livello 0 di f – si veda la figura sopra) ne segue che y è definitivamente decrescente, ed essendo positiva ammette quindi limite $L \in [0, \infty)$ per $x \to +\infty$.
   Siccome g^+ e g^- sono rispettivamente sopra- e sottosoluzione della (1) ci basta dimostrare che esiste $\bar{x} > 2$ tale che $g^-(\bar{x}) < y(\bar{x}) < g^+(\bar{x})$, dopodiché $g^-(x) < y(x) < g^+(x)$ per ogni $x \geq \bar{x}$ per via del teorema del confronto. Supponiamo per assurdo che non esista tale $\bar{x}$; si hanno allora due possibilità: $g^+(x) \leq y(x) \leq x$ per $x \geq 2$ oppure $0 \leq y(x) \leq g^+(x)$ per $x \geq 2$. Nel primo caso si ha che $0 \leq \dot{y}(x) \leq 1/x$ e quindi $\dot{y}$ tende a 0 per $x \to +\infty$, in contraddizione con il fatto che $y(x) \sim x$ per $x \to +\infty$. Nel secondo caso si ha che $\dot{y}(x) > 0$ e quindi y è sempre crescente in contraddizione con il fatto che si tratta di una funzione strettamente positiva che tende a 0 per $x \to +\infty$.
   f) Dimostriamo innanzitutto che esiste $\bar{x} < 1$ tale che $y(\bar{x}) = 0$. Infatti, se così non fosse si avrebbe che $0 < y(x) \leq x$ per ogni $x \leq 1$, e quindi l'estremo inferiore a del dominio di y dovrebbe essere 0 e
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{y}{x} = \lim_{x \to 0^+} \dot{y} = \lim_{x \to 0^+} \frac{y^2 + 1}{x} - y = +\infty \ ,$$
   in contraddizione col fatto che $y \leq x$.
   Osserviamo ora che per $y \leq 0$ si ha $f(x, y) \geq x^{-1}(y^2 + 1)$ e quindi tutte le soluzioni dell'equazione
$$\dot{z} = \frac{z^2 + 1}{x} \tag{2}$$
   sono sottosoluzioni dell'equazione (1) nella parte del loro dominio dove sono negative o nulle. In particolare preso $\bar{x}$ tale che $y(\bar{x})$ e detta z la soluzione di (2) che soddisfa la condizione iniziale $z(\bar{x}) = 0$, si ha che $y(x) \leq z(x)$ per ogni $x \leq \bar{x}$. Per concludere ci basta quindi

dimostrare z tende a $-\infty$ per x che tende da destra ad un certo $\bar{a}$ strettamente positivo (da cui seguirebbe che $a \geq \bar{a} > 0$). In realtà questo è vero per tutte le soluzioni di (2) il cui dominio è contenuto nella semiretta $x > 0$, e lo si verifica calcolando esplicitamente le soluzioni (la (2) è un'equazione a variabili separabili).

2. a) Sia P_c il centro di D. Supponiamo per semplicità che all'istante $t = 0$, P_c sia situato sul semiasse delle x positive, cioè nel punto $(2, 0, 0)$, e che P coincida con il punto di D più lontano dall'origine, cioè $(3, 0, 0)$. Detta ω la velocità angolare di P_c rispetto all'origine si ha che la velocità angolare di P rispetto al centro deve essere $n\omega$. Pertanto la traiettoria di P_c è descritta dalla legge oraria



$$\gamma_c(t) := \big(2\cos(\omega t), 2\sin(\omega t), 0\big)$$

(cfr. figura) mentre la traiettoria di P è descritta dalla legge oraria

$$\gamma(t) := \big((2 + \cos(n\omega t))\cos(\omega t), (2 + \cos(n\omega t))\sin(\omega t), \sin(n\omega t)\big) \; .$$

b) La curva γ si chiude nel tempo $2\pi/\omega$ e quindi, fatti i dovuti conti, la sua lunghezza è

$$\begin{aligned} L = \int_0^{2\pi/\omega} |\dot\gamma(t)|\, dt &= \int_0^{2\pi/\omega} \omega\, \sqrt{n^2 + (2 + \cos(n\omega t))^2}\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{n^2 + (2 + \cos(ns))^2}\, ds \; . \end{aligned} \tag{3}$$

c), d) Lo sviluppo di Taylor all'ordine 2 di $(1 + x)^{1/2}$ nel punto 0 è

$$(1 + x)^{1/2} = 1 + \frac{x}{2} + R(x)\, x^2 \tag{4}$$

dove R è una funzione limitata in un intorno di 0 (cioè esistono $C, \delta > 0$ tali che $|R(x)| \leq C$ per $|x| \leq \delta$). Consideriamo ora l'integrando in (3): raccogliendo n ed applicando la formula (4) otteniamo

$$\sqrt{n^2 + (2 + \cos(ns))^2} = n\left[1 + \frac{(2 + \cos(nt))^2}{2n^2} + \frac{R(n, t)}{n^4}\right] \tag{5}$$

dove le funzioni $R_n(t)$ sono uniformemente limitate ($|R_n(t)| \leq 3^4 C$ per $n \geq 3/\sqrt{\delta}$). Integrando la (5) otteniamo infine

$$L = \int_0^{2\pi} n + \frac{(2 + \cos(nt))^2}{2n} + \frac{R(n, t)}{n^3}\, ds = 2\pi n + \frac{9\pi}{2n} + O\Big(\frac{1}{n^3}\Big) \; .$$

3. a) S è il luogo di zeri della funzione $\Phi(x, y, z) := x^2 + y^2 - (z^2 - 1)^2 - 2$. Siccome $D\Phi = (2x, 2y, -4(z^2 - 1)z$ si annulla solo nei punti $(0, 0, 0)$ e $(0, 0, \pm 1)$, e questi non appartengono a S, le ipotesi del teorema della funzione implicita sono soddisfatte in ogni punto di S.
b) Il quadrato della distanza di un punto (x, y, z) dalla retta parallela all'asse z di equazioni $x = 1$, $y = 0$ è $f(x, y, z) = (x - 1)^2 + y^2$. L'estremo superiore dei valori assunti da f su S è $+\infty$ (per la successione di punti $(\sqrt{2}, n^2 - 1, n)$ in S il valore di f diverge a $+\infty$) e quindi f non ha punti di massimo in S.

D'altra parte, ogni una successione di punti $(x_n, y_n, z_n) \in S$ per cui i valori $f(x_n, y_n, z_n)$ sono limitati deve essere limitata (le successioni x_n e y_n sono limitate e per via dell'equazione che definisce S lo è anche z_n). Ne consegue che una successione minimizzante per f su S è limitata e quindi ammette almeno un punto di accumulazione, che deve appartenere ad S perché quest'ultimo è chiuso. Tale punto di accumulazione è chiaramente un punto di minimo di f su S.
Una volta dimostrato che esistono, i punti di minimo possono essere trovati usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Si deve dunque risolvere il sistema

$$\begin{cases} (1-\lambda)x = 1 \\ (1-\lambda)y = 0 \\ \lambda z(z^2-1) = 0 \\ x^2+y^2 = (z^2-1)^2+2 \end{cases} .$$

Se $\lambda = 0$ le prime due equazioni implicano $x = 1$ e $y = 0$, ma nessun punto della forma $(1, 0, z)$ appartiene ad S. Se invece $\lambda \neq 0$, la terza equazione implica $z = 0, \pm 1$, la prima implica $1 - \lambda \neq 0$ e quindi la seconda implica $y = 0$. A questo punto l'ultima equazione ci dà $x = \pm\sqrt{3}$ se $z = 0$ e $x = \pm\sqrt{2}$ se $z = \pm 1$. I punti critici trovati sono sei: $(\sqrt{3}, 0, 0)$, $(-\sqrt{3}, 0, 0)$, $(\sqrt{2}, 0, \pm 1)$, $(-\sqrt{2}, 0, \pm 1)$; calcolando i corrispondenti valori di f si ottiene che quelli di minimo sono $(\sqrt{2}, 0, \pm 1)$.

Commenti

- Prima parte, esercizio 6. Senza fare tanti conti, si vede subito che F è il gradiente della funzione $V(x, y, z) := \frac{1}{2}\log(x^2 + y^2 + z^2)$ e pertanto deve soddisfare la condizione delle derivate incrociate, che equivale ad avere rotore nullo.
- Seconda parte, esercizio 1e). Molti hanno dimostrato correttamente che se y ammette limite finito per $x \to +\infty$ allora tale limite deve essere 0, omettendo però di dimostrare l'esistenza del limite.
- Seconda parte, esercizio 2. Nello svolgimento abbiamo supposto che all'istante $t = 0$ il centro P_c del disco ed il punto P avessero delle posizioni ben precise. In generale, la legge oraria di P è

  $$\gamma(t) := \big((2+\cos(n\omega t+\phi_1))\cos(\omega t+\phi_2), (2+\cos(n\omega t+\phi_1))\sin(\omega t+\phi_2), \sin(n\omega t+\phi_1)\big)$$

  dove gli angoli ϕ_1 e ϕ_2 sono determinati dalla posizione al tempo $t = 0$ di P_c e P. Come ci si aspetta, la lunghezza L della traiettoria di P non dipende da ϕ_1 e ϕ_2.
- Seconda parte, esercizio 2. Misteriosamente, nessuno ha svolto i punti c) e d).
- Seconda parte, esercizio 3b). Praticamente tutti hanno dato per scontata l'esistenza di punti di minimo di f (e alcuni anche dei punti di massimo) che invece scontata non è: ad esempio, per la superficie di equazione $x^2 + y^2 = 1 + e^z$ la funzione f non ammette né massimo né minimo, mentre per quella di equazione $x^2 + y^2 = 1 + (1 + z^2)^{-1}$ ammette massimo ma non minimo.
- Seconda parte, esercizio 3b). Un'impostazione alternativa è la seguente: per ogni z, l'intersezione di S con il piano parallelo al piano xy e passante per $(0, 0, z)$ è la circonferenza di centro l'origine e raggio $r(z) = \sqrt{2 + (z^2 - 1)^2}$. Trovare il punto di minima distanza di tale circonferenza dalla retta $x = 1$, $y = 0$ è lo stesso che trovare il punto di minima distanza della circonferenza $x^2 + y^2 = r^2(z)$ sul piano xy dal punto $(1, 0)$: si tratta chiaramente del punto $(r(z), 0)$, ed il valore della distanza in questione è $r(z) - 1$. A questo

punto non si deve far altro che trovare i valori di z che rendono minimo $r(z) - 1$, o equivalentemente $(z^2 - 1)^2$. Questi sono $z = \pm 1$, a cui corrisponde il raggio $r(\pm 1) = \sqrt{2}$; i punti di minimo cercati sono dunque $(\sqrt{2}, 0, \pm 1)$.

Scritto del II appello, 21 luglio 2006

Prima parte

1. $\nabla \cdot F = 2yz + 6xy + 6xz$.

2. D è limitato se e solo se $a \leq 0$ (per $a > 0$ contiene la successione illimitata $(0, \sqrt{a}\, n)$).

3. $\text{Area}(S) = \displaystyle\int \left| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right| du\, dv = \int_0^1 \int_0^1 2\sqrt{2}(u^2 + v^2)\, du\, dv = \frac{4\sqrt{2}}{3}$.

4. Tutte le soluzioni dell'equazione $\dot{y} = y^2$ sono sottosoluzioni di $\dot{y} = y^2 + x^2$. Tra queste, la funzione $y := -1/x$, definita su $I := (-\infty, 0)$, soddisfa quanto richiesto.

5. S è il luogo di zeri della mappa $\phi(x, y, z) := (x^2 + 2y^2 - z^4 - 1, x^2 + y^2 + z^2 - a)$. I determinanti dei minori 2×2 della matrice $D\phi(x, y, z)$ sono $-4xy$, $4xz(1 + 2z^2)$ e $4yz(1 + 2z^2)$. Pertanto tale matrice ha rango inferiore a 2 se e solo se $xy = xz = yz$.
   Si hanno dunque tre possibilità: a) $x = y = 0$, z qualunque: tali punti non appartengono a S per alcun valore di a; b) $x = z = 0$, y qualunque: tali punti appartengono a S se e solo se $2y^2 = 1$ e $y^2 = a$, ovvero se e solo se $a = 1/2$; b) $y = z = 0$, x qualunque: tali punti appartengono a S se e solo se $x^2 = 1$ e $x^2 = a$, ovvero se e solo se $a = 1$, Concludendo, la matrice $D\phi$ ha rango massimo in tutti i punti di S per tutti i valori di a eccetto $1/2$ e 1.

6. $$\begin{cases} 2x(z^2 + t^2) - 2\lambda x + \mu yz = 0 \\ 2y(z^2 + t^2) - 2\lambda y + \mu xz = 0 \\ 2z(x^2 + y^2) + 2\lambda z + \mu yz = 0 \\ 2t(x^2 + y^2) - \mu e^t = 0 \\ x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0 \\ e^t - xyz = 0 \end{cases}.$$

7. Scriviamo la funzione incognita come $u(t, x) = a_0(t) + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\, \cos(nx) + b_n(t)\, \sin(nx)$.
   L'equazione $u_t = u_{xx} + u$ si riduce allora a $\dot{a}_n = (1 - n^2)a_n$ e $\dot{b}_n = (1 - n^2)b_n$ per ogni n, mentre la condizione iniziale si riduce a $a_1(0) = b_1(0) = 1$ e $a_n(0) = b_n(0) = 0$ per $n \neq 1$. Dunque $a_1(t) = b_1(t) = 1$ per ogni t mentre $a_n(t) = b_n(t) = 0$ per ogni t e per ogni $n \neq 1$. La soluzione cercata è $u(t, x) = \sin x + \cos x$.

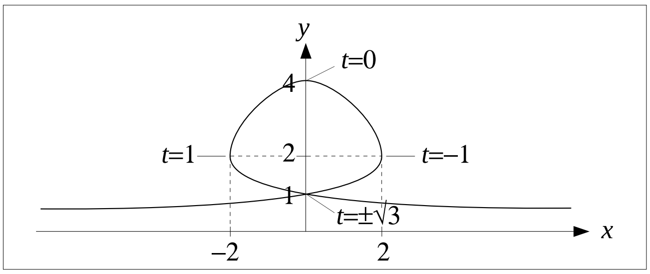
Seconda parte

1. a) Si verifica facilmente che F soddisfa la condizione delle derivate incrociate su tutto D. Siccome il semipiano $y > 1$ è contenuto in D ed è convesso, e quindi anche semplicemente connesso, F ammette un potenziale V su detto semipiano. Integrando l'equazione $D_x V = F_x$ rispetto alla variabile x otteniamo allora
   $$V(x, y) = \int F_x(x, y)\, dx = \int \frac{2x(y - 1)}{(x^2 - 1)^2 + (y - 1)^2}\, dx = \arctan\left(\frac{x^2 - 1}{y - 1}\right) + a \qquad (1)$$
   dove a è una qualunque funzione di y; l'equazione $D_y V = F_y$ diventa allora $\dot{a} = 0$, da cui si deduce che a è costante.
   b) Dobbiamo esibire una curva chiusa $\tilde{\gamma}$ in D tale che F ha integrale non nullo su $\tilde{\gamma}$. Siccome F non è definito in $(\pm 1, 1)$, scegliamo $\tilde{\gamma}$ che gira attorno a uno di questi punti (in modo che $\tilde{\gamma}$ non sia omotopa ad una costante in D) e tale che sia facile calcolare l'integrale di F. Ad esempio
   $$\begin{cases} x := \sqrt{1 + \cos t} \\ y := 1 + \sin t \end{cases} \quad \text{con } t \in [0, 2\pi]$$

(il vantaggio di tale scelta è che il denominatore $(x^2-1)^2+(y-1)^2$ che appare nell'espressione di F è uguale a 1 per ogni t). Allora

$$\begin{aligned}\int_{\tilde\gamma} F\cdot\tau_{\tilde\gamma} &= \int_0^{2\pi} (2x(y-1), 1-x^2)\cdot(\dot x,\dot y)\,dt\\ &= \int_0^{2\pi} (y-1)(x^2)' + (1-x^2)\dot y\,dt = \int_0^{2\pi} -\sin^2 t - \cos^2 t\,dt = -2\pi\ .\end{aligned}$$

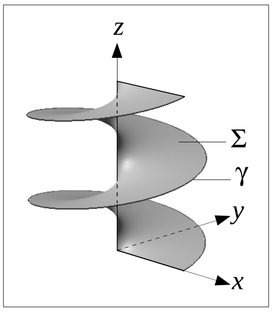
c) Utilizzando le informazioni sul grafico di $x = t(t^2-3)$ e $y = 4/(1+t^2)$ si riesce facilmente a tracciare la curva γ:



Tale curva è contenuta nell'aperto A dato da $\mathbb{R}^2$ meno le semirette chiuse $[1,\infty)\times\{1\}$ e $(-\infty,-1]\times\{1\}$. Siccome A è stellato rispetto al punto $(0,1)$, allora è anche semplicemente connesso e quindi il campo di vettori F ammette un potenziale V su A. Procedendo come al punto a) si dimostra che nel semipiano $y < -1$ tale potenziale è dato dalla formula (1). Pertanto

$$\int_\gamma F\cdot\tau_\gamma = \lim_{t\to+\infty} V(\gamma(t)) - \lim_{t\to-\infty} V(\gamma(t)) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0\ .$$

2. a) La curva γ è (o dovrebbe essere) ben nota. Una volta disegnata questa, è facile disegnare Σ (vedi figura accanto).



b) La proiezione del punto $(\cos t, \sin t, at)$ sull'asse delle z è $(0,0,at)$, ed il segmento che congiunge questi due punti è parametrizzato da $(u\cos t, u\sin t, at)$ con $u\in[0,1]$. Pertanto una parametrizzazione di Σ è data da

$$\Phi(u,t) := (u\cos t, u\sin t, at)$$

con $(u,t)\in[0,1]\times[0,4\pi]$.
Facendo i conti si ottiene

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u}\times\frac{\partial\Phi}{\partial t} = (a\sin t, -a\cos t, u)$$

e quindi

$$\begin{aligned}\mathrm{Area}(S) &= \int\left|\frac{\partial\Phi}{\partial u}\times\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right| dt\,du = \int_0^{4\pi}\int_0^1 \sqrt{a^2+u^2}\,du\,dt\\ &= 4\pi\int_0^1\sqrt{a^2+u^2}\,du = 2\pi\left[\sqrt{1+a^2} + a^2\log\left(\frac{1+\sqrt{1+a^2}}{a}\right)\right]\ .\end{aligned}$$

c) Sia $\tilde\gamma$ la spezzata che congiunge nell'ordine i punti $(1,0,0)$, $(0,0,0)$, $(0,0,4\pi a)$, $(1,0,4\pi a)$. Allora, assegnando a Σ l'orientazione indotta dalla parametrizzazione Φ, il bordo di Σ è dato dalla curva γ unita alla curva $\tilde{\gamma}$ percorsa in senso opposto. Pertanto, applicando il Teorema di Stokes alla superficie Σ si ottiene

$$\int_\gamma F \cdot \tau_\gamma = \int_{\partial\Sigma} F \cdot \tau_{\partial\Sigma} + \int_{\tilde{\gamma}} F \cdot \tau_{\tilde{\gamma}} = \int_\Sigma (\nabla \times F) \cdot \eta_\Sigma + \int_{\tilde{\gamma}} F \cdot \tau_{\tilde{\gamma}} \ . \tag{2}$$

Il rotore di F è dato da $\nabla \times F = (x, y, -2z)$ e quindi il suo flusso attraverso Σ è

$$\begin{aligned}\int_\Sigma (\nabla \times F) \cdot \eta_\Sigma &= \int (\nabla \times F) \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) du\, dt \\ &= \int (u \cos t, u \sin t, -2at) \cdot (a \sin t, -a \cos t, u)\, du\, dt = -8\pi a \ .\end{aligned} \tag{3}$$

Infine si vede che l'unico contributo non nullo nell'integrale di F lungo la spezzata $\tilde{\gamma}$ è dato dal segmento che congiunge $(0, 0, 0)$ e $(0, 0, 4\pi a)$, ovvero

$$\int_{\tilde{\gamma}} F \cdot \tau_{\tilde{\gamma}} = \int_0^{4\pi a} (0, 0, e^{z^2}) \cdot (0, 0, 1)\, dz = \int_0^{4\pi a} e^{z^2} dz \ . \tag{4}$$

Mettendo insieme le equazioni (2), (3), (4) otteniamo infine

$$\int_\gamma F \cdot \tau_\gamma = \int_0^{4\pi a} e^{z^2} dz - 8\pi a \ .$$

3. Cominciamo con alcune osservazioni di carattere generale.
i) Data A matrice *complessa* $n \times n$, indichiamo con $V_\tau^{\mathbb{C}}(A)$ il sottospazio complesso dei vettori $v \in \mathbb{C}^n$ tali che la soluzione del problema di Cauchy $\dot{y} = Ay$, $y(0) = v$ è τ-periodica. Si verifica facilmente che nel caso in cui A abbia coefficienti reali la dimensione dello spazio reale $V_\tau(A)$ è uguale alla dimensione *complessa* di $V_\tau^{\mathbb{C}}(A)$.
ii) Se A ed E sono matrici reali coniugate, cioè $E = RAR^{-1}$ con R matrice reale invertibile, allora $V_\tau(E)$ e $V_\tau(A)$ hanno la stessa dimensione. Sia infatti y la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} = Ay \\ y(0) = v \end{cases}$$

e si ponga $z := Ry$: allora $\dot{z} = R\dot{y} = RAy = RAR^{-1}Ry = Ez$ e $z(0) = Ry(0) = Rv$, ovvero z risolve il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} = Ey \\ y(0) = Rv \end{cases} .$$

Siccome y è τ-periodica se e solo se z è τ-periodica, se ne deduce che v appartiene a $V_\tau(A)$ se e solo se Rv appartiene a $V_\tau(E)$, ovvero R mappa $V_\tau(A)$ in $V_\tau(E)$ bigettivamente.
iii) Analogamente si dimostra che se A ed E sono matrici *complesse* coniugate, cioè $E = RAR^{-1}$ con R matrice complessa invertibile, allora $V_\tau^{\mathbb{C}}(E)$ e $V_\tau^{\mathbb{C}}(A)$ hanno la stessa dimensione (complessa).
b) Se A è simmetrica allora è coniugata (in senso reale) alla matrice diagonale D i cui elementi D_{jj} corrispondono agli autovalori λ_j di A. Inoltre, essendo $\det A \neq 0$, gli autovalori λ_j sono tutti diversi da zero. Determiniamo ora $V_\tau(D)$: la soluzione del problema $\dot{y} = Dy$, $y(0) = v$ è data da

$$y = e^{Dx} v = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 e^{\lambda_1 x} \\ \vdots \\ v_n e^{\lambda_n x} \end{pmatrix}$$

e chiaramente tale soluzione è periodica se e solo se $v_j = 0$ per ogni j. Dunque $V_\tau(D) = \{0\}$ per ogni τ, e lo stesso vale per $V_\tau(A)$ per via del punto ii).
c) Se A è coniugata alla matrice diagonale complessa D, allora gli elementi D_{jj} corrispondono agli autovalori λ_j di A, e sono tutti non nulli per via dell'ipotesi $\det A \neq 0$; chiaramente un autovalore con molteplicità d (è indifferente se in senso algebrico o geometrico) appare d volte. Procediamo come nel punto b): la soluzione del problema $\dot{y} = Dy$, $y(0) = v$ è

$$y = \begin{pmatrix} v_1 e^{\lambda_1 x} \\ \vdots \\ v_n e^{\lambda_n x} \end{pmatrix}$$

e ovviamente $v_j e^{\lambda_j x}$ è una funzione τ-periodica se e solo se $v_j = 0$ oppure λ_j è un numero immaginario puro e τ è un multiplo intero di $2\pi i/\lambda_j$. Pertanto

$$V_\tau^{\mathbb{C}}(D) = \{v \in \mathbb{C}^n : \ v_j = 0 \text{ se } \tau \notin (2\pi i/\lambda_j)\mathbb{Z}\}$$

e dunque la dimensione complessa di $V_\tau^{\mathbb{C}}(D)$ è uguale al numero degli autovalori di A della forma $2\pi hi/\tau$ con $h \in \mathbb{Z}$, contati con la loro molteplicità (algebrica o geometrica). Per via dei punti i) ed iii) questa dimensione coincide con la dimensione complessa di $V_\tau^{\mathbb{C}}(A)$ e con la dimensione reale di $V_\tau(A)$.
a) In questo caso il polinomio caratteristico della matrice A è $P(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda^2+1)$, per cui gli autovalori sono $2, \pm i$. In particolare la matrice A è diagonalizzabile in senso complesso e quindi possiamo applicare quanto visto al punto c):

$$\dim(V_\tau(A)) = \begin{cases} 2 & \text{se } \tau \text{ è un multiplo intero di } 2\pi, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

d) Si procede come al punto c), determinando la dimensione complessa di $V_\tau^{\mathbb{C}}(D)$ dove D è la forma canonica di Jordan di A. La discussione è resa leggermente più complicata dal fatto che D non è diagonale. Ci limitiamo quindi ad enunciare il risultato: la dimensione di $V_\tau(A)$ è uguale alla dimensione complessa di $V_\tau^{\mathbb{C}}(D)$, che è a sua volta uguale al numero degli autovalori di A della forma $2\pi hi/\tau$ con $h \in \mathbb{Z}$, contati con la loro molteplicità *geometrica* (dimensione complessa dell'autospazio associato).

COMMENTI

- Seconda parte, esercizio 1b). Ci sono molte alternative alla curva $\tilde{\gamma}$ proposta qui. Una particolarmente conveniente (dal punto di vista dei conti) è quella che parametrizza il bordo del rettangolo $[0, \sqrt{2}] \times [0, 2]$.
- Seconda parte, esercizio 1c). Molti hanno sostenuto che la curva γ in oggetto è omotopa ad una costante, ma chiaramente non è così, visto per di più che non è neanche chiusa.
- Seconda parte, esercizio 2c). Contrariamente all'opinione diffusa, il bordo di Σ non è solo la curva γ (che tra l'altro non è neanche chiusa).
- Seconda parte, esercizio 3. Alcuni hanno considerato $V_\tau(A)$ come l'insieme dei dati iniziali v per cui la soluzione y è periodica (senza specificare il periodo). A parte il fatto che in tal caso non si capisce il senso del parametro τ, il vero problema è che tale insieme non è uno spazio vettoriale.
- Seconda parte, esercizio 3. Alcuni si sono limitati ad osservare che $V_\tau(A)$ coincide con l'autospazio dell'autovettore 1 della matrice $e^{\tau A}$. Quest'osservazione è corretta e probabilmente utile, ma non costituisce una risposta soddisfacente alle varie domande (se ad esempio si cerca di usarla per rispondere alla domanda a) si vede che è assai poco illuminante).

Scritto del III appello, 7 settembre 2006

Prima parte

1. Ad esempio $\begin{cases} x = \cos u \, \cos v \\ x = \cos u \, \sin v \\ z = \frac{1}{2} \sin u \end{cases}$ con $-\pi/2 \leq u \leq \pi/2$ e $0 \leq v \leq 2\pi$.

2. Siccome $e^x y + (1+x^2)^{-1} y^2 \geq (1+x^2)^{-1} y^2$, ogni soluzione dell'equazione a variabili separabili $\dot{z} = (1+x^2)^{-1} z^2$ è sottosoluzione dell'equazione di partenza. In particolare, quella che soddisfa la condizione iniziale $z(0) = 1$, vale a dire $z(x) = (1 - \arctan x)^{-1}$, tende a $+\infty$ per $x \to \tan 1$ e quindi soddisfa quanto richiesto.

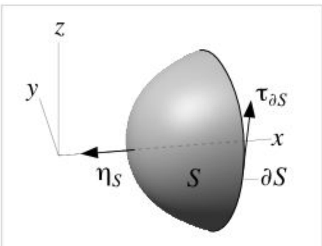
3. Si tratta dei punti per cui il determinante di $D\Phi(x)$ è diverso da zero. Siccome
$$\det D\Phi(x) = \det \begin{pmatrix} 6x_1 & -6x_2^2 & 0 \\ 0 & 6x_2 & -6x_3^2 \\ -6x_1^2 & 0 & 6x_3 \end{pmatrix} = 6^3 x_1 x_2 x_3 (1 - x_1 x_2 x_3) \ ,$$
si tratta dei punti x tali che $x_1 x_2 x_3 \neq 0, 1$.

4. $\nabla \cdot F = (\nabla \cdot x)|x|^4 + x \cdot (\nabla |x|^4) = n|x|^4 + x \cdot 4|x|^2 x = (n+4)|x|^4$.

5. Il campo F ammette come potenziale $V(x,y) := -\frac{1}{2} \cos(x^2 + y^2)$, e quindi
$$\int_\gamma F \cdot \tau = V(\gamma(1)) - V(\gamma(0)) = V(-\sqrt{\pi}, 0) - V(0,0) = 1 \ .$$

6. I punti critici della funzione ausiliaria $f(x,y,\lambda) := 4xy - \lambda(x^4 + y^4 - 2)$ sono quattro: $\pm(1,1)$ (punti di massimo) e $\pm(1,-1)$ (punti di minimo).

7. Scrivendo la funzione incognita u in serie di Fourier (reale) nella variabile x, cioè
$$u(x,t) = a_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \cos(nx) + b_n(t) \sin(nx)$$
il problema si riduce ad un sistema di equazioni differenziali indipendenti per i coefficienti a_n e b_n, mentre la condizione iniziale $u(0,x) = 0$ implica $a_n(0) = 0$ e $b_n(0) = 0$ per ogni n. Tranne che per a_1, si tratta di equazioni lineari omogenee con dato iniziale nullo, e quindi tutti i coefficienti tranne a_1 sono nulli. Invece a_1 risolve l'equazione $\dot{a}_1 = -a_1 + 2$ con $a_1(0) = 0$, ovvero $a_1(t) = 2(1 - e^{-t})$. Pertanto $u(t,x) = 2(1 - e^{-t}) \cos x$.

8. 

Seconda parte

1. Nello spazio, l'area del triangolo di vertici v_1, v_2, v_3 è uguale a metà di quella del parallelogrammo generato dai vettori $v_3 - v_1$ e $v_3 - v_2$ ovvero $\frac{1}{2}|(v_3 - v_1) \times (v_3 - v_2)|$. Pertanto l'area del triangolo di vertici $(1,0,0)$, $(0,2,0)$ e (x,y,z) è
$$A(x,y,z) = \frac{1}{2}\big|(x-1, y, z) \times (x, y-2, z)\big| = \frac{1}{2}\big|(2z, z, 2 - 2x - y)\big| \ .$$

Per semplificare i conti minimizziamo però la funzione

$$f(x,y,z) := 4A^2(x,y,z) = 4 - 8x - 4y + 4x^2 + 4xy + y^2 + 5z^2 \ .$$

L'esistenza del minimo di tale funzione su S si dimostra al solito modo (ometto i dettagli). Per individuarlo, applichiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, e quindi cerchiamo i punti critici della funzione ausiliaria

$$F(x,y,z,\lambda) := 4 - 8x - 4y + 4x^2 + 4xy + y^2 + 5z^2 - \lambda(1 + x^2 + y^2 - z^2) \ .$$

Dobbiamo quindi risolvere il sistema

$$\begin{cases} -8 + (8-2\lambda)x + 4y = 0 \\ -4 + (2-2\lambda)y + 4x = 0 \\ (10+2\lambda)z = 0 \\ 1 + x^2 + y^2 - z^2 = 0 \end{cases}$$

La terza equazione ammette due soluzioni i) $z = 0$, che però non è ammissibile perché nessun punto con $z = 0$ appartiene ad S; ii) $\lambda = -5$. In questo caso le rimanenti equazioni si risolvono facilmente (le prime due sono lineari e contengono solo x e y). Le soluzioni sono due:

$$\frac{1}{5}\big(2, 1, \pm\sqrt{30}\big) \ .$$

In questi due punti il valore di A è lo stesso, e cioè $\sqrt{7}/2$, e quindi sono entrambi minimi.

2. a) Applichiamo la formula per la divergenza del prodotto di una funzione vettoriale G ed una funzione scalare f, cioè

$$\nabla \cdot (fG) = (\nabla f) \cdot G + f(\nabla \cdot G) \ ,$$

con $f := |x|^{-n}$ e $G := x$. Siccome $\nabla|x| = x/|x|$ e $\nabla \cdot x = n$ otteniamo

$$\nabla \cdot F = \nabla(|x|^{-n}) \cdot x + |x|^{-n}(\nabla \cdot x) = -n|x|^{-n-1}(\nabla|x|) \cdot x + n|x|^{-n} = 0 \ .$$

b) Basta applicare il teorema della divergenza.

c) In questo caso non è possibile applicare il teorema della divergenza perché F non è definito su tutto D. Prendiamo invece r in modo tale che la palla aperta B_r di centro l'origine e raggio r sia contenuta nella parte interna di D, e poniamo $D' := D \setminus B_r$. Siccome D' è un aperto con frontiera regolare l'origine non appartiene a D', per quanto visto al punto b) si ha

$$0 = \int_{\partial D'} F \cdot \eta_{D'} \ .$$

La frontiera di D' è data dall'unione della frontiera di D e di quella di B_r, e la normale esterna di D' coincide nel primo caso con la normale esterna di D e nel secondo caso con l'opposto della normale esterna di B_r. Pertanto l'ultima equazione diventa

$$0 = \int_{\partial D} F \cdot \eta_{D'} - \int_{\partial B_r} F \cdot \eta_{B_r}$$

e quindi

$$\int_{\partial D} F \cdot \eta_{D'} = \int_{\partial B_r} F \cdot \eta_{B_r} = \frac{1}{r^{n-1}} \mathrm{Area}_{n-1}(\partial B_r) = \mathrm{Area}_{n-1}(\partial B_1)$$

(il flusso di F uscente da ∂B_r è stato calcolato direttamente a partire dalla definizione; Area_{n-1} indica l'area $(n-1)$-dimensionale, e quindi $\mathrm{Area}_{n-1}(\partial B_1)$ è l'area $(n-1)$-dimensionale della sfera di raggio unitario in $\mathbb{R}^n$.

3. Cominciamo con un'osservazione di carattere generale: se C e D sono curve in $\mathbb{R}^n$, *condizione sufficiente* affinché D approssimi C all'ordine k in $\bar{x}$ è che esistano $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ e $\sigma : J \to \mathbb{R}^n$ parametrizzazioni di classe C^k di C e D che soddisfano le seguenti condizioni:
   i) $\gamma(t) = \bar{x}$ solo per $t = 0$;
   ii) $\dot{\gamma}(0) \neq 0$;
   iii) 0 è interno a J;
   iv) $\gamma(t) - \sigma(t) = o(t^k)$ per $t \to 0$.

   (Si osservi che le condizioni i) e ii) sono automaticamente soddisfatte se γ è una parametrizzazione regolare, mentre la iv) equivale a dire che γ e σ hanno lo stesso sviluppo di Taylor all'ordine k in 0.)

   Supponiamo per assurdo che questo enunciato sia falso. Allora esiste una successione di punti $x_n \in C$ che tende a $\bar{x}$ con $x_n \neq \bar{x}$, tale che
$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{dist}(x_n, D)}{|x_n - \bar{x}|^k} > 0 \ . \tag{1}$$
   Per ogni n prendiamo $t_n \in I$ tale che $x_n = \gamma(t_n)$. Siccome γ è continua, ogni punto di accumulazione t di t_n deve soddisfare $\gamma(t) = \bar{x}$, e quindi $t = 0$ per via dell'ipotesi i). Dunque t_n converge a 0. Allora dalla definizione di $\mathrm{dist}(x, D)$ segue che
$$\mathrm{dist}(x_n, D) \leq |x_n - \sigma(t_n)| = |\gamma(t_n) - \sigma(t_n)|$$
   mentre l'ipotesi ii) e lo sviluppo di Taylor all'ordine 1 di γ in 0 implicano
$$|x_n - \bar{x}| = |\gamma(t_n) - \gamma(0)| = |\dot{\gamma}(0)\, t_n + o(t_n)| \sim c|t_n|$$
   dove $c := |\dot{\gamma}(0)|$. Mettendo insieme queste stime e l'ipotesi iv) otteniamo
$$\frac{\mathrm{dist}(x_n, D)}{|x_n - \bar{x}|^k} \leq \frac{|\gamma(t_n) - \sigma(t_n)|}{|x_n - \bar{x}|^k} \sim \frac{o(t_n^k)}{c^k |t_n|^k} \ ,$$
   ma l'ultimo termine converge a 0 per $n \to +\infty$, contraddicendo l'assunto (1).

   a) Sia γ una parametrizzazione regolare di C. Sostituendo la mappa $\gamma(t)$ con la mappa $\gamma(t+a)$, dove a soddisfa $\gamma(a) = \bar{x}$, otteniamo che $\bar{x} = \gamma(0)$. Per quanto visto sopra, la retta cercata D, che poi non è altro che la retta tangente, è quella parametrizzata dallo sviluppo di Taylor all'ordine 1 di γ in 0, vale a dire
$$\sigma(t) := \gamma(0) + \dot{\gamma}(0)\, t \ .$$
   b) Si tratta di un caso particolare di c).

   c) La risposta è affermativa. Sia γ la parametrizzazione regolare di C. Come sopra, possiamo supporre che $\bar{x} = \gamma(0)$. Sostituendo $\gamma(t)$ con $\gamma(bt)$ con $b := 1/|\dot{\gamma}(0)|$, otteniamo inoltre che $|\dot{\gamma}(0)| = 1$. Infine, sostituendo $\gamma(t)$ con $\gamma(t + \frac{c}{2}t^2)$ con $c := -\ddot{\gamma}(0) \cdot \dot{\gamma}(0)$, otteniamo anche che $\dot{\gamma}(0)$ e $\ddot{\gamma}(0)$ sono perpendicolari.

   Data una circonferenza D in $\mathbb{R}^n$, indichiamo con x_c il centro di D, con r il raggio e con e_1, e_2 due vettori unitari ortogonali tali che $x_c + \mathrm{span}\{e_1, e_2\}$ è il piano affine su cui giace D. Una parametrizzazione di D è
$$\sigma(t) := x_c + r\cos(\omega t)\, e_1 + r \sin(\omega t)\, e_2$$

(la ragione dell'ulteriore parametro ω sarà chiara in seguito). Lo sviluppo di Taylor di σ all'ordine 2 in 0 è

$$\sigma(t) := (x_c + re_1) + r\omega e_2\, t - r\omega^2 e_1 \frac{t^2}{2} + o(t^2)\ .$$

Affinché D approssimi C all'ordine 2 in $\bar{x}$ basta che questo sviluppo coincida con quello di γ, vale a dire che

$$\begin{cases} \gamma(0) = x_c + re_1 \\ \dot\gamma(0) = r\omega e_2 \\ \ddot\gamma(0) = -r\omega^2 e_1 \end{cases} . \tag{2}$$

Siccome abbiamo riparametrizzato γ in modo tale da avere $|\dot\gamma(0)| = 1$ e $\dot\gamma(0)\cdot\ddot\gamma(0) = 0$, questo sistema è soddisfatto ponendo

$$\begin{cases} e_2 = \dot\gamma(0) \\ \omega = 1/r \\ e_1 = -\ddot\gamma(0)/|\ddot\gamma(0)| \\ r = 1/|\ddot\gamma(0)| \\ x_c = \gamma(0) - \dot\gamma(0)/|\ddot\gamma(0)| \end{cases} .$$

Chiaramente questa soluzione non ha senso se $\ddot\gamma(0) = 0$. In tal caso si vede però che la retta D data al punto a) approssima C all'ordine 2.

d) La risposta è negativa. Sia C è il grafico di una funzione $z = f(x, y)$ che soddisfa $f(0,0) = 0$ e $\nabla f(0,0) = (0,0)$. Allora C è approssimabile all'ordine 2 da una sfera (o da un piano) nel punto $(0,0,0)$ se e solo se gli autovalori della matrice Hessiana $D^2 f(0,0)$ sono uguali. Una dimostrazione dettagliata è però complicata.

COMMENTI

- Prima parte, esercizio 2. Usando le maggiorazioni $e^x \ge 1+x$, $1+x^2 \le (1+x)$ per $0 \le x \le 1$ e $a + b \ge 2\sqrt{ab}$ si ottiene

  $$e^x y + (1+x^2)^{-1}y^2 \ge (1+x)y + (1+x)^{-1}y^2 \ge 2\sqrt{(1+x)y\cdot(1+x)^{-1}y^2} = 2|y|^{3/2}$$

  e quindi ogni soluzione dell'equazione $\dot z = |z|^{3/2}$ è sottosoluzione dell'equazione di partenza. In particolare quella che soddisfa la condizione iniziale $z(0) = 1$, ovvero $z(x) = (1-x)^2$, tende a $+\infty$ per $x \to 1$, e quindi soddisfa quanto richiesto. Sottosoluzioni di forma analoga possono anche essere ottenuta cercando tra tutte le funzioni del tipo $z(x) = (1-ax)^{-b}$ con a e b positivi.

- Prima parte, esercizio 4. Diverse persone hanno scritto formule corrette in cui hanno però omesso di semplificare l'espressione $\sum x_i^2$ che vi appare con $|x|^2$. Mah!

- Seconda parte, esercizio 1. Praticamente nessuno si è ricordato del fatto che dati $v, w \in \mathbb{R}^3$, il modulo del vettore prodotto $v \times w$ corrisponde all'area del parallelogrammo di vertici $0, v, w, v + w$, ovvero a due volte l'area del triangolo di vertici $0, v, w$. Quel che è piú grave, quasi nessuno è stato in grado di calcolare in alcun modo l'area del triangolo di vertici $(1,0,0)$, $(0,2,0$ e (x,y,z).

- Seconda parte, esercizio 1. Si può evitare di usare i moltiplicatori di Lagrange osservando che per tutti i punti di S la funzione $f(x,y,z)$ coincide con la funzione di due variabili

  $$g(x,y) = 4 - 8x - 4y + 4x^2 + 4xy + y^2 + 5(1 + x^2 + y^2)$$

  e quindi, siccome la proiezione di S sul piano xy coincide con tutto $\mathbb{R}^2$, basta cercare il minimo di g su $\mathbb{R}^2$. In questo modo è anche facile dimostrare l'esistenza di tale minimo, infatti $g(x,y)$ è uguale alla forma quadratica $9x^2 + 4xy + 6y^2$ più un termine lineare, e siccome questa forma quadratica corrisponde ad una matrice simmetrica definita positiva, se ne deduce che $g(x,y)$ tende a $+\infty$ quando (x,y) tende all'infinito in modulo, condizione che unitamente alla continuità di g permette com'è noto di ottenere l'esistenza di un minimo.

- Seconda parte, esercizio 3. Se γ e σ parametrizzano le curve C e D, le condizioni (i) - (iv) date all'inizio della soluzione sono sufficienti a garantire che D approssimi C all'ordine k, ma assolutamente non necessarie. In particolare, date due parametrizzazioni 'a caso' di C e D, è possibile che queste non verifichino le condizioni (i) - (iv) anche se D approssima C all'ordine k. Questo lo si vede bene nella soluzione del punto b): sia la parametrizzazione della curva C e quella della (ipotetica) circonferenza approssimante D vanno scelte in modo molto particolare per far sì che le condizioni (i) - (iv) siano verificate. Se ad esempio non avessimo imposto che i vettori $\dot\gamma(0)$ e $\ddot\gamma(0)$ fossero ortogonali, o avessimo preso $\omega = 1$ nella parametrizzazione σ della circonferenza D, allora il sistema (2) non sarebbe stato soddisfatto da nessuna scelta di x_c, e_1, e_2 ed r.

Scritto del IV appello, 11 gennaio 2007

Prima parte

1. Scrivendo A come somma di $2I$ e della matrice nilpotente $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ si ottiene

$$e^{At} = e^{2It}e^{Nt} = e^{2t}(I + Nt) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3t \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

2. Tutti tranne l'origine.
3. Dall'equazione $D_xV = F_x = z^2 - 2xy - yz$ si ottiene $V(x, y, z) = -x^2y - xyz + xz^2 + a(y, z)$. Sostituendo in $D_yV = F_y = -x^2 - xz + 2yz$ si ottiene $a(x, y) = y^2z + b(z)$, ed infine sostituendo in $D_zV = F_z = -xy + 2xz + y^2$ si ottiene $b(z) = c$ con c costante. Quindi

$$V(x, y, z) = -x^2y - xyz + xz^2 + y^2z + c .$$

4. $\nabla \cdot F = 0$; $\nabla \times F = -2(y + z, x + z, x + y)$.
5. $\begin{cases} \dot{y} = z \\ \dot{z} = x^3y^2z + 1 \\ y(0) = 0 \\ z(0) = 0 \end{cases}.$
6. Il gradiente del vincolo in $(1, -1, 0)$ è la matrice $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, che ha rango due.

   Un elemento non banale del kernel è il vettore $(0, 0, 1)$.
7. $L = \int_0^1 \sqrt{\rho^2 + \dot{\rho}^2}\, d\theta = \int_0^1 (1 + \theta^2)\, d\theta = \frac{4}{3}.$
8. $f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ n \text{ dispari}}} \frac{4}{\pi n^2} \cos(nx) = \frac{\pi}{2} + \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z} \\ n \text{ dispari}}} \frac{2}{\pi n^2} e^{inx}.$

Seconda parte

1. a) Una parametrizzazione di Σ è data da

$$\Phi(u, v) = (v, \rho(v) \cos u, \rho(v) \sin u) \quad \text{con } (u, v) \in [0, 2\pi] \times [a, b].$$

Si verifica facilmente che tale parametrizzazione è regolare. Inoltre

$$\begin{aligned} \text{Area}(\Sigma) &= \int_a^b \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right| du\, dv \\ &= \int_a^b \int_0^{2\pi} |(-\rho\dot{\rho}, \rho \cos u, \rho \sin u)|\, du\, dv \\ &= \int_a^b \int_0^{2\pi} \rho \sqrt{1 + \dot{\rho}^2}\, du\, dv = \int_a^b 2\pi\rho \sqrt{1 + \dot{\rho}^2}\, dv . \end{aligned}$$

b) Riscrivendo l'equazione $1 - y^2 - z^2 = e^x$, si ottiene che Σ è l'insieme dei punti tali che

$$y^2 + z^2 = 1 - e^x \quad \text{e} \quad -\frac{1}{2} \leq x \leq 0$$

(la condizione $x \leq 0$ deriva dal fatto che $1 - e^x$ deve essere positivo). Pertanto Σ è la superficie ottenuta ruotando attorno all'asse x il grafico della funzione $\rho(x) := \sqrt{1 - e^x}$ ristretta all'intervallo $-1/2 \leq x \leq 0$; per quanto visto al punto a)

$$\begin{aligned}
\text{Area}(\Sigma) &= \int_{-1/2}^{0} 2\pi\rho\sqrt{1 + \dot\rho^2}\, dx \\
&= \int_{-1/2}^{0} 2\pi\sqrt{1 - e^x}\sqrt{1 + \left(\frac{-e^x}{2\sqrt{1 - e^x}}\right)^2}\, dx \\
&= \int_{-1/2}^{0} \pi(2 - e^x) dx = \frac{\pi}{\sqrt{e}} \ .
\end{aligned}$$

2. a) La funzione che definisce il vincolo S è

$$g(x, y, z) := 5x^2 + 5y^2 - 2xy - 4e^z - 4e^{-z} \ .$$

I punti in cui il vincolo potrebbe definire una superficie non regolare sono quelli in cui si annulla il gradiente di g, vale a dire le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 10x - 2y = 0 \\ 10y - 2x = 0 \\ -4e^z + 4e^{-z} = 0 \end{cases} .$$

Il sistema dato dalle prima due equazioni è invertibile, e quindi l'unica soluzione è quella banale: $x = y = 0$. La terza equazione si riscrive come $e^z = e^{-z}$ e passando al logaritmo si ottiene $z = -z$ ovvero $z = 0$. Pertanto l'unico punto in cui si annulla il gradiente di g è $(0, 0, 0)$; siccome tale punto non appartiene a S, quest'ultima è una superficie regolare.
Essendo luogo di zeri di una funzione continua, S è anche un insieme chiuso, ma non è limitato (ed in particolare non è compatto), infatti la successione di punti

$$P_n := \left(\sqrt{\frac{e^n + e^{-n}}{2}}, \sqrt{\frac{e^n + e^{-n}}{2}}, n\right) \tag{1}$$

è contenuta in S e non è limitata.
d) La distanza dall'asse z di un punto (x, y, z), elevata al quadrato, è

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 \ .$$

Questa funzione è continua, ma essendo S non compatto, non possiamo applicare direttamente il teorema di Weierstrass per dimostrare che f ammette minimo e massimo su S. In particolare, prendendo i punti P_n dati in (1) si vede che

$$f(P_n) = e^n + e^{-n} \to +\infty \quad \text{per } n \to +\infty,$$

quindi l'estremo superiore di f su S è $+\infty$ e non esistono punti di massimo.
b) Tuttavia f ammette minimo su S. Osserviamo infatti che nel punto $(1, 1, 0)$, che appartiene ad S, la funzione f assume il valore 2. Indichiamo allora con S' l'insieme dei punti di S in cui $f \leq 2$. Chiaramente S' è chiuso e non vuoto (contiene appunto $(1, 1, 0)$) e se fosse anche limitato, allora avremmo che S' è compatto e quindi f ammette minimo su S', e tale valore (che è minore o uguale a 2) coincide con il minimo di f su tutto S visto che in $S \setminus S'$ la funzione f assume valori maggiori di 2.

Resta da dimostrare che S' è limitato. Dato (x, y, z) in S', la condizione $f(x, y, z) \leq 2$ implica $x^2 \leq 2$ e $y^2 \leq 2$, e siccome $5x^2 + 5y^2 - 2xy = 4e^z + 4e^{-z}$ si ha anche

$$e^z + e^{-z} \leq \frac{5x^2 + 5y^2 - 2xy}{4} \leq \frac{5 \cdot 2 + 5 \cdot 2 + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{4} \leq 6$$

da cui segue che $e^z \leq 6$ e $e^{-z} \leq 6$. Dunque per ogni $(x, y, z) \in S'$ si ha $|x| \leq \sqrt{2}$, $|y| \leq \sqrt{2}$, $|z| \leq \log 6$, e quindi S' è limitato.

c) Siccome f è di classe C^∞ ed il vincolo che definisce S soddisfa le ipotesi del teorema della funzione implicita in tutti i punti di S, possiamo trovare i punti di minimo di f su S applicando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange: questi punti sono punti critici per la funzione ausiliaria $F(x, y, z, \lambda) := f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z)$ per un λ opportuno, ovvero soddisfano il sistema

$$\begin{cases} 2x - 10\lambda x + 2\lambda y = 0 \\ 2y - 10\lambda y + 2\lambda x = 0 \\ -4\lambda e^z + 4\lambda e^{-z} = 0 \end{cases} \tag{2}$$

più il vincolo $g(x, y, z) = 0$. Consideriamo le prime due equazioni in (2) come un sistema lineare in x e y: il determinante associato deve essere nullo, ovvero $(1 - 5\lambda)^2 - \lambda^2 = 0$, altrimenti l'unica soluzione di queste due equazioni è quella banale $x = y = 0$, ma nessun punto del tipo $(0, 0, z)$ soddisfa il vincolo $g(x, y, z) = 0$. L'equazione $(1 - 5\lambda)^2 - \lambda^2 = 0$ ammette due soluzioni: $\lambda = 1/4$ e $\lambda = 1/6$. Nel primo caso il sistema (2) implica $x = y$ e $z = 0$ ed il vincolo $g(x, y, z) = 0$ implica $x = y = \pm 1$; in tali punti f vale 2. Nel secondo caso il sistema (2) implica $x = -y$ e $z = 0$ ed il vincolo $g(x, y, z) = 0$ implica $x = -y = \pm\sqrt{2/3}$; in tali punti f vale 4/3. Pertanto i punti di minimo di f su S sono

$$\big(\sqrt{2/3}, -\sqrt{2/3}, 0\big) \quad \text{e} \quad \big(-\sqrt{2/3}, \sqrt{2/3}, 0\big) \ .$$

3. Per ogni intero i con $1 \leq i \leq m$ ed ogni intero j con $1 \leq j \leq p$, indichiamo con A_i la riga i-esima di A e con B_j la colonna j-esima di B. Allora l'elemento ij della matrice prodotto AB è $(AB)_{ij} = A_i \cdot B_j$ dove il punto $(\cdot)$ indica il prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$. Pertanto

$$\|AB\|^2 = \sum_{ij} (AB)_{ij}^2 = \sum_{ij} (A_i \cdot B_j)^2 \leq \sum_{ij} |A_i|^2 |B_j|^2 = \Big(\sum_i |A_i|^2\Big)\Big(\sum_j |B_j|^2\Big) \ ,$$

dove la disuguaglianza segue dalla ben nota disuguaglianza per il prodotto scalare di due vettori: $|v \cdot w| \leq |v|\,|w|$. Per concludere basta osservare che

$$\sum_i |A_i|^2 = \sum_i \Big(\sum_h A_{ih}^2\Big) = \sum_{ih} A_{ih}^2 = \|A\|^2 \ ,$$

ed analogamente $\displaystyle\sum_j |B_j|^2 = \|B\|^2$.

COMMENTI

- Prima parte, esercizio 7. Alcuni hanno frainteso il senso dell'esercizio: si richiede il disegno e la lunghezza della curva nel piano x, y e non nel piano delle coordinate polari θ, ρ.
- Seconda parte, esercizio 1a). Quasi nessuno ha verificato l'iniettività di Φ.

Scritto del V appello, 31 gennaio 2007

Prima parte

1. a) Chiuso e limitato. b) Né chiuso, né limitato. c) Chiuso ma non limitato.
2. $\nabla \cdot F = 6xyz$; $\nabla \times F = \big(x(z^2 - y^2), y(x^2 - z^2), z(y^2 - x^2)\big)$.
3. $(a, -1, 3) \times (-2, a + 1, -6) = \big(3(1 - a), 6(a - 1), (a - 1)(a + 2)\big)$. I due vettori sono paralleli se e solo se il prodotto vettoriale è nullo, ovvero per $a = 1$.
4. I punti di massimo e minimo esistono perché la funzione è continua ed il vincolo compatto. Inoltre la funzione è C^1 ed il vincolo regolare, per cui tali punti sono soluzioni del sistema dato dal metodo dei moltiplicatori di Lagrange:
$$\begin{cases} 2x - 4\lambda x = 0 \\ 4y - 2\lambda y = 0 \\ -2z - 2\lambda z = 0 \\ 2x^2 + y^2 + z^2 - 2 = 0 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} (1 - 2\lambda)x = 0 \\ (2 - \lambda)y = 0 \\ (1 + \lambda)z = 0 \\ 2x^2 + y^2 + z^2 = 2 \end{cases} .$$
Si trova che le soluzioni di questo sistema sono: a) $(\pm 1, 0, 0)$, in cui $f = 1$; b) $(0, \pm\sqrt{2}, 0)$, in cui $f = 4$; c $(0, 0, \pm\sqrt{2})$, in cui $f = -2$. Pertanto il valore massimo di f è 4 ed il minimo è -2.
5. Nel punto $(1, 1, 1)$, la derivata della mappa che definisce il vincolo, vale a dire $\Phi(x, y, z) := (x^2y^2 - z^4, x^2 + y^2 + z^2)$, è
$$2\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$
Questa matrice ha rango massimo ed il kernel è dato dai vettori $(t, -t, 0)$ con $t \in \mathbb{R}$.
6. Basta prendere la soluzione l'equazione a variabili separabili $\dot{y} = y^2$ che soddisfa la condizione iniziale $y(0) = 1$, vale a dire $y = 1/(1 - x)$.
7. Il bordo di S è la circonferenza di centro l'origine e raggio 2 che giace sul piano xy. Facendo un disegno si vede che tale curva va orientata in senso *orario* nel piano xy, e dunque il vettore tangente giusto è $(1, 0, 0)$.

Seconda parte

1. a) Siccome il volume di un ellissoide di semiassi a, b, c è $\frac{4\pi}{3}abc$, si tratta di dimostrare che esiste il massimo della funzione
$$f(a, b, c) := abc$$
sull'insieme
$$C := \big\{(a, b, c) : \ a^4 + b^4 + c^4 \le 3 \text{ e } a, b, c \ge 0\big\} . \tag{1}$$
L'insieme C è chiuso perché intersezione di quattro chiusi (le funzioni che definiscono le disuguaglianze in (1) sono tutte continue!) e limitato (la prima disuguaglianza in (1) implica $|a|, |b|, |c| \le \sqrt[4]{3}$). Pertanto la funzione f, essendo continua, assume massimo e minimo in C per il teorema di Weierstrass.
b) Vediamo innanzitutto che il punto di massimo P verifica $a^4 + b^4 + c^4 = 3$ e $a, b, c > 0$. Se infatti almeno una delle coordinate a, b, c fosse zero, allora f varrebbe 0 e questo non è certo il valore massimo, bensì il minimo. Inoltre, se si avesse $a^4 + b^4 + c^4 < 3$, allora P sarebbe interno all'insieme C, e quindi il gradiente di f dovrebbe annullarsi in tale punto, mentre si vede facilmente che ∇f non si annulla in alcun punto con coordinate tutte positive.
Ne segue che P è un punto di massimo di f ristretta all'intersezione della superficie
$$S := \big\{(a, b, c) : \ a^4 + b^4 + c^4 = 3\big\}$$

e dell'insieme aperto A dei punti (a,b,c) con $a,b,c > 0$. In particolare P è un punto di massimo *locale* di f su S. Siccome f è una funzione di classe C^1 ed il vincolo che definisce S è regolare (si omette la facile verifica), possiamo trovare P tramite il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. I punti critici della funzione ausiliaria $F(a,b,c,\lambda) := f(a,b,c) - \lambda(a^4+b^4+c^4-3)$ sono dati da

$$\begin{cases} bc - 4\lambda a^3 = 0 \\ ac - 4\lambda b^3 = 0 \\ ab - 4\lambda c^3 = 0 \\ a^4 + b^4 + c^4 - 3 = 0 \end{cases} \quad \text{che implica} \quad \begin{cases} abc = 4\lambda a^4 \\ abc = 4\lambda b^4 \\ abc = 4\lambda c^4 \\ a^4 + b^4 + c^4 = 3 \end{cases} .$$

Consideriamo le soluzioni di questo secondo sistema che soddisfano $a,b,c > 0$. Con questa ipotesi la prima equazione implica $\lambda \neq 0$, e quindi le prime tre equazioni implicano che $a^4 = b^4 = c^4$, e usando l'ultima $a^4 = b^4 = c^4 = 1$. L'unico punto con coordinate positive che soddisfa questa condizione è $(1,1,1)$. Pertanto, l'ellissoide di volume massimo è la sfera di raggio 1.
c) In questo caso la funzione f non assume massimo, ma l'estremo superiore dei valori è $+\infty$. Questo lo si vede considerando punti della forma $(t,t,1)$: soddisfano tutti il vincolo desiderato, e chiaramente

$$\lim_{t\to+\infty} f(t,t,1) = +\infty .$$

2. a) Il campo di vettori F è definito sull'insieme A dato dal complementare dell'asse z. Chiaramente F è di classe C^∞, e non è difficile verificare che soddisfa la condizione delle derivate incrociate. In particolare F ammette potenziale su ogni sottoinsieme aperto di A che sia semplicemente connesso. Tuttavia A stesso non è semplicemente connesso, e quindi non questo risultato non si applica ad A; si dimostra anzi che F non ammette potenziale su A osservando che l'integrale di F sul cammino chiuso γ_1 non è zero – cfr. punto c).
b) Siccome il semispazio A' dei punti (x,y,z) con $x > 0$ è semplicemente connesso, per quanto detto sopra F ammette un potenziale V su A'. La condizione $D_z V = F_z = e^z$ implica allora

$$V(x,y,z) = \int e^z\, dz = e^z + a(x,y) .$$

A questo punto la condizione $D_y V = F_y$ diventa $D_y a(x,y) = -x/(x^2+y^2)$ e dunque

$$a(x,y) = \int \frac{-x}{x^2+y^2}\, dy = -\arctan(y/x) + b(x) .$$

Infine la condizione $D_x V = F_x$ implica $D_x b(x) = 0$ ovvero b costante. Pertanto

$$V(x,y,z) = e^z - \arctan(y/x) + c \quad \text{con } c \in \mathbb{R}.$$

c) Tramite calcolo diretto si ottiene

$$\int_{\gamma_1} F \cdot \tau_{\gamma_1} = \int_0^{2\pi} (\sin t, -\cos t, 1) \cdot (-\sin t, \cos t, 0)\, dt = \int_0^{2\pi} -1\, dt = -2\pi .$$

d) Siccome F soddisfa la condizione delle derivate incrociate, l'integrale di F su γ_2 è uguale a quello su ogni altro cammino omotopo a γ_2 in A, per esempio $\gamma_3(t) := (\cos(2t), \sin(2t), 0)$; un'omotopia di γ_3 in γ_2 è

$$\Psi(t,\lambda) := e^{\lambda \sin t}(\cos(2t), \sin(2t), \lambda) \quad \text{con } 0 \le t \le 2\pi,\ 0 \le \lambda \le 1.$$

Pertanto
$$\int_{\gamma_2} F\cdot\tau_{\gamma_2} = \int_{\gamma_3} F\cdot\tau_{\gamma_3} = -4\pi \ ,$$
dove la seconda uguaglianza segue per calcolo diretto come al punto b), oppure osservando che γ_3 è semplicemente γ_1 percorso due volte.

3. a) Basta applicare il teorema di Gauss-Green:
$$\int_\gamma F\cdot\tau_\gamma = \int_D D_xF_y - D_yF_x\,dx\,dy = \int_D 2\,dx\,dy = 2\,\mathrm{Area}(D)\ .$$
b) Indichiamo con γ_x e γ_y le due componenti di γ, vale a dire $\gamma=\gamma_x+i\gamma_y$. Per la formula data al punto a) abbiamo allora che
$$\mathrm{Area}(D) = \frac{1}{2}\int_\gamma F\cdot\tau_\gamma = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \gamma_x\dot\gamma_y - \gamma_y\dot\gamma_x\,dt\ . \tag{2}$$
D'altra parte
$$\langle\gamma;\dot\gamma\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\gamma(t)\overline{\dot\gamma(t)}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\gamma_x\dot\gamma_x+\gamma_y\dot\gamma_y - i\gamma_x\dot\gamma_y + i\gamma_y\dot\gamma_x\,dt\ . \tag{3}$$
Osserviamo ora che essendo γ una curva chiusa si ha $\gamma_x(\pi)=\gamma_x(-\pi)$ e quindi
$$\int_{-\pi}^{\pi}\gamma_x\dot\gamma_x\,dt = \left|\frac{\gamma_x^2}{2}\right|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2}(\gamma_x^2(\pi)-\gamma_x^2(-\pi)) = 0$$
ed analogamente anche l'integrale di $\gamma_y\dot\gamma_y$ è zero. Pertanto la (3) diventa
$$\langle\gamma;\dot\gamma\rangle = \frac{-i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\gamma_x\dot\gamma_y-\gamma_y\dot\gamma_x\,dt\ ,$$
che insieme alla (2) permette di ottenere la formula b).
c) Basta applicare la formula b) e la formula che esprime il prodotto scalare di due funzioni in termini dei loro coefficienti di Fourier (identità di Parseval):
$$\mathrm{Area}(D) = i\pi\langle\gamma;\dot\gamma\rangle = i\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\,\overline{inc_n} = \pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n|c_n|^2\ .$$

Commenti

- Seconda parte, esercizio 2. Quasi tutti hanno dato come potenziale di F nel semispazio $x>0$ la funzione $V(x,y,z)=e^z+\arctan(x/y)$, senza rendersi conto che tale funzione non è definita su tutto il semispazio (e non può neanche essere estesa per continuità).