Versione: 22 settembre 2005

Università di Pisa
Corso di laurea in Matematica

Testi e soluzioni degli scritti d'esame di

Elementi di Analisi Matematica
a.a. 2004/05

docenti: G. Alberti, A. Briani

Giovanni Alberti
Dipartimento di Matematica
Università di Pisa
largo Pontecorvo 5
56127 Pisa
www.dm.unipi.it/~alberti

Avvertenze

Questa è una raccolta degli scritti d'esame del corso di Elementi di Analisi Matematica per gli studenti del primo anno della laurea triennale in Matematica, anno accademico 04/05. La prima parte di ciascuno scritto consta di otto domande o problemi molto semplici a cui rispondere senza dare alcuna dimostrazione scritta; per la sufficienza si richiedono cinque risposte corrette, avendo un'ora di tempo a disposizione. Nella seconda parte, invece, ci sono tre o più esercizi a cui dare una soluzione articolata e spiegata in dettaglio; nelle prove in itinere (compitini) il tempo a disposizione è di due ore, e per la sufficienza è richiesta la soluzione completa di almeno un esercizio; negliscritti d'esame il tempo a disposizione è di oltre due ore, e per la sufficienza è richiesta la soluzione di almeno due esercizi.

La prima sezione di questi appunti contiene i testi di tutti gli scritti, mentre la seconda contiene la risposta ai quesiti delle prime parti ed una traccia più o meno dettagliata delle soluzioni degli esercizi delle seconde parti.

A questo punto è opportuna una precisazione sull'uso di questi appunti. Le tracce delle soluzioni date nella seconda parte sono spesso ridotte all'essenziale, e comprenderle può richiedere talvolta un notevole sforzo. Nella fase di preparazione dell'esame, è probabilmente meglio non ricorrere a queste soluzioni se non per confrontarle con quelle ottenute per conto proprio, o quando proprio non si riesce a venire a capo di un esercizio. Infine, è bene ricordare che il livello di difficoltà degli esercizi proposti varia moltissimo, ed alcune delle domande sono decisamente difficili. Non è quindi il caso di allarmarsi se non si riesce a trovare sempre una soluzione (suggerisco però di fare almeno un tentativo).

Programma del corso.

Sono in corsivo gli argomenti non essenziali.

Prima parte (Calcolo)

1. Terminologia di base per le funzioni: dominio, codominio, grafico, surgettività, iniettività, invertibilità. Funzioni monotòne, pari, dispari e periodiche. Funzione inversa.
2. Grafici delle funzioni elementari (potenze, esponenziali, logaritmo, funzioni trigonometriche). Visualizzazione grafica di alcune trasformazioni.
3. Definizione di derivata e sua interpretazione geometrica. Calcolo delle derivate. Relazione tra segno della derivata e monotonia. Relazione tra segno della derivata seconda e convessità; studio qualitativo del grafico di una funzione.
4. L'integrale definito inteso come area. Calcolo degli integrali per approssimazione. Teorema fondamentale del calcolo e relazione tra integrale definito e primitiva (integrale indefinito). Calcolo delle primitive.
5. L'area di una figura piana come integrale delle lunghezze delle sezioni unidimensionali; il volume di una figura solida come integrale delle aree delle sezioni bidimensionali; lunghezza del grafico di una funzione.
6. Definizione di limite. Operazioni elementari con i limiti. Notazione di Landau ("o" piccolo); parte principale e ordine di un infinito e di un infinitesimo. Infiniti ed infinitesimi asintoticamente equivalenti; principio di sostituzione degli infinitesimi.
7. Sviluppo di Taylor, applicazioni al calcolo delle parti principali e dei limiti di forme indeterminate. Regole di de L'Hôpital. Confronto di esponenziali, potenze e logaritmi (all'infinito ed in zero).
8. Equazioni differenziali del primo ordine: problema di Cauchy ed enunciato del teorema di esistenza ed unicità locale, equazioni a variabili separabili, equazioni lineari del primo ordine (formula risolutiva generale).
9. Equazioni differenziali del secondo ordine: problema di Cauchy ed enunciato del teorema di esistenza ed unicità locale, equazioni lineari (omogenea e non), soluzione delle equazioni

omogenee a coefficienti costanti, ricerca di una soluzione particolare in alcuni casi speciali.

Seconda parte (Analisi)

10. Elementi di calcolo combinatorio: permutazioni, combinazioni, disposizioni, coefficienti binomiali, binomio di Newton.
11. Numeri complessi: interpretazione geometrica, esponenziale complesso, calcolo di potenze e radici di un numero complesso.
12. Numeri reali. Definizione assiomatica; reali estesi; definizione di massimo e minimo, e di estremo inferiore e superiore; esistenza di estremo inferiore e superiore.
13. Definizione di limite di una successione e sue proprietà; convergenza delle successioni monotone e delle successioni di Cauchy; teorema di Bolzano-Weierstrass. *Successioni definite per ricorrenza.*
14. Teoria degli insiemi: prodotto infinito, insieme delle parti, insieme potenza. Insiemi numerabili e non: gli interi, i razionali e gli algebrici sono numerabili, i reali sono più che numerabili. *Cardinalità, teorema di Cantor-Bernstein.*
15. Definizione di limite di una funzione e sue proprietà; funzioni continue; teorema di esistenza dei valori intermedi; Teorema di esistenza di massimo e minimo (Weierstrass).
16. Definizione di derivata. Derivabilità e continuità. Teoremi di Rolle, Lagrange e Cauchy. Dimostrazione delle regole di de L'Hôpital.
17. Integrale secondo Riemann di una funzione limitata. Integrabilità delle funzioni continue. Teorema fondamentale del calcolo integrale.
18. Formula di Taylor con resto integrale, di Lagrange e di Peano.
19. Integrali impropri. Criteri di convergenza per funzioni positive (confronto e confronto asintotico). La convergenza assoluta implica la convergenza.
20. Serie numeriche: alcuni esempi fondamentali (serie geometrica e serie armonica di esponente 1 e 2. Criteri di convergenza per serie a termini positivi: del confronto (asintotico), del rapporto, della radice, dell'integrale.
21. Serie a termini reali: convergenza e convergenza assoluta. Criterio di Leibniz per le serie a segni alterni. *Riordinabilità delle serie.*
22. Serie di potenze: raggio di convergenza, derivabilità. *Serie di Taylor: criterio di convergenza. Costruzione rigorosa dell'esponenziale e delle funzioni trigonometriche tramite la serie di Taylor.*
23. Equazioni differenziali lineari di ordine k: omogenee a coefficienti costanti, non omogenee, soluzioni particolari, metodo della riduzione dell'ordine e metodo della variazione delle costanti.

Elementi di Analisi Matematica, a.a. 2004/05 - Testi

Compitino di prova, 30 novembre 2004

Prima parte, gruppo A

1. Dire quali delle seguenti implicazioni sono corrette:

$$\text{a) } x \geq 3 \Rightarrow x^3 \geq 8\ , \quad \text{b) } x^2 = 4 \Rightarrow x \geq -2\ , \quad \text{c) } x^2 + y^2 \geq 1 \Leftrightarrow |x| \geq 1 \text{ e } |y| \geq 1.$$

2. Trovare degli insiemi A, B, C tali che $A \cap B$, $B \cap C$, $C \cap A$ non sono vuoti e $A \cap B \cap C$ lo è.
3. Calcolare la derivata di a) $x^{-1} \log(2^{2x})$ e b) $\sin\big(x\sqrt{1+x^2}\big)$.
4. Scrivere lo sviluppo di Taylor in 0 all'ordine 13 (incluso) di $\dfrac{x^4}{1-2x^3}$
5. Calcolare $\displaystyle\int_{-2}^{2} x^2 \sin(x^3)\, dx$.
6. Determinare la primitiva di $x^5 \log x$.
7. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$, b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{x \sin x}$, c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \log\big(e^{x^3} + \sin x\big)$.
8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $0 \leq x$, $|y| \leq 1$ e $x + y \leq 1$.

Prima parte, gruppo B

1. Dire quali delle seguenti implicazioni sono corrette:

$$\text{a) } x < 3 \Rightarrow x^3 \leq 8\ , \quad \text{b) } x^2 = 4 \Rightarrow x \leq 2\ , \quad \text{c) } x^2 + y^2 \geq 1 \Rightarrow |x| \geq 1/2 \text{ oppure } |y| \geq 1/2.$$

2. Trovare degli insiemi A, B, C tali che $A \cap B$, $B \cap C$, $C \cap A$ non sono vuoti e $A \cap B \cap C$ lo è.
3. Calcolare la derivata di a) $2^{2x}4^{-x}$ e b) $\log\big(x/\sqrt{1+x^2}\big)$.
4. Scrivere lo sviluppo di Taylor in 0 all'ordine 13 (incluso) di $\dfrac{x}{1+x^4}$
5. Calcolare $\displaystyle\int_{-2}^{2} x^2 \cos(x^3)\, dx$.
6. Determinare la primitiva di $\log(1/x^2)$.
7. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x}{\tan x}$, b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^4 \log x$, c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^4)}{x^4 + 2x^5}$.
8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $0 \leq y$, $|x| \leq 1$ e $x - y \leq 1$.

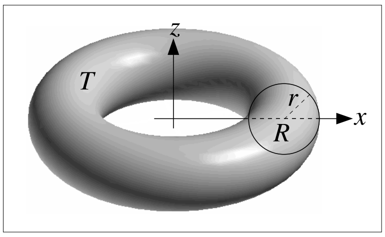
Seconda parte, gruppo A

1. Dato a parametro reale, si consideri l'equazione

$$e^{ax} = x\ .$$

a) Determinare il numero soluzioni al variare di $a \geq 0$.
b) Determinare il comportamento di queste soluzioni per $a \to 0^+$.
c) Sia x_a la maggiore delle soluzioni: dimostrare che $x_a \sim (-\log a)/a$ per $a \to 0^+$.

2. Sia T il toro di raggi R ed r (con $R > r$), vale a dire la figura solida ottenuta facendo ruotare un cerchio di raggio r attorno ad una retta che giace sullo stesso piano e che dista R dal centro del cerchio (nella figura si tratta dell'asse z).



   a) Disegnare le sezioni di T ad altezza z per $R = 3$, $r = 1$.
   b) Calcolare il volume di T per $R = 3$, $r = 1$.
   c) Calcolare il volume di T per R e r arbitrari.

3. Dato a parametro reale, si consideri l'equazione

$$x^3(2 + \sin x) = a \ .$$

   Dimostrare che il numero di soluzioni positive tende ad infinito per $a \to +\infty$.

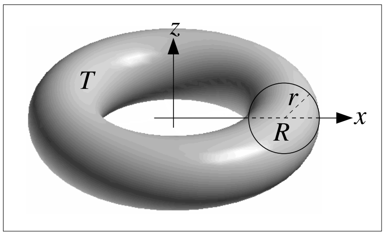
Seconda parte, gruppo B

1. Dato b parametro reale, si consideri l'equazione

$$\log(bx) = x \ .$$

   a) Determinare il numero soluzioni al variare di $b \geq 0$.
   b) Determinare il comportamento di queste soluzioni per $b \to +\infty$.
   c) Sia x_b la maggiore delle soluzioni: dimostrare che $x_b \sim \log b$ per $b \to +\infty$.

2. Sia T il toro di raggi R ed r (con $R > r$), vale a dire la figura solida ottenuta facendo ruotare un cerchio di raggio r attorno ad una retta che giace sullo stesso piano e che dista R dal centro del cerchio (nella figura si tratta dell'asse z).



   a) Disegnare le sezioni di T ad altezza z per $R = 2$, $r = 1$.
   b) Calcolare il volume di T per $R = 2$, $r = 1$.
   c) Calcolare il volume di T per R e r arbitrari.

3. Dato b parametro reale, si consideri l'equazione

$$x^4(2 + \sin x) = b \ .$$

   Dimostrare che il numero di soluzioni positive tende ad infinito per $b \to +\infty$.

PRIMO COMPITINO, MARTEDÌ 14 DICEMBRE 2004

PRIMA PARTE, GRUPPO A

1. Date f e g funzioni su $\mathbb{R}$, si ponga $A := \{x : f(x) > 2\}$, $B := \{x : g(x) \le 1\}$. Sia quindi C l'insieme degli x tali che vale $f(x) \le 2$ oppure $g(x) \le 1$ (ma non entrambe). Descrivere C in termini di A e B usando le solite operazioni insiemistiche.
2. Calcolare $\displaystyle\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\, dx$.
3. Determinare il dominio e calcolare la derivata prima di $f(x) := \log\left(e^{x^2+1}\sqrt{\dfrac{x+1}{5x^3}}\right)$.
4. Scrivere lo sviluppo di Taylor in 0 all'ordine n di $\log(1-x)$.
5. Determinare, al variare di $a > 0$, la parte principale per $x \to 0$ di $(1+x^2)^{1+a} - \cos(2x)$.
6. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\,(\sin 2)^x$, b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{3^x}{\sqrt{4^x+1}}$, c) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \sin(e^x)$.
7. Scrivere la soluzione generale dell'equazione $\ddot{y} + 4y = 0$.
8. Disegnare il grafico di $\log(1 + |x|)$.

PRIMA PARTE, GRUPPO B

1. Date f e g funzioni su $\mathbb{R}$, si ponga $A := \{x : f(x) > 3\}$, $B := \{x : g(x) \le 0\}$. Sia quindi C l'insieme degli x tali che vale $f(x) \le 3$ oppure $g(x) \le 0$ (ma non entrambe). Descrivere C in termini di A e B usando le solite operazioni insiemistiche.
2. Calcolare $\displaystyle\int \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\, dx$.
3. Determinare il dominio e calcolare la derivata prima di $f(x) := \log\left(e^{x^2-2}\sqrt{\dfrac{x+1}{5x^3}}\right)$.
4. Scrivere lo sviluppo di Taylor in 0 all'ordine $2n$ di $\log(1+x^2)$.
5. Determinare, al variare di $a > 0$, la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) := (1-x^2)^a - e^{(x^2)}$.
6. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{-1/2}\, 2^x$, b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{4^x}{\sqrt{9^x+1}}$, c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \tan(e^{-x})$.
7. Scrivere la soluzione generale dell'equazione $\ddot{y} - 4y = 0$.
8. Disegnare il grafico di $1 + |\log x|$.

SECONDA PARTE, GRUPPO A

1. Dati r, h numeri reali positivi tali che $r > h$, indichiamo con A l'insieme dei punti (x, y, z) tali che $x^2 + y^2 + z^2 \le r^2$ e $z \ge h$.
   a) Calcolare il volume di A.
   b) Fare un disegno approssimativo di A.
2. Dato a reale, si consideri la funzione $f(x) := \log x + a(x-1)^2$.
   a) Per quali valori di a la funzione f è invertibile su tutto il dominio?
   b) Determinare dominio e immagine dell'inversa (quando esiste).

3. Dato $n \geq 0$ intero, si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} - y \sin x \cos^n x = \sin x \cos^{2-n} x \\ y(0) = 0 \end{cases} .$$

a) Determinare la soluzione per $n = 0$.
b) Determinare la parte principale per $x \to 0$ della soluzione per $n = 0$.
c) Determinare la parte principale per $x \to 0$ della soluzione per n qualunque.

4. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione invertibile, ed indichiamo con $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la sua inversa. Dato $y \in \mathbb{R}$, poniamo $x := g(y)$.
a) Scrivere $D^2 g(y)$ in funzione di $D^2 f(x)$ e $Df(x)$.
b) Scrivere $D^3 g(y)$ in funzione di $D^3 f(x)$, $D^2 f(x)$ e $Df(x)$.

SECONDA PARTE, GRUPPO B

1. Dati r, h numeri reali positivi tali che $r > h$, indichiamo con A l'insieme dei punti (x, y, z) tali che $x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2$ e $z \geq r - h$.
a) Calcolare il volume di A.
b) Fare un disegno approssimativo di A.

2. Dato a reale, si consideri la funzione $f(x) := \log x + a(x-2)^2$.
a) Per quali valori di a la funzione f è invertibile su tutto il dominio?
b) Determinare dominio e immagine dell'inversa (quando esiste).

3. Dato $n \geq 0$ intero, si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} - y \sin x \cos^n x = \sin x \cos^{2-n} x \\ y(0) = 0 \end{cases} .$$

a) Determinare la soluzione per $n = 1$.
b) Determinare la parte principale per $x \to 0$ della soluzione per $n = 1$.
c) Determinare la parte principale per $x \to 0$ della soluzione per n qualunque.

4. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione invertibile, ed indichiamo con $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la sua inversa. Dato $y \in \mathbb{R}$, poniamo $x := g(y)$.
a) Scrivere $D^2 g(y)$ in funzione di $D^2 f(x)$ e $Df(x)$.
b) Scrivere $D^3 g(y)$ in funzione di $D^3 f(x)$, $D^2 f(x)$ e $Df(x)$.

Secondo compitino, Martedì 5 aprile 2005

Prima parte, gruppo A

1. Dare un esempio di funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ discontinua in ogni punto tale che $f(f(x))$ è continua in ogni punto.
2. Determinare le soluzioni complesse dell'equazione $(z^2 + 1)(z^4 + 4) = 0$.
3. Per quali interi $n \geq 0$ il numero $\big(\sqrt[3]{2}(1 + i)\big)^n$ è un intero positivo?
4. Quanti sono i numeri pari di tre cifre, tutte distinte e comprese tra 1 e 7?
5. Qual è la probabilità che tirando 8 monete escano (esattamente) 4 teste?
6. Dare un esempio di funzione continua e limitata $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che ammette minimo ma non massimo.
7. Per ogni $x > 0$ si ponga $I_x := \Big[\dfrac{1}{1+x}, \dfrac{1}{x}\Big]$. Dato $a > 0$, determinare $\displaystyle\bigcup_{0<x<a} I_x$ e $\displaystyle\bigcap_{0<x<a} I_x$.
8. Scrivere la negazione della seguente proposizione: *Per ogni modello di auto prodotto dall'industria A, l'industria B o la sua consociata C ne hanno prodotto un'altro che è più veloce.*

Prima parte, gruppo B

1. Dare un esempio di funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ discontinua in ogni punto tale che $f(f(x))$ è continua in ogni punto.
2. Determinare le soluzioni complesse dell'equazione $(z^2 - 1)(z^3 - 8i) = 0$.
3. Per quali interi $n \geq 0$ il numero $\big(\sqrt[4]{2}(1 - i)\big)^n$ è un numero razionale positivo?
4. Quanti sono i numeri dispari di tre cifre, tutte distinte e comprese tra 1 e 7?
5. Qual è la probabilità che tirando 10 monete escano (esattamente) 5 teste?
6. Dare un esempio di funzione continua e limitata $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che non ammette né minimo né massimo.
7. Per ogni $x > 0$ si ponga $I_x := \Big(\dfrac{1}{1+x}, \dfrac{1}{x}\Big)$. Dato $a > 0$, determinare $\displaystyle\bigcup_{0<x<a} I_x$ e $\displaystyle\bigcap_{0<x<a} I_x$.
8. Scrivere la negazione della seguente proposizione: *Per ogni modello di auto prodotto dall'industria A, l'industria B o la sua consociata C ne hanno prodotto un'altro che è più veloce.*

Seconda parte, gruppo A

1. Ad ogni $a, b \in \mathbb{R}$ sia associato il numero reale x_{ab}.
   a) Dimostrare che $\sup_b(\inf_a x_{ab}) \leq \inf_a(\sup_b x_{ab})$.
   b) È vero che $\inf_a(\sup_b x_{ab}) \leq \sup_b(\inf_a x_{ab})$? (dimostrarlo o dare un controesempio).
2. Fissato $\alpha > 0$ numero reale, sia (x_n) la successione definita per induzione da $x_1 := \alpha$ e

$$x_{n+1} := \frac{1}{2}\Big(x_n + \frac{4}{x_n}\Big) .$$

   a) Dimostrare che $x_n > 0$ per ogni $n \geq 1$.
   b) Dimostrare che $x_n \geq 2$ per ogni $n \geq 2$.

c) Calcolare il limite di x_n per $n \to +\infty$.

3. a) Siano $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ funzioni continue tali che $f(0) = g(1) = 0$ e $f(1) = g(0) = 1$. Dimostrare che per ogni $\lambda > 0$ esiste $x \in [0,1]$ tale che $f(x) = \lambda g(x)$.
   b) Siano $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ funzioni continue tali che $0 < g(x) < f(x)$ per ogni $x \in [0,1]$. Dimostrare che esiste $\mu > 0$ tale che $(1+\mu)g(x) \le f(x)$ per ogni $x \in [0,1]$.
   c) Far vedere che le conclusioni dei punti a) e b) possono non valere se f e g non sono entrambe continue.

4. Sia $y_n := \sin(\log n + 1/n)$. Dimostrare che per ogni $L \in [-1,1]$ esiste una sottosuccessione y_{n_k} che converge a L.

Seconda parte, gruppo B

1. Ad ogni $a, b \in \mathbb{R}$ sia associato il numero reale x_{ab}.
   a) Dimostrare che $\sup_a(\inf_b x_{ab}) \le \inf_b(\sup_a x_{ab})$.
   b) È vero che $\inf_b(\sup_a x_{ab}) \le \sup_a(\inf_b x_{ab})$? (dimostrarlo o dare un controesempio).

2. Fissato $\alpha > 0$ numero reale, sia (x_n) la successione definita per induzione da $x_1 := \alpha$ e
$$x_{n+1} := \frac{1}{2}\Big(x_n + \frac{9}{x_n}\Big) .$$
   a) Dimostrare che $x_n > 0$ per ogni $n \ge 1$.
   b) Dimostrare che $x_n \ge 3$ per ogni $n \ge 2$.
   c) Calcolare il limite di x_n per $n \to +\infty$.

3. a) Siano $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ funzioni continue tali che $f(0) = g(1) = 0$ e $f(1) = g(0) = 1$. Dimostrare che per ogni $\lambda > 0$ esiste $x \in [0,1]$ tale che $f(x) = \lambda g(x)$.
   b) Siano $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ funzioni continue tali che $0 < g(x) < f(x)$ per ogni $x \in [0,1]$. Dimostrare che esiste $\mu > 0$ tale che $(1+\mu)g(x) \le f(x)$ per ogni $x \in [0,1]$.
   c) Far vedere che le conclusioni dei punti a) e b) possono non valere se f e g non sono entrambe continue.

4. Sia $y_n := \sin(\log n + 1/n^2)$. Dimostrare che per ogni $L \in [-1,1]$ esiste una sottosuccessione y_{n_k} che converge a L.

TERZO COMPITINO, GIOVEDÌ 19 MAGGIO 2005

PRIMA PARTE, GRUPPO A

1. Calcolare, per ogni $x \in \mathbb{R}$, il valore di $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{2^n n!}$.

2. Calcolare il raggio di convergenza R della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^{5n^2}$.

3. Dire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ risulta finito l'integrale $\displaystyle\int_0^1 x^a e^x - x^{a-1} \sin x \, dx$.

4. Calcolare la primitiva di $\dfrac{2}{(x-1)(1+x^2)}$.

5. Dire per quali $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := \begin{cases} b - x^a & \text{per } x > 0 \\ 2\cos(bx) & \text{per } x \leq 0 \end{cases}$ è derivabile su $\mathbb{R}$.

6. Dire quali delle seguenti serie risultano convergenti:

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3 + 5\sin n}\ , \qquad \text{b)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n^6 + 5n + 10}\ , \qquad \text{c)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{5^n}\ .$$

7. Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale $D^3 y + 8y = 0$.

8. Determinare lo sviluppo di Taylor in 0 all'ordine 12 di $f(x) := x^3 - \sin(x^3 + x^8)$.

PRIMA PARTE, GRUPPO B

1. Calcolare, per ogni $x \in \mathbb{R}$, il valore di $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{5n+1}}{3^n n!}$.

2. Calcolare il raggio di convergenza R della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 5^n x^{n^3}$.

3. Dire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ risulta finito l'integrale $\displaystyle\int_0^1 x^{2a} e^{-x} - x^{2a-1} \sin x \, dx$.

4. Calcolare la primitiva di $\dfrac{2}{(x+1)(1+x^2)}$.

5. Dire per quali $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := \begin{cases} b - 4x^a & \text{per } x > 0 \\ 2\sin(bx^2) & \text{per } x \leq 0 \end{cases}$ è derivabile su $\mathbb{R}$.

6. Dire quali delle seguenti serie risultano convergenti:

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n + 5\sin(n^3)}\ , \qquad \text{b)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \log n}\ , \qquad \text{c)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5^n}{n!}\ .$$

7. Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale $D^3 y - 8y = 0$.

8. Determinare lo sviluppo di Taylor in 0 all'ordine 12 di $f(x) := x^3 - \sin(x^3 + x^7)$.

Seconda parte, gruppo A

1. a) Determinare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) := \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{1}{1+x}$.

   b) Dire per quali numeri reali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \Big[\frac{1}{n^a - 1} - \frac{1}{n^a + 1}\Big]$ converge.

   c) Calcolare il valore esatto della serie al punto b) quando $a = 1$.

2. Per ogni numero reale $t \geq 0$, si ponga

$$f(t) := \int_0^{+\infty} x^t e^{-2x}\, dx \tag{1}$$

   a) Dimostrare che l'integrale in (1) esiste ed è finito per ogni $t \geq 0$.
   b) Dimostrare che $f(t+1) = \frac{1}{2}(t+1)f(t)$ per ogni $t \geq 0$.
   c) Calcolare esplicitamente $f(n)$ per ogni n intero positivo.
   d) Dimostrare che f è derivabile per ogni $t \geq 0$, e determinarne la derivata.

3. Si consideri l'equazione differenziale lineare

$$\ddot{y} - \frac{\dot{y}}{x} - a\frac{y}{x^2} = b(x) \quad \text{per } x > 0, \tag{2}$$

   dove a è un numero reale e b una funzione definita per $x > 0$. Trovare la soluzione generale dell'equazione (2) nei seguenti casi:
   a) $a = 3$, e $b(x) = 0$. [*Suggerimento: cercare soluzioni della forma* $y = x^\lambda$.]
   b) $a = 3$, e $b(x) = x^2$. [*Suggerimento: cercare soluzioni della forma* $y = \alpha x^4$.]
   c) $a = 3$, e $b(x) = x$.
   d) $a = -2$, e $b(x) = 0$.

4. Date (a_n) e (b_n) successioni di numeri reali, indichiamo con (A_n) e (B_n) le rispettive successioni delle somme parziali, vale a dire

$$A_n := \sum_{k=1}^{n} a_k \quad \text{e} \quad B_n := \sum_{k=1}^{n} b_k \quad \text{per } n = 1, 2, \dots \tag{3}$$

   (ponendo convenzionalmente $A_0 := 0$ e $B_0 := 0$). Dimostrare i seguenti fatti:
   a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k B_k = A_n B_n - \sum_{k=1}^{n} A_{k-1} b_k$ per ogni $n \geq 1$ (formula di sommazione per parti);
   b) se $a_n := \sin n$, allora la successione (A_n) definita in (3) è limitata;
   c) la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n^\alpha}$ converge per ogni $\alpha > 0$;
   d) la serie al punto c) converge assolutamente se e solo se $\alpha > 1$.

Seconda parte, gruppo B

1. a) Determinare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) := 1 - \dfrac{1}{1+2x}$.

   b) Dire per quali numeri reali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \Big[\frac{1}{n^a} - \frac{1}{n^a + 2}\Big]$ converge.

c) Calcolare il valore esatto della serie al punto b) quando $a = 1$.

2. Per ogni numero reale $t \geq 0$, si ponga

$$f(t) := \int_0^{+\infty} x^t e^{-3x}\, dx \qquad (1)\ .$$

a) Dimostrare che l'integrale in (1) esiste ed è finito per ogni $t \geq 0$.
b) Dimostrare che $f(t+1) = \frac{1}{3}(t+1)f(t)$ per ogni $t \geq 0$.
c) Calcolare esplicitamente $f(n)$ per ogni n intero positivo.
d) Dimostrare che f è derivabile per ogni $t \geq 0$, e determinarne la derivata.

3. Si consideri l'equazione differenziale lineare

$$\ddot{y} - \frac{\dot{y}}{x} - a\frac{y}{x^2} = b(x) \quad \text{per } x > 0, \qquad (2)$$

dove a è un numero reale e b una funzione definita per $x > 0$. Trovare la soluzione generale dell'equazione (2) nei seguenti casi:
a) $a = 8$, e $b(x) = 0$. [*Suggerimento: cercare soluzioni della forma* $y = x^\lambda$.]
b) $a = 8$, e $b(x) = x$. [*Suggerimento: cercare soluzioni della forma* $y = \alpha x^3$.]
c) $a = 8$, e $b(x) = x^2$.
d) $a = -2$, e $b(x) = 0$.

4. Date (a_n) e (b_n) successioni di numeri reali, indichiamo con (A_n) e (B_n) le rispettive successioni delle somme parziali, vale a dire

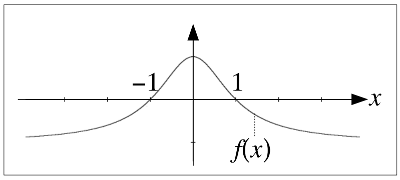
$$A_n := \sum_{k=1}^{n} a_k \quad \text{e} \quad B_n := \sum_{k=1}^{n} b_k \quad \text{per } n = 1, 2, \ldots \qquad (3)$$

(ponendo convenzionalmente $A_0 := 0$ e $B_0 := 0$). Dimostrare i seguenti fatti:
a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k B_k = A_n B_n - \sum_{k=1}^{n} A_{k-1} b_k$ per ogni $n \geq 1$ (formula di sommazione per parti);
b) Dimostrare che se $a_n := \cos n$, allora la successione (A_n) definita in (3) è limitata.
c) Dimostrare che la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n}{n^\alpha}$ converge per ogni $\alpha > 0$.
d) Dimostrare che la serie al punto c) converge assolutamente se e solo se $\alpha > 1$.

Scritto del I appello, Venerdì 10 giugno 2005

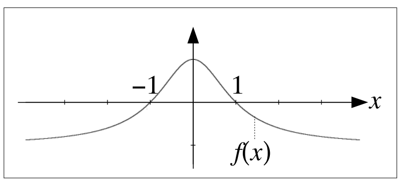
Prima parte, gruppo A

1. Dire quali delle seguenti funzioni sono derivabili su tutto $\mathbb{R}$:
$$\text{a) } 1-\sqrt{|x|}\ , \quad \text{b) } \sqrt{\sin^2 x}\ , \quad \text{c) } \sqrt{1+x^2}\ .$$
2. Determinare la soluzione generale dell'equazione $D^3y - D^2y + 4Dy - 4y = 2x$.
3. Calcolare $z = \dfrac{2+i}{1-i} + \dfrac{2-i}{1+i}$.
4. Si estraggono 2 biglie da un sacchetto che ne contiene 5 bianche e 2 nere. Qual è la probabilità che siano entrambe bianche?
5. Calcolare i seguenti limiti:
$$\text{a) } \lim_{x\to 0} \frac{\exp(x^6)-1}{x^2\sin(x^4)}\ , \quad \text{b) } \lim_{x\to+\infty} x^4 e^{-x}(\log x + 1)\ , \quad \text{c) } \lim_{x\to 1^+} \frac{x^x - 2}{\log x}\ .$$
6. Calcolare il raggio di convergenza ed il valore esatto della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n x^{2n-1}$.
7. Calcolare $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin x\, e^{-x}\, dx$.
8. Sia f la funzione in figura. Disegnare approssimativamente il grafico della *primitiva* F che si annulla in 0.



Prima parte, gruppo B

1. Dire quali delle seguenti funzioni sono derivabili su tutto $\mathbb{R}$:
$$\text{a) } \sqrt{|x|^4}\ , \quad \text{b) } 1+\sqrt{|x|}\ , \quad \text{c) } \sqrt{1-\cos^2 x}\ .$$
2. Determinare la soluzione generale dell'equazione $D^3y - D^2y - 4Dy + 4y = 3x$.
3. Calcolare $z = \dfrac{2+i}{1-i} - \dfrac{2-i}{1+i}$.
4. Si estraggono 2 biglie da un sacchetto che ne contiene 6 bianche e 4 nere. Qual è la probabilità che siano entrambe nere?
5. Calcolare i seguenti limiti:
$$\text{a) } \lim_{x\to 0} \frac{(\tan(x^3))^2}{x^2(1-\cos(x^2))}\ , \quad \text{b) } \lim_{x\to-\infty} (1+x^3)^{-2} e^x\ , \quad \text{c) } \lim_{x\to \pi^-} \frac{x^x - 2}{\sin x}\ .$$
6. Calcolare il raggio di convergenza ed il valore esatto della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n+1}$.
7. Calcolare $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin x\, e^{-2x}\, dx$.
8. Sia f la funzione in figura. Disegnare approssimativamente il grafico della *primitiva* F che si annulla in 0.



Scritto del I appello, Venerdì 10 giugno 2005

Prima parte, gruppo C

1. Dire quali delle seguenti funzioni sono derivabili su tutto $\mathbb{R}$:

$$\text{a) } 2\sqrt{1-\cos^2 x}\ , \quad \text{b) } \sqrt{e^x}\ , \quad \text{c) } \sqrt{x^6}\ .$$

2. Determinare la soluzione generale dell'equazione $D^3y + D^2y + 4Dy + 4y = x^2$.

3. Calcolare $z = \dfrac{1+2i}{1-i} + \dfrac{1-2i}{1+i}$.

4. Si estraggono 2 biglie da un sacchetto che ne contiene 3 bianche, 3 rosse e 4 nere. Qual è la probabilità che siano entrambe nere?

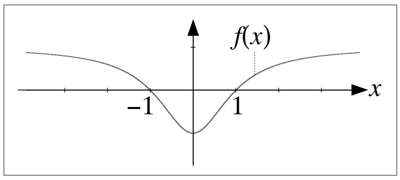
5. Calcolare i seguenti limiti:

$$\text{a) } \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \tan^3 x}{\exp(x^5)-1}\ , \quad \text{b) } \lim_{x\to+\infty} \frac{\log^2 x}{\log\log x}\ , \quad \text{c) } \lim_{x\to\pi^+} \frac{x^x+2}{\sin x}\ .$$

6. Calcolare il raggio di convergenza ed il valore esatto della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n x^{3n-1}$.

7. Calcolare $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos x\, e^{-x}\, dx$.

8. Sia f la funzione in figura. Disegnare approssimativamente il grafico della *primitiva* F che si annulla in 0.



Seconda parte, gruppo A

1. a) Dimostrare che $f(x) := x^5 - 2x^3 + 2x - 1$ è una funzione iniettiva su $\mathbb{R}$.
   b) Determinare l'immagine di f.
   c) Determinare lo sviluppo di Taylor all'ordine 2 di $f^{-1}(y)$ in 0.
   d) Determinare la parte principale di $f^{-1}(y)$ per $y \to +\infty$.

2. a) Determinare la parte principale per $x \to +\infty$ di $f(x) := \Big(1 + \dfrac{1}{x^2}\Big)^x - 1$.

   b) Determinare il comportamento della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$.

   c) Determinare il comportamento della serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left[\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{1+2n} - \Big(1-\frac{1}{n}\Big)^{1-2n}\right]$.

3. Date f e g funzioni continue su $[0,+\infty)$ con g strettamente positiva, indichiamo con F e G le primitive di f e g che si annullano in 0. Dimostrare che se la funzione f/g è monotona su $(0,+\infty)$, allora anche F/G è monotona su $(0,+\infty)$.

4. Dato a reale positivo, si consideri la successione

$$a_n := \underbrace{a^{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}}}_{n \text{ volte}} \qquad \text{per } n = 1, 2, \dots$$

(si ricordi che $b^{c^d} := b^{(c^d)}$).
a) Dimostrare che per $a > 1$ la successione (a_n) è crescente.
b) Dire per quali $a > 1$ la successione (a_n) ammette limite finito.
c) Determinare il comportamento di (a_n) per $a < 1$.

Seconda parte, gruppo B

1. a) Dimostrare che $f(x) := x^7 - x^4 + x - 1$ è una funzione iniettiva su $\mathbb{R}$.
   b) Determinare l'immagine di f.
   c) Determinare lo sviluppo di Taylor all'ordine 2 di $f^{-1}(y)$ in 0.
   d) Determinare la parte principale di $f^{-1}(y)$ per $y \to +\infty$.
2. a) Determinare la parte principale per $x \to +\infty$ di $f(x) := \Big(1 + \dfrac{1}{x^3}\Big)^x - 1$.
   b) Determinare il comportamento della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$.
   c) Determinare il comportamento della serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \bigg[\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^{1+2n} - \Big(1 - \frac{1}{n}\Big)^{1-2n}\bigg]$.
3. Date f e g funzioni continue su $[0, +\infty)$ con g strettamente positiva, indichiamo con F e G le primitive di f e g che si annullano in 0. Dimostrare che se la funzione f/g è monotona su $(0, +\infty)$, allora anche F/G è monotona su $(0, +\infty)$.
4. Dato a reale positivo, si consideri la successione

$$a_n := \underbrace{a^{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}}}_{n \text{ volte}} \qquad \text{per } n = 1, 2, \dots$$

   (si ricordi che $b^{c^d} := b^{(c^d)}$).
   a) Dimostrare che per $a > 1$ la successione (a_n) è crescente.
   b) Dire per quali $a > 1$ la successione (a_n) ammette limite finito.
   c) Determinare il comportamento di (a_n) per $a < 1$.

Seconda parte, gruppo C

1. a) Dimostrare che $f(x) := x^5 + 2x^3 + x - 4$ è una funzione iniettiva su $\mathbb{R}$.
   b) Determinare l'immagine di f.
   c) Determinare lo sviluppo di Taylor all'ordine 2 di $f^{-1}(y)$ in 0.
   d) Determinare la parte principale di $f^{-1}(y)$ per $y \to +\infty$.
2. a) Determinare la parte principale per $x \to +\infty$ di $f(x) := \Big(1 + \dfrac{1}{x^2}\Big)^{2x} - 1$.
   b) Determinare il comportamento della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$.
   c) Determinare il comportamento della serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \bigg[\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^{1+2n} - \Big(1 - \frac{1}{n}\Big)^{1-2n}\bigg]$.
3. Date f e g funzioni continue su $[0, +\infty)$ con g strettamente positiva, indichiamo con F e G le primitive di f e g che si annullano in 0. Dimostrare che se la funzione f/g è monotona su $(0, +\infty)$, allora anche F/G è monotona su $(0, +\infty)$.

4. Dato a reale positivo, si consideri la successione

$$a_n := \underbrace{a^{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}}}_{n \text{ volte}} \qquad \text{per } n = 1, 2, \dots$$

(si ricordi che $b^{c^d} := b^{(c^d)}$).
a) Dimostrare che per $a > 1$ la successione (a_n) è crescente.
b) Dire per quali $a > 1$ la successione (a_n) ammette limite finito.
c) Determinare il comportamento di (a_n) per $a < 1$.

Scritto del II appello, Venerdì 8 luglio 2005

Prima parte, gruppo A

1. Si prenda un numero intero n a caso tra 1000 e 9999 (inclusi). Qual è la probabilità che le cifre di n siano tutte distinte?
2. Determinare la soluzione dell'equazione $\dot{y} + xy = x$ che soddisfa $y(0) = 0$.
3. Dare esempi di successioni di numeri reali (x_n) tale che
a) $(x_n - x_{n+1}) \to 0$ e $x_n \to +\infty$;
b) $(x_n - x_{n+1}) \to 0$ e x_n non ha limite né finito né infinito.
4. Scrivere lo sviluppo di Taylor all'ordine due in 0 di $f(x) := \displaystyle\int_0^{4x} \frac{e^{t^2}}{1+t}dt$.
5. Calcolare l'area dell'insieme dei punti (x, y) tali che $x \le y \le \dfrac{x^5 + 3x}{x^4 + 1}$.
6. Dire quali delle seguenti serie convergono, e quali convergono assolutamente:
$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + n(-1)^n}{n^2}\ , \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + 2^{-n}}{n}\ , \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{1 + 3n + 2^n}\ .$$
7. Disegnare l'insieme A dei numeri complessi z tali che $|z| \le 2\,\mathrm{Re}(z)$.
8. Disegnare approssimativamente il grafico di $y = \dfrac{1}{1 + \sin x}$.

Prima parte, gruppo B

1. Si prenda un numero intero n a caso tra 100 e 999 (inclusi). Qual è la probabilità che le cifre di n siano tutte distinte?
2. Determinare la soluzione dell'equazione $\dot{y} - xy = x$ che soddisfa $y(0) = 0$.
3. Dare esempi di successioni di numeri reali (x_n) tale che
a) $(x_n - x_{n+1}) \to 0$ e $x_n \to +\infty$;
b) $(x_n - x_{n+1}) \to 0$ e x_n non ha limite né finito né infinito.
4. Scrivere lo sviluppo di Taylor all'ordine due in 0 di $f(x) := \displaystyle\int_0^{2x} \frac{e^{t^2}}{1-t}dt$.
5. Calcolare l'area dell'insieme dei punti (x, y) tali che $2x \le y \le \dfrac{2x^5 + 3x}{x^4 + 1}$.
6. Dire quali delle seguenti serie convergono, e quali convergono assolutamente:
$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + n(-1)^n}{n^3}\ , \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + 2^{n/5}}{n^4}\ , \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \sin^2 n}{1 + 3\log n + n}\ .$$
7. Disegnare l'insieme A dei numeri complessi z tali che $|z| \le 2\,\mathrm{Im}(z)$.
8. Disegnare approssimativamente il grafico di $y = \dfrac{1}{\sin x}$.

Scritto del II appello, Venerdì 8 luglio 2005

Seconda parte, gruppo A

1. Dato un numero reale $b > 0$, si consideri la funzione

$$f(x) := \sin x \, \cos(2x) - x^b \quad \text{per ogni } x \geq 0.$$

a) Determinare la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0$.

b) Dire per quali b l'integrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{x^{2b}}\, dx$ risulta finito.

c) Posto $b = 1$, calcolare $f(1/10)$ con un errore inferiore a 10^{-4}.

2. Siano dati un numero reale $a \neq 0$ ed una funzione continua $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Per ogni $t \in \mathbb{R}$, indichiamo con y la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = ay + b \\ y(0) = t \end{cases} .$$

Dimostrare che:

a) esiste t tale che $\displaystyle\int_0^{2\pi} y(x)\, dx = 0$;

b) se $\displaystyle\int_0^{2\pi} b(x)\, dx = 0$ e y è la soluzione di cui al punto a), allora $y(2\pi) = y(0)$;

c) se $b(x) = \sin x$, la soluzione di cui al punto a) è periodica di periodo 2π;

d) la conclusione in c) vale anche se b è periodica di periodo 2π e soddisfa $\displaystyle\int_0^{2\pi} b(x)\, dx = 0$.

3. Sia f una funzione di classe C^2 su $(0, +\infty)$ la cui derivata non si annulla mai. Per ogni $x > 0$, indichiamo con T_x il triangolo delimitato dagli assi coordinati e dalla retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa x. Determinare tutte le funzioni f per cui l'area di T_x risulta indipendente da x.

4. Sia f una funzione continua su $[0, \infty)$ e sia K un numero reale tale che

$$f(x) \leq K \int_0^x f(t)\, dt \quad \text{per ogni } x \geq 0.$$

a) Dimostrare che per $K \geq 0$ si ha $f \leq 0$ ovunque.

b) Dimostrare che per K qualunque la condizione $f \geq 0$ ovunque implica $f = 0$ ovunque.

c) È sempre vero che $f \leq 0$ ovunque?

Seconda parte, gruppo B

1. Dato un numero reale $b > 0$, si consideri la funzione

$$f(x) := \sin x \, \cos(3x) - x^b \quad \text{per ogni } x \geq 0.$$

a) Determinare la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0$.

b) Dire per quali b l'integrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{x^{2b}}\, dx$ risulta finito.

c) Posto $b = 1$, calcolare $f(1/10)$ con un errore inferiore a 10^{-4}.

2. Siano dati un numero reale $a \neq 0$ ed una funzione continua $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Per ogni $s \in \mathbb{R}$, indichiamo con y la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = ay + b \\ y(0) = s \end{cases} .$$

Dimostrare che:

a) esiste s tale che $\displaystyle\int_0^\pi y(x)\,dx = 0$;

b) se $\displaystyle\int_0^\pi b(x)\,dx = 0$ e y è la soluzione di cui al punto a), allora $y(\pi) = y(0)$;

c) se $b(x) = \sin(2x)$, la soluzione di cui al punto a) è periodica di periodo π;

d) la conclusione in c) vale anche se b è periodica di periodo π e soddisfa $\displaystyle\int_0^\pi b(x)\,dx = 0$.

3. Sia f una funzione di classe C^2 su $(0, +\infty)$ la cui derivata non si annulla mai. Per ogni $x > 0$, indichiamo con T_x il triangolo delimitato dagli assi coordinati e dalla retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa x. Determinare tutte le funzioni f per cui l'area di T_x risulta indipendente da x.

4. Sia f una funzione continua su $[0, \infty)$ e sia K un numero reale tale che

$$f(x) \leq K \int_0^x f(t)\,dt \quad \text{per ogni } x \geq 0.$$

a) Dimostrare che per $K \geq 0$ si ha $f \leq 0$ ovunque.

b) Dimostrare che per K qualunque la condizione $f \geq 0$ ovunque implica $f = 0$ ovunque.

c) È sempre vero che $f \leq 0$ ovunque?

SCRITTO DEL III APPELLO, LUNEDÌ 19 SETTEMBRE 2005

PRIMA PARTE, GRUPPO A

1. Disegnare l'insieme dei punti (x, y) nel piano tali che $y \geq x$ e $x^2 + y^2 \geq 2$.
2. Dire quali delle seguenti implicazioni sono corrette:
   a) $x^4 > 16 \Rightarrow x \geq 2$;
   b) $|x| \leq 1$ e $|y| \leq 1 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 3$;
   c) $\log_{1/2}(x+1) \geq 2 \Leftrightarrow x + 1 \leq 1/4$.
3. Calcolare $z = \big(-\sqrt{2} + i\sqrt{6}\big)^{-12}$.
4. Calcolare la derivata di $f(x) := (\sqrt{e})^{2\log x + \log(x^2+1)}$.
5. Dire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin x)^{1+a}(\cos x)^{1-a} dx$ è finito.
6. Calcolare i seguenti limiti:
$$\text{a) } \lim_{t\to 0} \frac{\sin(e^t)}{t^4}\ , \quad \text{b) } \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{1/10}}{\log\log x}\ , \quad \text{c) } \lim_{n\to+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}\ .$$
7. Determinare la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} \dot{y} = 2(1-x)e^y \\ y(1) = 0 \end{cases}$.
8. Disegnare il grafico della funzione $y = -1 + \dfrac{1}{(x-1)^2}$.

PRIMA PARTE, GRUPPO B

1. Disegnare l'insieme dei punti (x, y) nel piano tali che $y \leq x$ e $x^2 + y^2 \leq 2$.
2. Dire quali delle seguenti implicazioni sono corrette:
   a) $x^3 > 8 \Rightarrow x \geq 2$;
   b) $|x| \geq 2$ o $|y| \geq 2 \Rightarrow x^2 + y^2 \geq 3$;
   c) $\sin x \geq 1/2 \Rightarrow \pi/6 \leq x \leq 5\pi/6$.
3. Calcolare $z = \big(-\sqrt{6} + i\sqrt{2}\big)^{12}$.
4. Calcolare la derivata di $f(x) := (\sqrt{e})^{2\log x + \log(1-x^2)}$.
5. Dire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin x)^{1+a}(\cos x)^{1-a} dx$ è finito.
6. Calcolare i seguenti limiti:
$$\text{a) } \lim_{t\to 0} \frac{\log(\cos t)}{t^2}\ , \quad \text{b) } \lim_{x\to+\infty} e^{-x}2^x x^2\ , \quad \text{c) } \lim_{n\to+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}\ .$$
7. Determinare la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} \dot{y} = 2(1+x)e^y \\ y(1) = 0 \end{cases}$.
8. Disegnare il grafico della funzione $y = 1 + \dfrac{1}{(x+1)^3}$.

Scritto del III appello, Lunedì 19 settembre 2005

Seconda parte, gruppo A

1. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^2\ddot{y} + x\dot{y} - y = (\log x + 1)x \\ y(1) = 0 \\ \dot{y}(1) = 0 \end{cases}$$

[*Suggerimento: utilizzare il cambio di variabile* $x = e^t$.]

2. Sia V l'insieme dei punti dello spazio (x, y, z) tali che $|zx| + |y| \leq ze^{-z^2}$.
a) Disegnare, al variare di $z \in \mathbb{R}$, l'intersezione di V con il piano parallelo al piano xy e passante per $(0, 0, z)$.
b) Calcolare il volume di V.

3. Dato a numero reale positivo, si consideri la funzione $f(x) := e^x - ax^2 + ax$.
a) Determinarne l'immagine di f.
b) Dire per quali a la funzione f è strettamente crescente.

4. Siano I, J intervalli chiusi e limitati.
a) Data $f : I \to I$ continua, dimostrare che esiste $x \in I$ tale che $f(x) = x$.
b) Data $g : I \to J$ ed $h : J \to I$ continue, dimostrare che i grafici—visti come sottoinsiemi del prodotto $I \times J$—si intersecano.

Seconda parte, gruppo B

1. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^2\ddot{y} + x\dot{y} - 4y = (\log x + 2)x^2 \\ y(1) = 0 \\ \dot{y}(1) = 0 \end{cases}$$

[*Suggerimento: utilizzare il cambio di variabile* $x = e^t$.]

2. Sia V l'insieme dei punti dello spazio (x, y, z) tali che $|zx| + |y| \leq z^2e^{-z^2}$.
a) Disegnare, al variare di $z \in \mathbb{R}$, l'intersezione di V con il piano parallelo al piano xy e passante per $(0, 0, z)$.
b) Calcolare il volume di V.

3. Dato a numero reale positivo, si consideri la funzione $f(x) := e^x - ax^2 - ax$.
a) Determinarne l'immagine di f.
b) Dire per quali a la funzione f è strettamente crescente.

4. Siano I, J intervalli chiusi e limitati.
a) Data $f : I \to I$ continua, dimostrare che esiste $x \in I$ tale che $f(x) = x$.
b) Data $g : I \to J$ ed $h : J \to I$ continue, dimostrare che i grafici—visti come sottoinsiemi del prodotto $I \times J$—si intersecano.

Scritto del IV appello, Lunedì 9 gennaio 2006

Prima parte

1. Calcolare $z := \Big(\dfrac{15}{4+8i} + \dfrac{5}{4-8i}\Big)^{10}$.
2. Calcolare la derivata di $f(x) := \log\left(\dfrac{\sqrt[8]{x^4-1}}{\sqrt[4]{x^2+1}}\right)$.
3. a) Quanti sono i numeri di 4 cifre distinte, di cui le prime due dispari e le ultime due pari?
b) Quanti sono i numeri di 4 cifre distinte, di cui due dispari e due pari?
4. Calcolare i seguenti limiti:

$$\text{a)} \lim_{x\to+\infty} \frac{4^{2x}}{x^{20}10^x}\ , \quad \text{b)} \lim_{x\to 0} \frac{e^{-\sin^4 x} - \cos(x^4)}{x^2\sin(x^2)}\ , \quad \text{c)} \lim_{x\to 0^+} x\log^3 x + \log(\log(1/x))\ .$$

5. Dare un esempio di funzione continua $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ per cui in 0 non esistono né la derivata sinistra né quella destra.
6. Scrivere la serie di Taylor di $f(x) := \dfrac{1}{1+8x^3}$ in 0 e determinarne il raggio di convergenza.
7. Calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int x\sqrt{x^2+2}\,dx$.
8. Disegnare il grafico della funzione $y = -1 + \dfrac{1}{(1-x)^2}$.

Seconda parte

1. Sia (a_n) una successione di numeri *positivi* tali che

$$a_{m+n} \le \frac{n+m}{n\sqrt{m}} \quad \text{per ogni } n,m \ge 1 \text{ interi.} \qquad (*)$$

a) Dimostrare che (a_n) tende a 0 per $n\to+\infty$.
b) Dimostrare che esiste $c>0$ tale che $a_n \le c/\sqrt{n} + o(1/\sqrt{n})$ per ogni (a_n) che soddisfa $(*)$.
c) Determinare tutti i $c>0$ tali che $a_n \le c/\sqrt{n} + o(1/\sqrt{n})$ per ogni (a_n) che soddisfa $(*)$.

2. Si consideri la funzione $f(x) := \dfrac{1}{x^3} - \dfrac{1}{x}$.
a) Determinare le rette tangenti al grafico di f che passano per il punto $(0,2)$.
b) Determinare, al variare del parametro reale a, il numero delle rette tangenti al grafico di f che passano per il punto $(0,a)$.
3. Risolvere l'equazione differenziale $\dot y + y\tan x = 2\sin^3 x$ con dato iniziale $y(0)=2$.
4. Si consideri la successione

$$x_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \log k \quad \text{per } n = 1,2,\dots$$

a) Dimostrare che x_n tende a $+\infty$ per $n\to+\infty$.
b) Dimostrare che x_n è asintoticamente equivalente a $\log n$.
c) Stimare x_{100} con un errore inferiore a $0,1$ (sapendo che $\log 10 = 2{,}30 \pm 0,01$).

Scritto del V appello, Mercoledì 22 febbraio 2006

Prima parte

1. Dire se la funzione $f(x) := \big(\exp((x-1)^2)+2\big)^{-2}$ ammette punti di massimo e di minimo, ed in caso affermativo calcolarli.
2. Dare un esempio di funzione f tale che per ogni $a > 0$ si ha $a^x = o(f(x))$ per $x \to +\infty$.
3. Calcolare $\displaystyle\int_1^\infty x^2 e^{-x} dx$.
4. Determinare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) := \exp(x^3) - \exp(-x^3)$.
5. Calcolare il raggio di convergenza ed il valore della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^\infty \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.
6. Dire quali delle seguenti serie numeriche convergono:
$$\text{a) } \sum_{n=2}^\infty \frac{1}{\log^2 n}\ , \quad \text{b) } \sum_{n=1}^\infty \frac{n^3 \sin n}{2^n}\ , \quad \text{c) } \sum_{n=2}^\infty \frac{(-1)^n n}{n-1}\ .$$
7. Risolvere l'equazione differenziale $\dot y = \dfrac{1+y^2}{1+x^2}$ con la condizione iniziale $y(-1) = 1$.
8. Disegnare l'insieme dei numeri complessi z tali che $|z+8-4i| \geq 2|z+2-i|$.

Seconda parte

1. Si prenda un numero intero a caso di 8 cifre, comprese tra 1 e 9. Calcolare la probabilità che si verifichi ciascuna delle seguenti condizioni:
   a) le prime tre cifre sono 1 e le rimanenti sono diverse da 1;
   b) esattamente tre cifre sono uguali a 1;
   c) almeno tre cifre sono uguali a 1;
   d) tre cifre sono uguali a 1, tre sono uguali a 2, e le altre non sono né 1 né 2.
2. Sia V l'insieme dei punti (x, y, z) tali che $(|x| + |z|)^2 + y^2 \leq 1$.
   a) Dato $t \in \mathbb{R}$, descrivere l'intersezione di V con il piano di equazione $y = t$.
   b) Disegnare sommariamente V.
   c) Calcolare il volume di V.
3. a) Determinare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) := \exp(-x \sin x) - \cos(\sqrt{2}x)$.
   b) Dato $a > 0$, dimostrare che la successione $f(n^{-a})$ è definitivamente positiva.
   c) Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty f(n^{-a})$ converge.
   d) Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty (-1)^n f(n^{-a})$ converge.

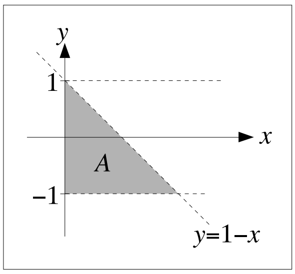
Elementi di Analisi Matematica, a.a. 2004/05 - Soluzioni

COMPITINO DI PROVA, 30 NOVEMBRE 2004

PRIMA PARTE, GRUPPO A

1. a) Vera, infatti $x \geq 3 \Leftrightarrow x^3 \geq 27$. b) Vera, infatti $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$. c) Falsa: non vale l'implicazione $x^2 + y^2 \geq 1 \Rightarrow |x| \geq 1$ e $|y| \geq 1$ (si prenda $x = y = \sqrt{2}/2$).
2. Per esempio $A := \{1, 2\}$, $B := \{2, 3\}$, $C := \{1, 3\}$.
3. a) $\big(x^{-1}\log(2^{2x})\big)' = (2\log 2)' = 0$.

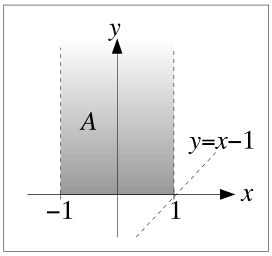
   b) $\big(\sin\big(x\sqrt{1+x^2}\big)\big)' = \cos\big(x\sqrt{1+x^2}\big)\dfrac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}$.
4. $\dfrac{x^4}{1-2x^3} = x^4\big(1 + 2x^3 + (2x^3)^2 + (2x^3)^3 + o((2x^3)^3)\big) = x^4 + 2x^7 + 4x^{10} + 8x^{13} + o(x^{13})$.
5. $\displaystyle\int_{-2}^{2} x^2 \sin(x^3)\,dx = 0$ perché l'integranda è pari e l'intervallo di integrazione è simmetrico.
6. Per parti: $\displaystyle\int x^5 \log x\,dx = \frac{x^6}{6}\log x - \int \frac{x^6}{6}\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^6}{6}\log x - \frac{x^6}{36} + c = \frac{x^6}{36}(6\log x - 1) + c$.
7. a) 1, b) $-\infty$, c) $+\infty$.
8. A è il triangolo di vertici $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(2, -1)$ – vedi figura.



PRIMA PARTE, GRUPPO B

1. a) Falsa, basta prendere $x = 3/2$. b) Vera, infatti $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$. c) Vera, infatti se $x^2 + y^2 \geq 1$ allora x^2 oppure y^2 deve essere maggiore di $1/2$.
2. Per esempio $A := \{1, 2\}$, $B := \{2, 3\}$, $C := \{1, 3\}$.
3. a) $\big(2^{2x}4^{-x}\big)' = \big(4^x 4^{-x}\big)' = (1)' = 0$.

   b) $\big(\log\big(x/\sqrt{1+x^2}\big)\big)' = \Big(\log x - \dfrac{1}{2}\log(1+x^2)\Big)' = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{1+x^2} = \dfrac{1}{x(1+x^2)}$.
4. $\dfrac{x}{1+x^4} = x\big(1 - x^4 + (x^4)^2 - (x^4)^3 + o((x^4)^3)\big) = x - x^5 + x^9 - x^{13} + o(x^{13})$.
5. Per sostituzione ($x^3 = t$): $\displaystyle\int_{-2}^{2} x^2\cos(x^3)\,dx = \frac{1}{3}\int_{-8}^{8}\cos t\,dt = \frac{1}{3}\Big|\sin t\Big|_{-8}^{8} = \frac{2}{3}\sin 8$.
6. $\displaystyle\int \log(1/x^2)\,dx = -2\int \log x\,dx = 2x(1 - \log x) + c$.
7. a) 1, b) $+\infty$, c) 1.
8. A è il rettangolo "infinito" $[-1, 1] \times [0, +\infty)$ – vedi figura.



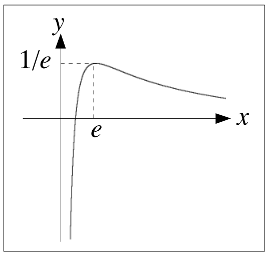
Seconda parte, gruppo A

1. a) L'equazione $e^{ax} = x$ si riscrive come $ax = \log x$, ovvero

$$f(x) = a \quad \text{dove si è posto } f(x) := \frac{\log x}{x} \ .$$

Studiamo la funzione f su $(0, +\infty)$: siccome $f'(x) = x^{-2}(1 - \log x)$, f risulta crescente per $0 < x < e$, raggiunge il valore massimo in $x = e$, e poi decresce per $x > e$. Inoltre

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty \ , \quad f(e) = 1/e \ , \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \ .$$



Come si può vedere nella figura accanto, nell'intervallo $[e, +\infty)$, l'equazione $f(x) = a$ non ammette soluzioni per $a > 1/e$ e per $a \leq 0$, ed ammette un'unica soluzione x_a per $0 < a \leq 1/e$. In particolare $x_a = e$ per $a = 1/e$ ed $x_a \to +\infty$ per $a \to 0^+$. Invece, nell'intervallo $(0, e]$ l'equazione $f(x) = a$ non ammette soluzioni per $a > 1/e$ ed ammette un'unica soluzione $\tilde{x}_a$ per $a \leq 1/e$. Inoltre $\tilde{x}_a = e$ per $a = 1/e$, ed essendo $f(1) = 0$ sappiamo anche che $\tilde{x}_a = 1$ per $a = 0$ e $\tilde{x}_a \geq 1$ per $a \geq 0$ e $\tilde{x}_a$ tende a 1 per $a \to 0$.

Riassumendo, l'equazione $f(x) = a$ non ammette soluzioni per $a > 1/e$, ammette una soluzione $x_a = \tilde{x}_a = e$ per $a = 1/e$, due soluzioni $1 < \tilde{x}_a < e < x_a$ per $0 < a < 1/e$, ed una sola soluzione $\tilde{x}_a = 1$ per $a = 0$. Inoltre $\tilde{x}_a \to 1$ e $x_a \to +\infty$ quando $a \to 0^+$, e questo risponde alla domanda b).

c) La relazione che lega a a x_a è $x_a^{-1} \log x_a = a$, da cui si ottiene che

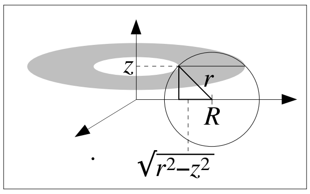
$$x_a = \frac{\log x_a}{a} \ . \tag{1}$$

Passando al logaritmo si ottiene anche che $-\log x_a + \log\log x_a = \log a$, e siccome $\log\log x = o(\log x)$ per $x \to +\infty$, se ne deduce che $-\log x_a + o(\log x_a) = \log a$ e quindi $-\log x_a \sim \log a$. Sostituendo nella (1) si ottiene finalmente

$$x_a \sim \frac{\log a}{a} \ .$$

2. a) Come si vede in figura, T_z è vuoto per $x > r$ e per $z < -r$, mentre per $-r \leq z \leq r$ è una corona circolare con raggio esterno $r_1 = R + \sqrt{r^2 - z^2}$ e raggio interno $r_2 = R - \sqrt{r^2 - z^2}$. In particolare,

$$\text{Area}(T_z) = \pi(r_1^2 - r_2^2) = 4\pi R\sqrt{r^2 - z^2} \ .$$

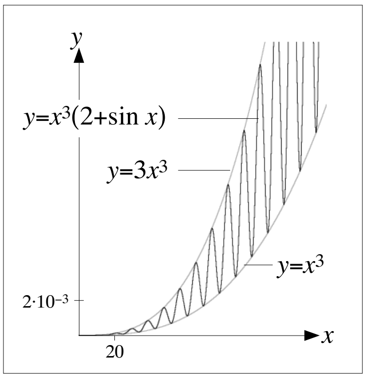


c) Utilizzando la formula precedente si ottiene

$$\text{Vol}(T) = \int_{-r}^{r} \text{Area}(T_z)\, dz = 4\pi R \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - z^2}\, dz$$

e con la sostituzione $z = r \sin t$ otteniamo

$$\text{Vol}(T) = 4\pi R r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\, dt = 4\pi R r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1 - \cos(2t)}{2}\, dt = 2\pi^2 R r^2 \ .$$



3. Osserviamo per cominciare che $f(x) = 3x^3$ quando x è della forma $\pi/2 + 2k\pi$ con k intero, mentre $f(x) = x^3$ quando x è della forma $-\pi/2 + 2k\pi$ con k intero. Fissato a positivo, abbiamo che $x^3 \le a \le 3x^3$ per ogni x nell'intervallo $I_a := [\sqrt[3]{a/3}, \sqrt[3]{a}]$, e quindi, preso k intero tale che
$$\pm\pi/2 + 2k\pi \in I_a \ ,$$
si ha che
$$f(-\pi/2 + 2k\pi) \le a \le f(\pi/2 + 2k\pi) \ .$$

   Dunque c'è almeno una soluzione x_k dell'equazione $f(x) = a$ compresa tra $-\pi/2 + 2k\pi$ e $\pi/2 + 2k\pi$, e siccome per valori di k distinti questi intervalli sono disgiunti, le soluzioni x_k sono diverse tra di loro. Non ci resta che osservare che il numero di interi k tali che $\pm\pi/2 + 2k\pi \in I_a$ tende ad infinito per $a \to +\infty$, ovvero che la lunghezza dell'intervallo I_a tende ad infinito: infatti
$$\lim_{a\to+\infty} \mathrm{Lungh}(I_a) = \lim_{a\to+\infty} \big(1 - 3^{-1/3}\big)a^{1/3} = +\infty \ .$$

SECONDA PARTE, GRUPPO B

1. a) Supponendo $b \ge 0$, l'equazione $\log(bx) = x$ si riscrive come $\log b = x - \log x$, ovvero
$$f(x) = b \quad \text{dove si è posto } f(x) := x - \log x \ .$$

   Studiamo la funzione f su $(0, +\infty)$: siccome $f'(x) = 1 - 1/x$, f risulta decrescente per $0 < x < 1$, raggiunge il valore minimo in $x = 1$, e poi cresce per $x > 1$. Inoltre
$$\lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty \ , \quad f(1) = 1 \ , \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \ .$$

   Pertanto, nell'intervallo $[1, +\infty)$, l'equazione $f(x) = \log b$ non ha soluzioni per $\log b < 1$, ed ha un'unica soluzione x_b per $\log b \ge 1$. In particolare $x_b = 1$ per $\log b = 1$ ed $x_b \to +\infty$ per $\log b \to +\infty$. Invece nell'intervallo $(0, 1]$ l'equazione $f(x) = \log b$ non ammette soluzioni per $\log b < 1$ ed ammette un'unica soluzione $\tilde{x}_b$ per $\log b \ge 1$. Inoltre $\tilde{x}_b = 1$ per $\log b = 1$ e $\tilde{x}_b$ tende a 0 per $\log b \to +\infty$.

   Riassumendo, l'equazione $f(x) = \log b$ non ammette soluzioni per $b < e$, ammette una soluzione $x_b = \tilde{x}_b = 1$ per $b = e$, due soluzioni $\tilde{x}_b < 1 < x_b$ per $e > 1$. Inoltre $\tilde{x}_b \to 0^+$ e $x_b \to +\infty$ quando $b \to +\infty$, e questo risponde alla domanda b).

   c) La relazione che lega b a x_b è $x_b - \log x_b = \log b$, e siccome $\log x = o(x)$ per $x \to +\infty$, se ne deduce che $x_b \sim x_b - \log x_b = \log b$.

2. Uguale al gruppo A.

3. Analogo al gruppo A.

Commenti

- Prima parte. Pochi hanno hanno svolto l'esercizio 4 ed ancor meno hanno risolto correttamente gli esercizi 1 e 8 (eppure sono tutti relativamente semplici).
- Seconda parte, esercizio 1. Una volta riscritta l'equazione nella forma $f(x) = a$ (ovvero $f(x) = b$ per il gruppo B) e disegnato il grafico di f, è facile rispondere sia alla domanda a) che alla domanda b). Curiosamente alcuni hanno avuto problemi proprio con quest'ultimo passaggio.
- Seconda parte, esercizio 1. Quasi nessuno ha risolto la parte c), che in effetti è abbastanza difficile (soprattutto con le attuali conoscenze).
- Seconda parte, esercizio 2. Molti hanno disegnato la sezione del toro T all'altezza $z = 0$, osservando correttamente che si tratta di una corona circolare di raggio esterno $R + r$ e raggio interno $R - r$, e quindi hanno deciso (non è chiaro perché) che le altre sezioni sono uguali. Questo sarebbe stato vero se T fosse stato ottenuto dalla rotazione di un *quadrato* attorno all'asse z, e non di un cerchio, vale a dire se T fosse stato un cilindro bucato, e non una ciambella. Fatto ancora più allarmante, alcuni hanno esplicitamente disegnato un cilindro bucato che non assomiglia per niente alla figura nel testo dell'esercizio!
- Seconda parte, esercizio 2. Tra quelli che si sono resi conto che la sezione di T ad altezza z è una corona circolare il cui raggio interno ed esterno dipendono da z, ci sono stati alcuni che non sono riusciti ad esplicitare correttamente tali raggi in funzione di z.
- Seconda parte, esercizio 2. Al momento di calcolare l'integrale $\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - z^2}\, dz$, alcuni hanno giustamente osservato che si tratta dell'area di un semicerchio di raggio r, ed è dunque uguale a $\pi r^2/2$.
- Seconda parte, esercizio 3. Ci sono state poche soluzioni che io ho trovato soddisfacenti. Molti sono arrivati per diverse vie a concludere che il fatto essenziale è che la lunghezza dell'intervallo $I_a := \{x : \ x^3 \le a \le 3x^3\}$ tende ad infinito per $a \to +\infty$ – per il gruppo B, si tratta invece dell'intervallo $I_b := \{x : \ x^4 \le b \le 3b^4\}$. In prima approssimazione ho considerato questa risposta sufficiente. Ci sono state poi molte dimostrazioni troppo vaghe per essere significative; per capire se la vostra rientra nel novero, provate ad applicare lo stesso ragionamento all'equazione $e^x(2+\sin x) = a$ oppure all'equazione $x^3(2+\sin(x^3)) = a$: se è possibile allora c'è qualcosa di storto, visto che in entrambi i casi il numero di soluzioni non tende ad infinito quando $a \to +\infty$.
- Seconda parte, esercizio 3. Alcuni hanno confuso l'equazione $x^3(2+\sin x) = a$ con l'equazione $x^3 \sin x = a$, che invece ha infinite soluzioni per ogni a.

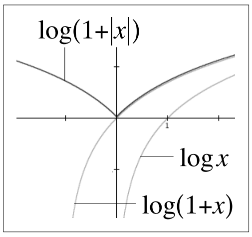
PRIMO COMPITINO, MARTEDÌ 14 DICEMBRE 2004

PRIMA PARTE, GRUPPO A

1. $A^c \triangle B = (A \cap B) \cup (A \cup B)^c = (A \cap B) \cup (A^c \cap B^c) = (A \triangle B)^c$.
2. Siccome $e^x - e^{-x} = (e^x + e^{-x})'$, si ha $\displaystyle\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dx = \log(e^x + e^{-x}) + c$ con $c \in \mathbb{R}$.
3. Il dominio di f consiste dei punti per cui l'argomento della radice è strettamente positivo (attenzione!), ovvero l'insieme degli x tali che $x < -1$ oppure $x > 0$. Semplificando f si ottiene poi

$$f'(x) = \Big(x^2+1+\frac{1}{2}\log(x+1)-\frac{1}{2}\log 5-\frac{3}{2}\log x\Big)' = 2x+\frac{1}{2(x+1)}-\frac{3}{2x} = \frac{4x^3+4x^2-2x-3}{2x(x+1)}\,.$$

4. $\log(1-x) = -\Big(x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \cdots + \dfrac{x^n}{n}\Big) + o(x^n)$.
5. $(1+x^2)^{1+a} - \cos(2x) = \big(1 + (1+a)x^2 + o(x^2)\big) - \big(1 - 2x^2 + o(x^3)\big) = (3+a)x^2 + o(x^2)$.
6. a) 0, b) $+\infty$, c) 0.
7. $y = a\cos(2x) + b\sin(2x)$ con $a, b \in \mathbb{R}$.
8. Si tratta del grafico del logaritmo traslato a sinistra di 1 e poi esteso per riflessione al semipiano della ascisse negative (vedi figura).

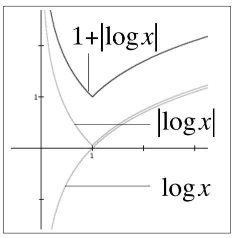


PRIMA PARTE, GRUPPO B

1. $A^c \triangle B = (A \cap B) \cup (A \cup B)^c = (A \cap B) \cup (A^c \cap B^c) = (A \triangle B)^c$.
2. Siccome $e^x + e^{-x} = (e^x - e^{-x})'$, si ha $\displaystyle\int \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\,dx = \log|e^x - e^{-x}| + c$ con $c \in \mathbb{R}$.
3. Il dominio di f consiste dei punti per cui l'argomento della radice è strettamente positivo, ovvero l'insieme degli x tali che $x < -1$ oppure $x > 0$. Semplificando f si ottiene poi

$$f'(x) = \Big(x^2-2+\frac{1}{2}\log(x+1)-\frac{1}{2}\log 5-\frac{3}{2}\log x\Big)' = 2x+\frac{1}{2(x+1)}-\frac{3}{2x} = \frac{4x^3+4x^2-2x-3}{2x(x+1)}\,.$$

4. $\log(1+x^2) = x^2 - \dfrac{x^4}{2} + \dfrac{x^6}{3} - \cdots + (-1)^{n+1}\dfrac{x^{2n}}{n} + o(x^{2n})$.
5. $(1-x^2)^a - e^{(x^2)} = \big(1 - ax^2 + o(x^2)\big) - \big(1 + x^2 + o(x^2)\big) = -(1+a)x^2 + o(x^2)$.
6. a) $+\infty$, b) $+\infty$, c) 0.
7. $y = ae^{2x} + be^{-2x}$ con $a, b \in \mathbb{R}$.
8. Si tratta del grafico del logaritmo "riflesso" rispetto all'asse delle ascisse e poi traslato in alto di 1 (vedi figura).

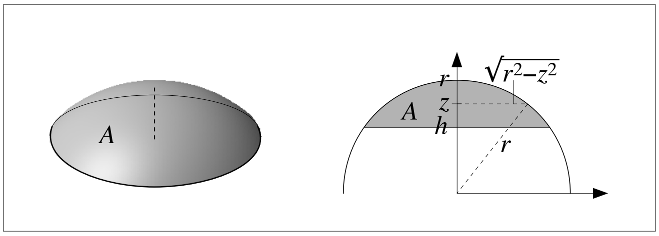


Primo compitino, Martedì 14 dicembre 2004

Seconda parte, gruppo A

1. L'insieme A è una "calotta sferica". La sezione A_z di A ad altezza z non è vuota solo per $h \le z \le r$ e consiste di un cerchio di raggio $\sqrt{r^2 - z^2}$. Pertanto

$$\mathrm{Vol}(A) = \int_h^r \mathrm{Area}(A_z)\, dz = \pi \int_h^r r^2 - z^2\, dz = \frac{\pi}{3}(2r + h)(r - h)^2 \ .$$



2. a) Il dominio di f è la semiretta $(0, +\infty)$. Per $a = 0$ la funzione f coincide con il logaritmo, che è invertibile. Ci occupiamo ora del caso $a \neq 0$. Affinché f sia invertibile come funzione dal suo dominio nella sua immagine, deve essere iniettiva, ovvero strettamente monotòna (crescente o decrescente). Ovvero la derivata deve avere segno costante. Siccome

$$f'(x) := \frac{1}{x} + 2a(x - 1) \ ,$$

si vede facilmente che il limite di f' per $x \to 0^+$ è $+\infty$, e quindi se f' deve avere segno costante, allora questo deve essere positivo. Osservando poi che il limite di $f'(x)$ per $x \to +\infty$ è $+\infty$ se $a > 0$ e $-\infty$ se $a < 0$ possiamo escludere sin da subito il caso $a < 0$. Non ci resta che vedere per quali $a > 0$ vale la disuguaglianza $f'(x) \ge 0$ per ogni $x > 0$, ovvero

$$x^2 - x + \frac{1}{2a} \ge 0 \quad \text{per ogni } x > 0. \tag{1}$$

Nel caso in cui le radici del polinomio di secondo grado in (1) siano reali e distinte, allora la maggiore è sicuramente positiva e la (1) non vale. Invece la (1) vale se le due radici del polinomio sono coincidenti o complesse coniugate, vale a dire $1 - 2/a \le 0$, ovvero $a < 2$.

Riassumendo, la funzione f ha derivata di segno costante (positivo) per ogni $x > 0$ se e solo se $0 < a \le 2$, e quindi risulta invertibile se e solo se $0 < a \le 2$ (a cui si aggiunge il caso $a = 0$ studiato a parte).

b) Il dominio di f^{-1} è l'immagine di f, e siccome f ha limite $-\infty$ per $x \to 0^+$ e limite $+\infty$ per $x \to +\infty$, l'immagine di f è tutto $\mathbb{R}$. L'immagine di f^{-1} è il dominio di f, ovvero la semiretta $(0, +\infty)$.

3. a) Per $n = 0$, l'equazione differenziale da risolvere diventa

$$\dot{y} - y \sin x = \sin x \cos^2 x \ . \tag{2}$$

Una primitiva di $-\sin x$ è $\cos x$ e quindi la soluzione generale di (2) è

$$y = e^{-\cos x} \int \sin x \cos^2 x\, e^{\cos x} dx \ ; \tag{3}$$

utilizzando il cambio di variabile $t = \cos x$, e poi integrando per parti due volte otteniamo

$$y = -1 - (1 - \cos x)^2 + ce^{-\cos x} \quad \text{con } c \in \mathbb{R}.$$

Imponendo la condizione $y(0) = 0$ otteniamo infine $c = e$, ovvero

$$y = -1 - (1 - \cos x)^2 + e^{1-\cos x} \ . \tag{4}$$

b) Su passa direttamente a c) oppure si applicano gli sviluppi di Taylor $e^y = 1 + y + o(y)$ e poi $1 - \cos x = x^2/2 + o(x^3)$ alla formula (4):

$$\begin{aligned} y &= -1 - (1 - \cos x)^2 + \big(1 + (1 - \cos x) + o(1 - \cos x)\big) \\ &= -1 - \Big(\frac{x^2}{2} + o(x^3)\Big)^2 + \Big(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3) + o\Big(\frac{x^2}{2} + o(x^3)\Big)\Big) \\ &= \frac{x^2}{2} + o(x^2) \end{aligned}$$

e quindi la parte principale di y per $x \to 0$ è $-x^2/2$.

c) Per n qualunque si ottiene una formula risolutiva per l'equazione differenziale in oggetto analoga alla (3), con la differenza che l'integrale non è calcolabile se non per particolari valori di n. Tuttavia, per scrivere lo sviluppo di Taylor della soluzione y in 0 non serve conoscere y esplicitamente, ma basta conoscerne i valori delle derivate in 0. Il problema di Cauchy che definisce y ci dice subito che

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ \dot y(0) = y(0) \, \sin 0 \, \cos^n 0 + \sin 0 \, \cos^{2-n} 0 = 0 \end{cases}$$

ma questo non ci basta per determinare la parte principale di y in 0.
Per ottenere il valore di $\ddot y$ in 0 deriviamo l'equazione $\dot y = y \, \sin x \, \cos^n x + \sin x \, \cos^{2-n} x$:

$$\ddot y = \dot y \, \sin x \, \cos^n x + y \, (\sin x \, \cos^n x)' + \cos^{3-n} x + (n-2) \sin^2 x \, \cos^{1-n} x$$

e siccome y, $\dot y$ e $\sin x$ si annullano per $x = 0$,

$$\ddot y(0) = 1 \ .$$

Quindi $y = x^2/2 + o(x^2)$ ovvero la parte principale di y è $x^2/2$.

4. Siccome g è l'inversa di f, abbiamo che per ogni $y \in \mathbb{R}$

$$Dg(y) = \frac{1}{Df(g(y))} = \big[Df(g(y))\big]^{-1} \ .$$

Derivando questa identità rispetto alla variabile y si ottiene

$$D^2 g(y) = -\big[Df(g(y))\big]^{-2} \cdot D^2 f(g(y)) \cdot Dg(y) = -D^2 f(g(y)) \cdot \big[Df(g(y))\big]^{-3} \ , \tag{5}$$

e derivando di nuovo

$$\begin{aligned} D^3 g(y) = {} & -D^3 f(g(y)) \cdot Dg(y) \cdot \big[Df(g(y))\big]^{-3} \\ & + D^2 f(g(y)) \cdot 3\big[Df(g(y))\big]^{-4} \cdot D^2 f(g(y)) \cdot Dg(y) \\ = {} & -D^3 f(g(y)) \cdot \big[Df(g(y))\big]^{-4} + 3\big[D^2 f(g(y))\big]^2 \cdot \big[Df(g(y))\big]^{-5} \ . \end{aligned} \tag{6}$$

Ponendo $g(y) = x$, dalla (5) e nella (6) ricaviamo infine

$$D^2 g(y) = -D^2 f(x) \cdot \big[Df(x)\big]^{-3}$$

e

$$D^3 g(y) = -D^3 f(x) \cdot \big[Df(x)\big]^{-4} + 3\big[D^2 f(x)\big]^2 \cdot \big[Df(x)\big]^{-5} \ .$$

Seconda parte, gruppo B

1. L'esercizio differisce da quello del gruppo A solo nel fatto che h viene scambiato con $r-h$. In particolare $\mathrm{Vol}(A) = \frac{\pi}{3}(3r-h)h^2$.
2. Lo svolgimento è analogo a quello del gruppo A; la funzione f risulta invertibile per $a \geq 1/2$.
3. a) Per $n = 1$, l'equazione differenziale da risolvere diventa $\dot{y} - y \sin x \cos x = \sin x \cos x$, ovvero
$$\dot{y} = \sin x \cos x(1+y) \ ,$$
che oltre ad essere un'equazione lineare è anche un'equazione a variabili separabili. Risolvendola come tale si ottiene $\log|1+y| = (\sin x)^2/2 + c$, e la condizione iniziale $y(0) = 0$ implica $c = 0$, ovvero
$$y = e^{\frac{1}{2}\sin^2 x} - 1 \ .$$
b) Applicando gli sviluppi di Taylor $e^y = 1 + y + o(y)$ e poi $\sin x = x + o(x)$ alla formula precedente si ottiene $y = 1 + \frac{1}{2}\sin^2 x + o\big(\frac{1}{2}\sin^2 x\big) - 1 = x^2/2 + o(x^2)$.
c) Uguale al gruppo A.
4. Uguale al gruppo A.

Commenti

- Prima parte, esercizio 3. Pochi si sono accorti che, siccome l'argomento del logaritmo deve essere strettamente positivo, allora anche l'argomento della radice deve deve essere strettamente positivo. Il dominio della funzione, quindi, non include il punto -1.
- Prima parte, esercizio 3. Alcuni hanno derivato la funzione senza semplificarla prima!
- Seconda parte. L'esercizio 1 è una variante del calcolo del volume della sfera svolto a lezione. Inspiegabilmente, diverse persone hanno ignorato la condizione $z \geq h$ nella definizione di A ed hanno quindi calcolato il volume della sfera.
- Seconda parte, esercizio 2. Molti hanno dato per scontato che per essere iniettiva una funzione deve essere crescente, mentre in generale potrebbe anche essere decrescente.
- Seconda parte, esercizio 2. Un punto delicato della discussione è questo: affinchè una funzione su $(0, +\infty)$ sia strettamente crescente la derivata deve essere strettamente positiva, oppure positiva con zeri isolati. In particolare il caso in cui la derivata è positiva ovunque e si annulla in un punto va bene (caso $a = 2$ per il gruppo A, caso $a = 1/2$ per il gruppo B).
- Seconda parte, esercizio 2. A differenza di quello che molti hanno scritto, affinché un polinomio monico di secondo grado $P(x)$ sia positivo o nullo per ogni $x > 0$ non è necessario che le soluzioni siano complesse (discriminante negativo), ma possono anche essere reali e coincidenti, o persino reali e distinte, purché non positive (nell'esercizio in oggetto quest'ultima possibilità non si verifica).
- Seconda parte, esercizio 3. Molti hanno trovato la soluzione y del problema di Cauchy orrettamente, ma, con mia sorpresa, hanno avuto problemi nel calcolarne della parte principale. Alcuni hanno trovato come parte principale una costante diversa da 0, in palese contraddizione con l'ipotesi $y(0) = 0$.
- Seconda parte, esercizio 4. Partendo dall'identità $g'(y) = 1/f'(x)$, molte persone hanno derivato a destra rispetto ad y e a sinistra rispetto ad x, mentre invece bisogna derivare sia a dostra che a sinistra rispetto ad y, e ricordare che x sta per $g(y)$.

Secondo compitino, Martedì 5 aprile 2005

Prima parte, gruppo A

1. Ad esempio la funzione di Dirichlet $f(x) := \begin{cases} 1 & \text{per } x \text{ razionale} \\ 0 & \text{per } x \text{ irrazionale} \end{cases}$. Infatti $f(f(x)) \equiv 1$.
2. Le soluzioni di $z^2 + 1 = 0$ sono le radici quadrate di -1, ovvero $\pm i$.
   Le soluzioni di $z^4 + 4 = 0$ sono le radici quarte di -4. Siccome $-4 = 4e^{\pi i}$, si tratta dei numeri ovvero $\sqrt{2}e^{(\pi/4 + k\pi/2)i}$ con $k = 0, 1, 2, 3$, ovvero $\pm 1 \pm i$.
3. Si ha che $z_n := \big(\sqrt[3]{2}(1+i)\big)^n = 2^{5n/6}e^{(n/4)\pi i}$.
   Quindi z_n è reale e positivo se e solo se $(n/4)\pi$ è un multiplo di 2π, ovvero n è un multiplo di 8. In tal caso $z_n = 2^{5n/6}$, che è intero se e solo se n è un multiplo di 6. Pertanto z_n è un intero positivo se e solo se n è un multiplo di 24, vale a dire $n = 0, 24, 48, 72, \dots$
4. $3 \cdot 6 \cdot 5 = 90$.
5. $P = \dfrac{1}{2^8}\dbinom{8}{4} = \dfrac{1}{2^8}\dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \dfrac{35}{128} \simeq 27\%$.
6. Ad esempio $f(x) := 1 - \dfrac{1}{1+x^2}$.
7. $\displaystyle\bigcup_{0<x<a} I_x = \Big(\frac{1}{1+a}, +\infty\Big)$; $\displaystyle\bigcap_{0<x<a} I_x = \begin{cases} [1, 1/a] & \text{per } a \le 1 \\ \varnothing & \text{per } a > 1 \end{cases}$.
8. *Esiste un modello di auto prodotto dall'industria A che è più veloce di ogni modello prodotto dalle industrie B e da C.*

Prima parte, gruppo B

1. Uguale al gruppo A.
2. Le soluzioni di $z^2 - 1 = 0$ sono le radici quadrate di 1, ovvero ± 1.
   Le soluzioni di $z^3 - 8i = 0$ sono le radici cubiche di $8i$. Siccome $8i = 8e^{\pi i/2}$, si tratta dei numeri ovvero $2e^{(\pi/6 + 2k\pi/3)i}$ con $k = 0, 1, 2$, ovvero $\pm\sqrt{3} + i$ e $-2i$.
3. Per quali interi $n \in \mathbb{Z}$ il numero $\big(\sqrt[4]{2}(1-i)\big)^n$ è un intero positivo?
   Si ha che $z_n := \big(\sqrt[4]{2}(1-i)\big)^n = 2^{3n/4}e^{-(n/4)\pi i}$.
   Quindi z_n è reale e positivo se e solo se $-(n/4)\pi$ è un multiplo di 2π, ovvero n è un multiplo di 8. In tal caso $z_n = 2^{3n/4}$, che è sempre razionale. Pertanto z_n è un intero positivo se e solo se n è un multiplo di 8, vale a dire $n = 0, 8, 16, 24, \dots$
4. $4 \cdot 6 \cdot 5 = 120$.
5. $P = \dfrac{1}{2^{10}}\dbinom{10}{5} = \dfrac{1}{2^{10}}\dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \dfrac{63}{256} \simeq 24\%$.
6. Per esempio $f(x) := \arctan x$.
7. $\displaystyle\bigcup_{0<x<a} I_x = \Big(\frac{1}{1+a}, +\infty\Big)$; $\displaystyle\bigcap_{0<x<a} I_x = \begin{cases} [1, 1/a] & \text{per } a < 1 \\ \varnothing & \text{per } a \ge 1 \end{cases}$.
8. Uguale al gruppo A.

Seconda parte, gruppo A

1. a) Chiaramente
$$x_{ab} \le \sup\nolimits_b x_{ab} \quad \text{per ogni } a, b \in \mathbb{R},$$

e quindi, prendendo l'estremo inferiore tra tutti gli $a \in \mathbb{R}$,

$$\inf_a x_{ab} \leq \inf_a(\sup_b x_{ab}) \quad \text{per ogni } b \in \mathbb{R}.$$

Infine, prendendo l'estremo superiore tra tutti i $b \in \mathbb{R}$,

$$\sup_b(\inf_a x_{ab}) \leq \inf_a(\sup_b x_{ab}) \ .$$

b) Falso. Posto infatti

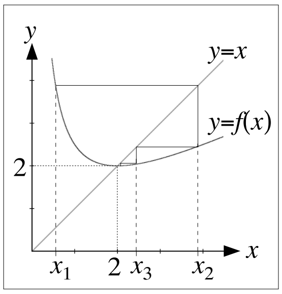
$$x_{ab} := \begin{cases} 1 & \text{se } a, b \geq 0 \text{ oppure } a, b < 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} ,$$

abbiamo che

$$\inf_a(\sup_b x_{ab}) = \inf_a 1 = 1 \ , \quad \sup_b(\inf_a x_{ab}) = \sup_b 0 = 0 \ .$$

2. Abbiamo che $x_{n+1} = f(x_n)$ dove si è posto

$$f(x) := \frac{1}{2}\Big(x + \frac{4}{x}\Big) \ .$$



Tracciando il grafico di f e facendo il "solito" disegno si conclude velocemente che la successione x_n risulta decrescente e limitata inferiormente da 2 per ogni $n \geq 2$ (escluso quindi il primo valore, che può anche essere inferiore a 2).

b) Si verifica tramite un calcolo diretto che $f(x) \geq 2$ per ogni $x > 0$. Possiamo ora dimostrare per induzione su n che $x_n \geq 2$ per ogni $n \geq 2$ (ed abbiamo così dimostrato anche l'enunciato a)): infatti, l'ipotesi $x_1 := \alpha > 0$ implica $x_2 = f(x_1) \geq 2$, mentre l'ipotesi induttiva $x_n \geq 2$ implica $x_{n+1} := f(x_n) \geq 2$.

c) Si verifica tramite un calcolo diretto che $x - f(x) \geq 0$ per ogni $x \geq 2$. Ne consegue che $x_n \geq f(x_n) = x_{n+1}$ per ogni $n \geq 2$, ovvero la successione x_n è decrescente per $n \geq 2$. In particolare, essendo $x_n \geq 2$, la successione deve ammettere un limite finito $L \geq 2$, e tale limite deve soddisfare l'equazione $L = f(L)$. Un semplice conto mostra che l'unica possibilità è $L = 2$.

3. a) Si ponga $F(x) := f(x) - \lambda g(x)$. Tale funzione è continua, vale $-\lambda$ in 0 e 1 in 1. Quindi, per il teorema di esistenza degli zeri, deve esistere x compreso tra 0 e 1 tale che $F(x) = 0$, ovvero $f(x) = \lambda g(x)$.

b) Si consideri la funzione $F(x) := f(x)/g(x)$. Poiché $g(x) > 0$, tale funzione è ben definita e continua per ogni $x \in [0, 1]$. Inoltre $F(x) > 1$ per ogni x perché $f(x) > g(x)$. Per il teorema di Weierstrass, F ammette un valore minimo m, che per quanto detto deve essere *strettamente* maggiore di 1. Ne consegue che $m\, g(x) \leq f(x)$.

c) Per quanto riguarda il punto a), si consideri il seguente controesempio:

$$f(x) := x \ , \quad g(x) := \begin{cases} 1 & \text{per } x = 0 \\ 0 & \text{per } 0 < x \leq 1 \end{cases} .$$

Si vede subito che l'equazione $f(x) = \lambda g(x)$ non ammette soluzioni per alcun $\lambda > 0$.
Per quanto riguarda il punto b), si consideri invece quest'altro:

$$f(x) := 1 \ , \quad g(x) := \begin{cases} x & \text{per } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{per } x = 1 \end{cases} .$$

Siccome $\sup g = \sup f = 1$, ne consegue che $\sup(1+\mu)g > \sup f$ per ogni $\mu > 0$, per cui non si può avere $(1+\mu)g \le f$.

4. Dimostriamo l'enunciato per ogni successione della forma $y_n := \sin(x_n)$ dove (x_n) è una successione crescente che tende a $+\infty$ e soddisfa
$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} - x_n = 0 \tag{1}$$
(si verifica che $x_n := \log n + 1/n$ e $x_n := \log n + 1/n^2$ soddisfano queste condizioni).
Dato $L \in [-1,1]$, prendiamo $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$ tale che $L = \sin\alpha$, e cerchiamo di costruire una sottosuccessione (x_{n_k}) tale che
$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} - (\alpha + 2k\pi) = 0\ . \tag{2}$$
Prima di procedere con la costruzione, verifichiamo che la (2) è sufficiente a concludere: siccome $x_{n_k} - 2k\pi$ converge ad α, ricordando la periodicità e continuità della funzione $\sin x$ otteniamo
$$\sin(x_{n_k}) = \sin(x_{n_k} - 2k\pi) \to \sin\alpha = L\ .$$
Per costruire la sottosuccessione (x_{n_k}) che soddisfa la (2), procediamo come segue: per ogni intero k poniamo
$$n_k := \min\{n : \alpha + 2k\pi \le x_n\}\ . \tag{3}$$
Siccome x_n tende a $+\infty$, l'insieme in (3) non è vuoto, e quindi ammette minimo. Inoltre, per la minimalità di n_k si ha necessariamente che $x_{n_k-1} < \alpha + 2k\pi$ (in effetti questo è vero a patto che n_k sia maggiore di 1, cosa che comunque è vera da un certo punto in poi, e cioè per tutti i k tali che $x_1 < \alpha + 2k\pi$). Dunque
$$x_{n_k-1} \le \alpha + 2k\pi \le x_{n_k}\ , \tag{4}$$
ovvero $x_{n_k} - (\alpha + 2k\pi) \le x_{n_k} - x_{n_k-1}$, e ricordando la condizione (1) si ottiene la (2).
La dimostrazione sarebbe completa se la successione (n_k) fosse strettamente crescente, e definisse quindi una vera e propria sottosuccessione di (x_n). Ma non è detto che così sia. Tuttavia possiamo dimostrare che n_k è strettamente crescente da un certo punto in poi, e basta quindi "eliminarne" i primi termini. Per la precisione, per via della (1), esiste $\bar n$ tale che $x_n - x_{n-1} \le 2\pi$ per ogni $n \ge \bar n$, e preso $\bar k$ tale che
$$\max\{x_1, \dots, x_{\bar n}\} < \alpha + 2\bar k\pi\ ,$$
si ha che n_k è strettamente crescente per $k \ge \bar k$: siccome x_n è crescente per ipotesi, non è difficile verificare che la successione (n_k) deve essere crescente, anche se non strettamente, e se per qualche k si avesse $n_k = n_{k+1}$, avremmo anche che (cfr. (4))
$$x_{n_k-1} < \alpha + 2k\pi \le \alpha + 2(k+1)\pi \le x_{n_k}$$
da cui segue che $x_{n_k} - x_{n_k-1} > 2\pi$, ma questo è possibile solo se $n_k < \bar n$, ovvero $k < \bar k$.

SECONDA PARTE, GRUPPO B

1. Analogo al gruppo A: sono solo stati scambiati i ruoli di a e b.
2. Analogo al gruppo A: in questo caso il limite è 3.
3. Uguale al gruppo A.
1. Uguale al gruppo A.

COMMENTI

- Prima parte, esercizio 5. Nella formulazione originale per il gruppo A, l'esercizio poteva essere interpretato come cercare la probabilità che escano *almeno* 4 teste (5 teste per il gruppo B). In tal caso la risposta è
$$P = \frac{1}{2^8}\left[\binom{8}{4} + \binom{8}{5} + \cdots + \binom{8}{8}\right] = \frac{163}{256} \simeq 64\%$$
per il gruppo A, mentre per il gruppo B
$$P = \frac{1}{2^{10}}\left[\binom{10}{5} + \binom{10}{6} + \cdots + \binom{10}{10}\right] = \frac{319}{512} \simeq 62\% \ .$$
- Seconda parte, esercizio 1: sorprendentemente, nessuno ha svolto la parte b), e pochi hanno risolto correttamente la parte a).
- Seconda parte, esercizio 3b). Nell'impostare una dimostrazione per assurdo, molti hanno negato la tesi in modo errato, concludendo che esiste x tale che per ogni $\mu > 0$ si ha $f(x) < (1+\mu)g(x)$, mentre in realtà x non è unico, ma dipende da μ.
- Seconda parte, esercizio 3b). Sembra essere opinione diffusa che $g < f$ implica $\sup g \leq \inf f$, ed anche che $g > 0$ implica $\inf g > 0$ (è invece corretto dedurne che $\min g > 0$, a patto di sapere che il minimo esiste).
- Seconda parte, esercizio 3c). Molti hanno argomentato la necessità della continuità di f e g osservando che l'avevano utilizzata per la dimostrazione di a) e b). Ma questo non è un ragionamento corretto: potrebbero esistere dimostrazioni alternative di a) e b) che non richiedono la continuità.
- Seconda parte, esercizio 3c). Il controesempio all'enunciato a) dato nella soluzione funzione contemporaneamente per tutti i valori di $\lambda > 0$, ma sarebbe bastato che funzionasse per uno solo. Noi ci siamo limitati a far vedere che la continuità di g è necessaria, ma con esempi analoghi si fa vedere che anche quella di f lo è.
- Seconda parte, esercizio 4. Sembra opinione diffusa che una successione decrescente di numeri positivi debba tendere a zero.
- Seconda parte, esercizio 4. In diversi hanno citato il teorema di Bolzano-Weierstrass, per cui ogni successione limitata ammette una sottosuccessione convergente ad un certo limite L: si dovrebbe però notare che questo L non può essere scelto ad arbitrio! (in particolare, se la successione converge, allora di tali L ce n'è uno solo).
- Seconda parte, esercizio 4. Un modo per aggirare il problema finale della dimostrazione, e cioè che la successione n_k può non essere strettamente crescente, è far vedere che necessariamente n_k tende a $+\infty$, e quindi utilizzare il fatto che ogni successione che tende a $+\infty$ ammette una sottosuccessione strettamente crescente. Per questa via, non si utilizza neanche l'ipotesi che (x_n) sia crescente, ma solo che tende a $+\infty$ e soddisfa la (1).

Terzo compitino, Giovedì 19 maggio 2005

Prima parte, gruppo A

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{2^n n!} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^3/2)^n}{n!} = x \exp(x^3/2)$.

2. $1/R = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[5n^2]{3^n} = \limsup_{n\to+\infty} 3^{1/5n} = 1$, e quindi $R = 1$.

3. Siccome $x^a e^x - x^{a-1} \sin x = x^a(1 + x + o(x)) - x^{a-1}(x + o(x^2)) = x^{a+1}(1 + o(1)) \sim x^{a+1}$, l'integrale risulta finito se e solo se $a + 1 > -1$, ovvero $a > -2$.

4. $\displaystyle\int \frac{2}{(x-1)(1+x^2)} dx = \int \frac{1}{x-1} - \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1}\, dx = \log|x-1| - \frac{1}{2}\log(x^2+1) - \arctan x$.

5. La funzione è derivabile infinite volte per $x \neq 0$. Per $a > 0$, f è continua in 0 se e solo se $b = 2$, ed è derivabile se e solo se, in aggiunta, $a > 1$. Per $a = 0$, f è continua in 0 se e solo se $b = 3$, ed in tal caso è anche derivabile. Infine, per $a < 0$, la funzione non può mai essere continua in 0. Riassumendo, i valori ammissibili sono $b = 2$ e $a > 1$, e $b = 3$ e $a = 0$.

6. a) Converge perché asintoticamente equivalente a $1/n^3$. b) Diverge a $+\infty$ perché il termine generico della serie tende a $+\infty$. c) Diverge a $+\infty$ per il criterio del rapporto.

7. Il polinomio caratteristico è $\lambda^3 + 8 = 0$, ed ha soluzioni -2 e $1 \pm \sqrt{3}i$. Pertanto la soluzione generale è
$$y = ae^{-2x} + e^x\big(b\cos(\sqrt{3}x) + c\sin(\sqrt{3}x)\big) \quad \text{con } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

8. $x^3 - \sin(x^3 + x^8) = x^3 - (x^3 + x^8) + \dfrac{1}{6}(x^3 + x^8)^3 + o(((x^3 + x^8)^4) = -x^8 + \dfrac{x^9}{6} + o(x^{12})$.

Prima parte, gruppo B

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{5n+1}}{3^n n!} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^5/3)^n}{n!} = x \exp(x^5/3)$.

2. $1/R = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n^3]{5^n} = \limsup_{n\to+\infty} 5^{1/n^2} = 5^0 = 1$, e quindi $R = 1$.

3. Siccome $x^{2a} e^{-x} - x^{2a-1} \sin x = x^{2a}(1 - x + o(x)) - x^{2a-1}(x + o(x^2)) = -x^{2a+1}(-1 + o(1)) \sim -x^{2a+1}$, l'integrale risulta finito se e solo se $2a + 1 > -1$, ovvero $a > -1$.

4. $\displaystyle\int \frac{2}{(x+1)(1+x^2)} dx = \int \frac{1}{x+1} - \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}\, dx = \log|x+1| - \frac{1}{2}\log(x^2+1) + \arctan x$.

5. La funzione è derivabile infinite volte per $x \neq 0$. Per $a > 0$, f è continua in 0 se e solo se $b = 0$, ed è derivabile se e solo se, in aggiunta, $a > 1$. Per $a = 0$, f è continua in 0 se e solo se $b = 4$, ed in tal caso è anche derivabile. Infine, per $a < 0$, la funzione non può mai essere continua in 0. Riassumendo, i valori ammissibili sono $b = 0$ e $a > 1$, e $b = 4$ e $a = 0$.

6. a) Diverge perché asintoticamente equivalente a $1/n$. b) Diverge a $+\infty$ per il criterio del confronto integrale. c) Converge per il criterio del rapporto.

7. Il polinomio caratteristico è $\lambda^3 - 8 = 0$, ed ha soluzioni 2 e $-1 \pm \sqrt{3}i$. Pertanto la soluzione generale è
$$y = ae^{2x} + e^{-x}\big(b\cos(\sqrt{3}x) + c\sin(\sqrt{3}x)\big) \quad \text{con } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

8. $x^3 - \sin(x^3 + x^7) = x^3 - (x^3 + x^7) + \dfrac{1}{6}(x^3 + x^7)^3 + o(((x^3 + x^7)^4) = -x^7 + \dfrac{x^9}{6} + o(x^{12})$.

Seconda parte, gruppo A

1. a) $f(x) := \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{1}{1+x} = (1 + x + o(x)) - (1 - x + o(x)) = 2x + o(x) \sim 2x.$

   b) Il termine generico della serie soddisfa

$$\frac{1}{n^a - 1} - \frac{1}{n^a + 1} = \frac{1}{n^a}\Big[\frac{1}{1 - n^{-a}} - \frac{1}{1 + n^{-a}}\Big] \sim \frac{2}{n^{2a}} \ ,$$

   e pertanto la serie converge se e solo se $2a > 1$, ovvero $a > 1/2$.

   c) Scrivendo tutti gli addendi di una somma parziale di indice abbastanza grande si vede che abbiamo a che fare con una serie di tipo telescopico, in cui si cancellano tutti gli addendi tranne 1 e $1/2$. Più precisamente, si dimostra (per induzione su n) che

$$S_n := \sum_{k=2}^{n} \Big[\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\Big] = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \ .$$

   Dunque le somme parziali S_n convergono a $3/2$.

2. a) Siccome $x^t = o(e^x)$ per ogni $t > 0$, l'integrando in (1) risulta essere $x^t e^{-2x} = o(e^{-x})$ per $x \to +\infty$, e quindi l'integrale è finito per il teorema del confronto asintotico.

   b) Integrando per parti si ottiene

$$\int_0^a x^t e^{-2x}\, dx = \Big| \frac{x^{t+1}}{t+1} e^{-2x} \Big|_0^a + \frac{2}{t+1} \int_0^a x^{t+1} e^{-2x}\, dx$$

   e passando al limite per $a \to +\infty$ si ottiene appunto

$$f(t) = \frac{2}{t+1} f(t+1) \ .$$

   c) Tramite un calcolo diretto si verifica che $f(0) = 1/2$, ed usando quindi la relazione ricorsiva $f(n+1) = \frac{1}{2}(n+1)f(n)$ si dimostra (per induzione su n) che

$$f(n) = \frac{n!}{2^{n+1}} \ .$$

   d) Scriviamo lo sviluppo di Taylor all'ordine 1 con resto di Lagrange di x^{t+h}:

$$x^{t+h} = x^t \exp(h \log x) = x^t \Big(1 + h \log x + \frac{1}{2} h^2 e^\xi \log^2 x\Big)$$

   con $\xi = \xi(x, t, h)$ compreso tra 0 e $h \log x$. Sostituendo questa espressione nell'integrale che definisce la funzione f otteniamo

$$\begin{aligned} f(t+h) &:= \int_0^\infty x^t \Big(1 + h \log x + \frac{1}{2} h^2 e^\xi \log^2 x\Big) e^{-2x}\, dx \\ &= f(t) + h \underbrace{\int_0^\infty x^t e^{-2x} \log x\, dx}_{(I)} + \frac{h^2}{2} \underbrace{\int_0^\infty x^t e^{-2x} e^\xi \log^2 x\, dx}_{(II)} \ . \end{aligned}$$

Se gli integrali impropri (I) e (II) sono effettivamente finiti, allora questa formula dimostra che f è derivabile in t, e che

$$f'(t) := \int_0^\infty x^t e^{-2x} \log x \, dx \ .$$

L'integrale (I) è converge assolutamente perché la funzione integranda è $o(e^{-x})$ per $x \to +\infty$, ed è asintoticamente equivalente a $x^t \log x$ per $x \to 0$ (ed è quindi una funzione infinitesima per $t > 0$ ed integrabile per $t = 0$). Analogo ragionamento si applica all'integrale (II), a patto di avere una buona maggiorazione per il termine e^ξ. Se $h \log x$ è negativo, anche ξ è negativo, e quindi $e^\xi \leq 1$; invece se $h \log x$ è positivo, allora $\xi \leq h \log x$ e quindi $e^\xi \leq e^{h \log x} = x^h$. In entrambe i casi abbiamo $e^\xi \leq 1 + x^h$, e questo basta a far vedere che l'integrale (II) converge.

3. a) Con la sostituzione $y = x^\lambda$, l'equazione (2) con $a = 3$ e $b = 0$ diventa

$$\big(\lambda(\lambda-1) - \lambda - 3\big)x^{\lambda-2} = 0 \quad \text{per ogni } x > 0,$$

ed è verificata se e solo se $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$, ovvero $\lambda = 3, -1$. Dunque x^3 e x^{-1} sono soluzioni dell'equazione, ed essendo linearmente indipendenti (non sono una multiplo dell'altra) generano tutte le soluzioni dell'equazione omogenea in oggetto, ovvero

$$y = ax^{-1} + bx^3 \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R}.$$

b) Basta trovare una soluzione particolare, e sommarci tutte le soluzioni dell'equazione omogenea ottenute al punto a). Sostituendo $y = \alpha x^4$, l'equazione diventa $5\alpha x^4 = x^4$, verificata per $\alpha = 1/5$. Quindi la soluzione generale dell'equazione è

$$y = \frac{1}{5}x^4 + ax^{-1} + bx^3 \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R}.$$

c) In questo caso tutti i multipli di x^3 risolvono l'equazione omogenea, e quindi non possono fornire soluzioni particolari dell'equazione non omogenea. Si può però procedere con il metodo della variazione delle costanti: scrivendo $y = x^{-1}u_1 + x^3 u_2$, ed imponendo la condizione $x^{-1}\dot{u}_1 + x^3\dot{u}_2 = 0$, si ottiene il sistema

$$\begin{cases} x^{-1}\dot{u}_1 + x^3\dot{u}_2 = 0 \\ -x^{-2}\dot{u}_1 + 3x^2\dot{u}_2 = x \end{cases} \quad \text{cioé} \quad \begin{cases} \dot{u}_1 = -\frac{1}{4}x^3 \\ \dot{u}_2 = \frac{1}{4}x \end{cases} \quad \text{cioé} \quad \begin{cases} u_1 = -\frac{1}{16}x^4 + a \\ u_2 = \frac{1}{4}\log x + b \end{cases}$$

e quindi la soluzione generale dell'equazione è

$$y = \frac{1}{4}x^3 \log x + ax^{-1} + bx^3 \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R}.$$

d) Procedendo come al punto a), si ottiene che x^λ risolve l'equazione se $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$. Purtroppo questa equazione ha come soluzioni $\lambda = 1 \pm i$, che non sono numeri reali. Possiamo tuttavia dare un senso all'espressione $x^{1\pm i}$ usando l'esponenziale complesso:

$$x^{1\pm i} = x \, \exp(\pm i \log x) = x\cos(\log x) \pm ix\sin(\log x) \ .$$

Questo suggerisce la possibilità che $x\cos(\log x)$ e $x\sin(\log x)$ siano due soluzioni dell'equazione omogenea di partenza. Facendo i conti si verifica che le cose stanno effettivamente così, e quindi la soluzione generale dell'equazione è

$$y = ax\cos(\log x) + bx\sin(\log x) \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R}.$$

4. a) Riscriviamo la formula desiderata come segue:

$$A_n B_n = \sum_{k=1}^{n} a_k B_k + \sum_{k=1}^{n} A_{k-1} b_k \ .$$

Questa uguaglianza si dimostra facilmente per induzione su n, oppure nel modo seguente:

$$\begin{aligned} A_n B_n = \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k\Big)\Big(\sum_{h=1}^{n} b_h\Big) &= \sum_{1\le k,h\le n} a_k b_h \\ &= \sum_{1\le h\le k\le n} a_k b_h + \sum_{1\le k<h\le n} a_k b_h \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_k B_k + \sum_{h=1}^{n} A_{h-1} b_h \ . \end{aligned}$$

b) Ricordando che $\sin k$ è la parte immaginaria di e^{ik}, e la formula

$$\sum_{k=1}^{n} a^k = a + a^2 + \cdots + a^n = a\frac{a^n - 1}{a-1} \ ,$$

si ottiene

$$\sum_{k=1}^{n} \sin k = \mathrm{Im}\Big(\sum_{k=1}^{n} e^{ik}\Big) = \mathrm{Im}\Big(e^i \frac{e^{in}-1}{e^i - 1}\Big) \ .$$

La successione di numeri complessi tra parentesi è limitata (ricordate che $|e^{ik}| = 1$ per ogni k), e quindi lo stesso vale per la successione delle parti immaginarie.

c) Applichiamo la formula dimostrata al punto a) con $a_n := \sin n$ e $B_n := n^{-\alpha}$ per riscrivere la somma parziale n-esima della serie che ci interessa:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k}{k^\alpha} = A_n B_n - \sum_{h=1}^{n} A_{h-1} b_h = \frac{A_n}{n^\alpha} - \sum_{k=1}^{n} A_{k-1} b_k \ .$$

Dunque ci basta far vedere che per ogni $\alpha > 0$ la successione (A_n/n^α) e la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_{n-1} b_n \tag{4}$$

convergono a numeri finiti per $n \to +\infty$. Siccome la successione (A_n) è limitata, come dimostrato al punto b), il rapporto A_n/n^α tende a 0. Inoltre,

$$b_n = B_n - B_{n-1} = \frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n-1)^\alpha} = -\frac{1}{n^\alpha}\Big(\Big(1 - \frac{1}{n}\Big)^{-\alpha} - 1\Big) \sim -\frac{\alpha}{n^{\alpha+1}} \ .$$

Quindi, tenendo conto del fatto che $|A_n| \le C$ per una una qualche costante C si ottiene

$$|A_{n-1} b_n| \le C|b_n| \sim \frac{C\alpha}{n^{\alpha+1}}$$

e pertanto la serie in (4) converge assolutamente per ogni $\alpha > 0$ per il criterio del confronto.

d) Per vedere che la serie converge assolutamente quando $\alpha > 1$, basta osservare che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin n}{n^\alpha}\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} < +\infty \ .$$

Resta da vedere che la serie non converge assolutamente per $1 \ge \alpha > 0$, e per fare questo bisogna trovare una minorazione della serie dei valori assoluti. Osserviamo che $|\sin x| \ge 1/2$ quando x appartiene agli intervalli $I_k := [\pi/6 + k\pi, 5\pi/6 + k\pi]$. Siccome questi intervalli hanno lunghezza $2\pi/3$ maggiore di 1, per ogni k deve esistere almeno un intero n_k appartenente ad I_k (per la precisione tali interi saranno sempre due o tre). Pertanto $|\sin n_k| \ge 1/2$ e $n_k \le \pi(k+1)$, e quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin n}{n^\alpha}\right| \ge \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\sin n_k|}{n_k^\alpha} \ge \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1/2}{(\pi(k+1))^\alpha} = \frac{1}{2\pi^\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^\alpha} = +\infty \ .$$

SECONDA PARTE, GRUPPO B

In tutti gli esercizi si procede esattamente come per il gruppo A.

1. a) $f(x) = 2x + o(x) \sim 2x$ per $x \to 0$.
   b) $\displaystyle \frac{1}{n^a} - \frac{1}{n^a+2} = \frac{1}{n^a}\Big[1 - \frac{1}{1+2n^{-a}}\Big] \sim \frac{2}{n^{2a}}$ e la serie converge se e solo se $a > 1/2$.
   c) $\displaystyle S_n := \sum_{k=1}^{n} \Big[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\Big] = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \to \frac{3}{2}$ per $n \to +\infty$.
2. a) $x^t e^{-3x} = o(e^{-2x})$ per $x \to +\infty$; l'integrale è finito per il teorema del confronto asintotico.
   b) Integrando per parti si ottiene $\displaystyle f(t) = \frac{3}{t+1} f(t+1)$.
   c) $\displaystyle f(n) = \frac{n!}{3^{n+1}}$ per ogni intero $n \ge 0$.
   d) $\displaystyle f'(t) := \int_0^\infty x^t e^{-3x} \log x \, dx$ per ogni $t > 0$.
3. a) $y = x^\lambda$ risolve l'equazione (2) per $a = 8$ e $b = 0$ se e solo se $\lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0$, ovvero $\lambda = 4, -2$. La soluzione generale è $y = ax^{-2} + bx^4$ con $a, b \in \mathbb{R}$.
   b) $y = -\frac{1}{5}x^3$ è una soluzione particolare dell'equazione (2) per $a = 8$ e $b = x$. La soluzione generale è $y = -\frac{1}{5}x^3 + ax^{-2} + bx^4$ con $a, b \in \mathbb{R}$.
   c) Il metodo della variazione delle costanti dà $y = \frac{1}{6}x^4 \log x + ax^{-2} + bx^4$ con $a, b \in \mathbb{R}$.
   d) Uguale al gruppo A.
4. a) Uguale al gruppo A.
   b) Siccome $\cos k$ è la parte reale di e^{ik}, si ha $\displaystyle \sum_{k=1}^{n} \cos k = \mathrm{Re}\Big(e^i \frac{e^{in}-1}{e^i - 1}\Big)$.
   c) Uguale al gruppo A.
   d) La convergenza assoluta per $\alpha > 1$ si dimostra come per il gruppo A. Per la mancanza di convergenza assoluta quando $1 \ge \alpha > 0$, la dimostrazione varia solo nel fatto che gli intervalli in cui $|\cos x| \ge 1/2$ sono $I_k := [-\pi/3 + k\pi, \pi/3 + k\pi]$. La stima finale è pressoché identica.

Commenti

- Prima parte, esercizio 7. Moltissimi errori sono stati fatti nel determinare le soluzioni dell'equazione $\lambda^3 + 8 = 0$ (per il gruppo B: $\lambda^3 - 8 = 0$), vale a dire nel calcolare le radici cubiche complesse del numero -8.
- Prima parte, esercizio 8. Molte persone sembrano non sapere che lo sviluppo di Taylor all'ordine 12 deve essere un polinomio di grado al più 12.
- Seconda parte, esercizio 1c). Un conto molto convincente è il seguente:

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\Big[\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\Big] = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n-1} - \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n} - \sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2}\ .$$

  Purtroppo, pur fornendo la risposta giusta, questo conto non costituisce una dimostrazione corretta, perché il secondo ed il terzo termine di questa catena di uguaglianze sono differenze di serie uguali a $+\infty$, ovvero sono della forma $+\infty - \infty$; in altre parole, non hanno senso.
- Seconda parte, esercizio 2d). Solo tre persone hanno trovato la formula giusta per la derivata di f, e nessuna ne ha dato una dimostrazione completa. Lo schema naturale sarebbe

$$\begin{aligned} f'(t) := \lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h} &= \lim_{h\to 0}\int_0^{+\infty}\frac{x^{t+h}-x^t}{h}e^{-2x}\,dx \\ &= \int_0^{+\infty}\lim_{h\to 0}\frac{x^{t+h}-x^t}{h}e^{-2x}\,dx = \int_0^{+\infty}\log x\, x^t\, e^{-2x}\,dx\ . \end{aligned}$$

  In effetti tutti i passaggi possono essere giustificati facilmente tranne il terzo, quello in cui si scambia il limite con l'integrale. In generale, non è detto che questa uguaglianza sia vera (anche se nel caso specifico lo è)
- Seconda parte, esercizio 3c). Invece della variazione delle costanti, è possibile utilizzare il metodo della riduzione dell'ordine: con la sostituzione $y = x^3 u$, l'equazione non omogenea in oggetto diventa $x^3\ddot{u} + 5x^2\dot{u} = x$, ovvero un'equazione lineare del primo ordine nell'incognita $\dot{u}$, la cui soluzione è

$$\dot{u} = \frac{1}{4x} + \frac{a}{x^5} \quad \text{cioè} \quad u = \frac{1}{4}\log x + \frac{a}{x^4} + b \quad \text{cioè} \quad y = \frac{1}{4}x^3\log x + \frac{a}{x} + bx^3\ .$$

Scritto del I appello, Venerdì 10 giugno 2005

Prima parte, gruppo A

1. a) Non derivabile (c'è una cuspide in 0); b) non derivabile (la funzione è uguale a $|\sin x|$, ed è quindi asintoticamente equivalente a $|x|$ in 0); c) derivabile (l'argomento della radice non si annulla mai, e si possono applicare le solite regole di derivazione).

2. Si trova una soluzione particolare dell'equazione non omogenea tra i polinomi di primo grado: $\bar{y} := -(x+1)/2$. Il polinomio caratteristico dell'equazione omogenea associata è $\lambda^3 - \lambda^2 + 4\lambda - 4 = (\lambda^2+4)(\lambda-1)$. La soluzione generale dell'equazione è
$$y = ae^x + b\cos(2x) + c\sin(2x) - \frac{x+1}{2} \quad \text{con } a,b,c \in \mathbb{R}.$$

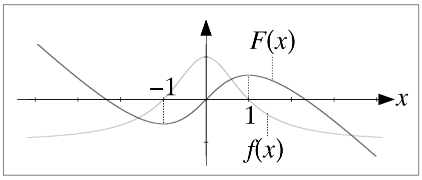
3. $\dfrac{2+i}{1-i} + \dfrac{2-i}{1+i} = \dfrac{(2+i)(1+i)+(2-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = 1.$

4. $P = \dfrac{5}{7}\cdot\dfrac{4}{6} = \dfrac{10}{21} \simeq 47\%.$

5. a) 1, perché $\exp(x^6) - 1 \sim x^6$ e $\sin(x^4) \sim x^4$; b) 0; c) $\dfrac{-1}{0^+} = -\infty$.

6. $R = 1$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nx^{2n-1} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} 2n\, x^{2n-1} = \frac{1}{2}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n}\Big)' = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{1-x^2} - 1\Big)' = \frac{x}{(1-x^2)^2}.$

7. $\displaystyle\int_0^{\infty} \sin x\, e^{-x}\,dx = \int_0^{\infty} \operatorname{Im}\big(e^{ix}\big)e^{-x}\,dx = \operatorname{Im}\left|\frac{e^{(i-1)x}}{i-1}\right|_0^{\infty} = \operatorname{Im}\frac{1}{1-i} = \frac{1}{2}.$

8. 

Prima parte, gruppo B

1. a) Derivabile (è la funzione x^2); b) non derivabile (c'è una cuspide in 0); c) non derivabile (si tratta di una funzione asintoticamente equivalente a $|x|/\sqrt{2}$ in 0).

2. Si trova una soluzione particolare dell'equazione non omogenea tra i polinomi di primo grado: $\bar{y} := 3(x+1)/4$. Il polinomio caratteristico dell'equazione omogenea associata è $\lambda^3 - \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda^2-4)(\lambda-1)$. La soluzione generale dell'equazione è
$$y = ae^x + be^{2x} + ce^{-2x} + \frac{3}{4}(x+1) \quad \text{con } a,b,c \in \mathbb{R}.$$

3. $\dfrac{2+i}{1-i} - \dfrac{2-i}{1+i} = \dfrac{(2+i)(1+i)-(2-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = 3i.$

4. $P = \dfrac{4}{10}\cdot\dfrac{3}{9} = \dfrac{2}{15} \simeq 13\%.$

5. a) 2, perché $\tan(x^3) \sim x^3$ e $1-\cos(x^2) \sim x^4/2$; b) 0; c) $\dfrac{\pi^\pi - 2}{0^+} = +\infty$.

6. $R = 1$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+1} = x^2 \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = x^2\Big(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\Big)' = x^2\Big(\frac{1}{1-x} - 1\Big)' = \frac{x^2}{(1-x)^2}$.

7. $\displaystyle\int_0^{\infty} \sin x\, e^{-2x}\, dx = \int_0^{\infty} \mathrm{Im}\big(e^{ix}\big)e^{-2x}\, dx = \mathrm{Im}\bigg|\frac{e^{(i-2)x}}{i-2}\bigg|_0^{\infty} = \mathrm{Im}\frac{1}{2-i} = \frac{1}{5}$.

8. Uguale al gruppo A.

PRIMA PARTE, GRUPPO C

1. a) Non derivabile (si tratta di una funzione asintoticamente equivalente a $\sqrt{2}\,|x|$ in 0); b) derivabile (l'argomento della radice non si annulla mai, ed è possibile applicare le solite regole di derivazione); c) derivabile (si tratta di $|x^3|$).

2. Si trova una soluzione particolare dell'equazione non omogenea tra i polinomi di secondo grado: $\bar{y} := (2x^2 - 4x + 3)/8$. Il polinomio caratteristico dell'equazione omogenea associata è $\lambda^3 + \lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda^2 + 4)(\lambda + 1)$. Infine, la soluzione generale dell'equazione è

$$y = ae^{-x} + b\cos(2x) + c\sin(2x) + \frac{2x^2 - 4x + 3}{8} \quad \text{con } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

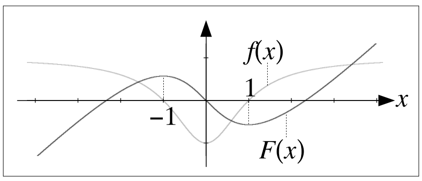
3. $\displaystyle\frac{1+2i}{1-i} + \frac{1-2i}{1+i} = \frac{(1+2i)(1+i) + (1-2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = -1$.

4. $P = \dfrac{4}{10} \cdot \dfrac{3}{9} = \dfrac{2}{15} \simeq 13\%$.

5. a) 1, perché $\tan x \sim x$ e $\exp(x^5) - 1 \sim x^5$; b) $+\infty$; c) $\dfrac{\pi^\pi + 2}{0^-} = -\infty$.

6. $R = 1$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nx^{3n-1} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty} 3n\, x^{3n-1} = \frac{1}{3}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} x^{3n}\Big)' = \frac{1}{3}\Big(\frac{1}{1-x^3} - 1\Big)' = \frac{x^2}{(1-x^3)^2}$.

7. $\displaystyle\int_0^{\infty} \cos x\, e^{-x}\, dx = \int_0^{\infty} \mathrm{Re}\,\big(e^{ix}\big)e^{-x}\, dx = \mathrm{Re}\bigg|\frac{e^{(i-1)x}}{i-1}\bigg|_0^{\infty} = \mathrm{Re}\,\frac{1}{1-i} = \frac{1}{2}$.

8. 

SECONDA PARTE, GRUPPO A

1. a) Studiamo il segno di $f'(x) = 5x^4 - 6x^2 + 2$. Siccome il polinomio di secondo grado $5t^2 - 6t + 2$ ha radici complesse, è sempre strettamente positivo, ed in particolare f' è strettamente positiva. Quindi f è strettamente crescente, e dunque è iniettiva.

   b) Si vede subito che $f(x)$ tende a $+\infty$ (risp., $-\infty$) quando $x \to +\infty$ (risp., $x \to -\infty$). Pertanto l'immagine di f è un intervallo che contiene valori arbitrariamente vicini a $\pm\infty$, e quindi deve essere uguale a tutto $\mathbb{R}$.

   c) Per quanto visto nei punti precedenti, f è una funzione continua e bigettiva da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$. In particolare, la sua inversa è una ben definita funzione continua da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che scegliamo di indicare con $g(y)$. Inoltre, siccome f' non si annulla mai, g è derivabile ovunque e

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} \ . \tag{1}$$

Derivando ulteriormente l'equazione (1) otteniamo

$$g''(y) = -\frac{\big[f'(g(y))\big]'}{\big[f'(g(y))\big]^2} = -\frac{f''(g(y))\, g'(y)'}{\big[f'(g(y))\big]^2} = -\frac{f''(g(y))}{\big[f'(g(y))\big]^3} \ . \tag{2}$$

Siccome $f(1) = 0$, abbiamo che $g(0) = 1$, e dunque la (1) e la (2) implicano

$$g'(0) = 1 \quad \text{e} \quad g''(0) = -8 \ ,$$

e quindi lo sviluppo di Taylor all'ordine 2 di g in 0 è $P_2(y) = 1 + y - 4y^2$.

d) Chiaramente $f(x) \sim x^5$ per $x \to +\infty$, vale a dire

$$1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^5} \ . \tag{3}$$

Siccome $g(y)$ tende a $+\infty$ per $y \to +\infty$, applicando il cambio di variabile $x = g(y)$ nella (3) otteniamo

$$1 = \lim_{y\to+\infty} \frac{f(g(y))}{(g(y))^5} = \lim_{y\to+\infty} \frac{y}{(g(y))^5}$$

ed elevando alla potenza $-1/5$

$$1 = \lim_{y\to+\infty} \frac{g(y)}{y^{1/5}} \ ,$$

vale a dire, $g(y) \sim y^{1/5}$ per $y \to +\infty$.

2. Studiamo la funzione $f(1/t)$ per $t \to 0$. Allora, utilizzando gli sviluppi $\log(1+s) = s + o(s)$ e $\exp(s) = 1 + s + o(s)$ per $s \to 0$, otteniamo

$$\begin{aligned} f(1/t) = (1+t^2)^{1/t} - 1 &= \exp\big(t^{-1}\log(1+t^2)\big) - 1 \\ &= \exp\big(t + o(t)\big) - 1 \\ &= 1 + \big(t + o(t)\big) + o\big(t + o(t)\big) - 1 = t + o(t) \ . \end{aligned}$$

Dunque $f(x) = 1/x + o(1/x)$ per $x \to +\infty$.

b) Per quanto visto al punto a), $f(n) \sim 1/n$ per $n \to +\infty$ e quindi la serie $\sum f(n)$ diverge a $+\infty$ per confronto (asintotico) con la serie $\sum 1/n$.

c) Procediamo come al punto a): per $t \to 0$ si ha

$$\begin{aligned} (1+t)^{1+2/t} &= \exp\big((1+2/t)\log(1+t)\big) \\ &= \exp\big((1+2/t)(t - t^2/2 + O(t^3)\big) \\ &= \exp\big(2 + O(t^2)\big) \\ &= e^2\exp(O(t^2)) = e^2\big(1 + O(t^2) + o(O(t^2))\big) = e^2 + O(t^2) \ . \end{aligned} \tag{4}$$

Sostituendo t con $-t$ nella (4) otteniamo anche

$$(1-t)^{1-2/t} = e^2 + O(t^2) \ . \tag{5}$$

Infine, ponendo $t = 1/n$ nella (4) e nella (5) otteniamo

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1+2n} - \left(1-\frac{1}{n}\right)^{1-2n} = \left(e^2 + O(1/n^2)\right) - \left(e^2 + O(1/n^2)\right) = O(1/n^2)\ .$$

Dunque la serie che ci interessa converge *assolutamente* per confronto (asintotico) con la serie $\sum 1/n^2$.

3. Le funzioni F e G sono di classe C^1, ed inoltre $G(x) > 0$ per $x > 0$ perché G è strettamente crescente ($G' = g$ è strettamente positiva) e si annulla in 0. Dunque la funzione F/G è ben definita per $x > 0$ ed è di classe C^1. In particolare

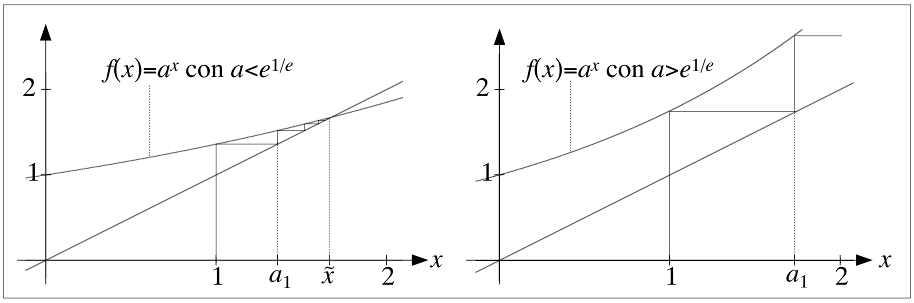
$$\begin{aligned}\left(\frac{F}{G}\right)' &= \frac{F'(x)G(x) - F(x)G'(x)}{G(x)^2} \\ &= \frac{1}{G(x)^2}\left[f(x)\int_0^x g(t)\,dt - g(x)\int_0^x f(t)\,dt\right] \\ &= \frac{1}{G(x)^2}\int f(x)g(t) - g(x)f(t)\,dt \\ &= \frac{g(x)}{G(x)^2}\int g(t)\left[\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(t)}{g(t)}\right] dt\ .\end{aligned}$$

Pertanto, essendo G e g positive, si vede che se la funzione f/g è monotona crescente (risp., decrescente), allora l'argomento dell'integrale è positivo (risp., negativo), e lo stesso vale per la derivata di F/G, per cui F/G è crescente (risp., decrescente).

4. Risolviamo a) e b) insieme. Osserviamo innanzitutto che la successione (a_n) può essere definita per ricorrenza ponendo $a_0 = 1$ e

$$a_{n+1} = f(a_n) \quad \text{dove } f(x) := a^x \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Per capire che succede, conviene al solito disegnare il grafico di $f(x)$ e determinarne la posizione rispetto alla retta $y = x$. Come si vede dalla figura, si verificano due possibili situazioni: o il grafico di f rimane al di sopra della retta in questione, ed allora la successione cresce a $+\infty$, oppure la interseca, ed allora la successione cresce ad un limite finito (l'ascissa del punto d'intersezione).



Per tradurre queste conclusioni in vere e proprie dimostrazioni, cominciamo a studiare il segno della funzione ausiliaria $g(x) := f(x) - x = a^x - x$ (la monotonia di (a_n) è chiaramente collegata a tale segno). Siccome $g'(x) = \log a \cdot a^x - 1$, si annulla in

$$\bar{x} := -\log\log a/\log a\ ,$$

e studiandone il segno si vede che g è strettamente decrescente per $x < \bar{x}$ e strettamente crescente per $x > \bar{x}$. Dunque $\bar{x}$ è il punto di minimo assoluto di g, ed il valore minimo di g è

$$m := g(\bar{x}) = a^{\bar{x}} - \bar{x} = \frac{1 + \log\log a}{\log a}\ .$$

Si presentano quindi tre possibilità:

I) $m > 0$, ovvero $a > e^{1/e}$. In tal caso $g(x) > 0$ per ogni x, ovvero $x < f(x)$. Pertanto la successione (a_n) è crescente, e quindi ammette limite $L \in [1, +\infty]$ (ricordo che $a_0 = 1$). Inoltre L deve essere $+\infty$: se infatti L fosse finito, dovrebbe risolvere l'equazione $f(L) = L$, ovvero $g(L) = 0$, ma essendo g strettamente positiva ($m > 0$), tale equazione non ha soluzioni.

II) $m = 0$, ovvero $a = e^{1/e}$. In tal caso $x \le f(x)$ per ogni x, e l'uguaglianza vale se e solo se $x = \bar{x}$. Come prima, la successione (a_n) è crescente ed ha quindi limite $L \in [1, +\infty]$. Inoltre, essendo f crescente, per ogni x tale che $x \le \bar{x}$ si ha $f(x) \le f(\bar{x}) = \bar{x}$. Pertanto

$$1 \le x \le \bar{x} \quad \text{implica} \quad 1 \le x \le f(x) \le \bar{x} \ ,$$

e dunque, siccome $a_0 = 1$, si dimostra per induzione su n che $1 \le a_n \le \bar{x}$ per ogni n. Quindi L deve essere finito (e coincide quindi con $\bar{x}$, unica soluzione dell'equazione $f(x) = x$).

III) $m < 0$, ovvero $a < e^{1/e}$. Osserviamo innanzitutto che $g(1) = a - 1$ è positivo, inoltre la condizione $a < e^{1/e}$ implica $g'(1) = a \log a - 1 < 0$, e quindi necessariamente $1 < \bar{x}$. Inoltre, essendo $g(\bar{x}) < 0$, e g strettamente decrescente per $x < \bar{x}$, esiste un unico punto $\tilde{x}$ compreso tra 1 ed $\bar{x}$ tale che $g(\tilde{x}) = 0$. Di conseguenza $g(x) \ge 0$ per $1 \le x \le \tilde{x}$, ovvero $x \le f(x)$. Infine, essendo f crescente, per $x \le \tilde{x}$ si ha $f(x) \le f(\tilde{x}) = \tilde{x}$ e quindi

$$1 \le x \le \tilde{x} \quad \text{implica} \quad 1 \le x \le f(x) \le \tilde{x} \ .$$

Siccome $a_0 = 1$, si dimostra per induzione su n che $1 \le a_n \le \bar{x}$ per ogni n, e quindi (a_n) è crescente, ed ammette un limite L finito (che deve poi essere $\tilde{x}$).
Riassumendo, la successione (a_n) è sempre crescente, ed ammette limite finito (uguale a $\tilde{x}$) se e solo se $a \le e^{1/e}$.
Ometto la discussione del punto c).

SECONDA PARTE, GRUPPO B

1. Sostanzialmente uguale al gruppo A.
   a) Siccome $5t^2 - 6t + 2 > 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, anche $f'(x) = 7x^6 - 4x^3 + 1 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
   c) Come per il gruppo A, $g(0) = 1$ e le formule (1) e (2) dimostrate in precedenza implicano $g'(0) = 1/4$ e $g''(0) = -15/32$. Lo sviluppo cercato è $P_2(y) = 1 + \frac{1}{4}y - \frac{15}{64}y^2$.
   d) $y = f(x) \sim x^7$ per $x \to +\infty$, e quindi $x = g(y) \sim y^{1/7}$ per $y \to +\infty$.
2. a) Si procede come per il gruppo A, e si ottiene $f(x) = 1/x^2 + o(1/x^2)$ per $x \to +\infty$.
   b) Siccome $f(n) \sim 1/n^2$, la serie $\sum f(n)$ converge per confronto con $\sum 1/n^2$.
   c) Uguale al gruppo A.
3. Uguale al gruppo A.
4. Uguale al gruppo A.

SECONDA PARTE, GRUPPO C

1. Sostanzialmente uguale al gruppo A.
   a) Siccome $5t^2 + 6t + 1 > 0$ per $t > -1/5$, allora $f'(x) = 5x^4 + 6x^2 + 1 > 0$ per ogni x.
   c) Come per il gruppo A, $g(0) = 1$ e le formule (1) e (2) implicano $g'(0) = 1/12$ e $g''(0) = -1/54$. Lo sviluppo cercato è $P_2(y) = 1 + \frac{1}{12}y - \frac{1}{108}y^2$.
   d) $y = f(x) \sim x^5$ per $x \to +\infty$, e quindi $x = g(y) \sim y^{1/5}$ per $y \to +\infty$.

2. a) Si procede come per il gruppo A, e si ottiene $f(x) = 2/x + o(1/x)$ per $x \to +\infty$.
   b) Siccome $f(n) \sim 2/n$, la serie $\sum f(n)$ diverge a $+\infty$ per confronto con $\sum 2/n$.
   c) Uguale al gruppo A.
3. Uguale al gruppo A.
4. Uguale al gruppo A.

Commenti

- Prima parte, esercizio 6. Quasi nessuno ha trovato il valore esatto della serie!
- Prima parte, esercizio 7. Quasi tutti hanno risolto l'esercizio integrando due volte per parti: il metodo funziona, ma implica decisamente più conti di quello proposto sopra.
- Seconda parte, esercizio 1d). Molti hanno trovato la formula corretta, ma quasi nessuno l'ha dimostrata.
- Seconda parte, esercizio 2c). Due persone hanno osservato che la serie in questione è telescopica. Ponendo infatti
  $$a_n := \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^{1+2n}$$
  verifica facilmente che $\Big(1 - \dfrac{1}{n}\Big)^{1-2n} = a_{n-1}$ e quindi,
  $$\sum_{n=2}^{N} \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^{1+2n} - \Big(1 - \frac{1}{n}\Big)^{1-2n} = \sum_{n=2}^{N} a_n - a_{n-1} = a_N - a_1 \ .$$
  Siccome a_n tende ad e^2 per $n \to +\infty$, la serie converge a $e^2 - a_1 = e^2 - 8$.
- Seconda parte, esercizio 3. Altra dimostrazione: partendo da $(F/G)' = (gG)^{-1}(f/g - F/G)$ si deduce che
  $$(F/G)'(x) \geq 0 \quad \text{se e solo se} \quad \frac{f(x)}{g(x)} \geq \frac{F(x)}{G(x)} \ . \tag{6}$$
  Osserviamo ora che essendo $F(0) = G(0) = 0$, per il teorema di Cauchy si ha
  $$\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F(x) - F(0)}{G(x) - G(0)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} = \frac{f(\xi)}{g(\xi)} \tag{7}$$
  per un opportuno $\xi = \xi(x)$ compreso tra 0 e x. Ora, se f/g è una funzione crescente, per ogni $x > 0$ abbiamo che $f(x)/g(x) \geq f(\xi)/g(\xi)$, e grazie alla (6) e alla (7) otteniamo che $(F/G)'(x) \geq 0$,per cui F/G è crescente. Analogamente si dimostra che se f/g è decrescente allora anche F/G è decrescente.
- Seconda parte, esercizio 4. Un errore frequente è stato porre la funzione f che definisce la successione per ricorrenza uguale a x^a invece che a^x. Così facendo si ottiene $a_3 = (a^a)^a = a^{(a^2)}$, che è diverso da $a^{(a^a)}$.

PRIMA PARTE, GRUPPO A

1. $P = \dfrac{9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{9 \cdot 10^3} = \dfrac{63}{125} \simeq 50\%.$

2. L'equazione è lineare del primo ordine, ma anche a variabili separabili: $\dot{y} = x(1-y)$. Risolvendola come equazione a variabili separabili si ha $\dot{y}/(1-y) = x$, ovvero $-\log(1-y) = x^2/2 + c$, e la condizione iniziale $y(0) = 0$ implica $c = 0$. Pertanto $y = 1 - \exp(-x^2/2)$.

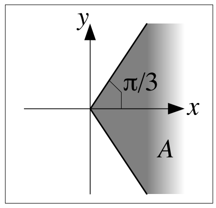
3. a) $x_n := \log n$; b) $x_n := \sin(\log n)$.

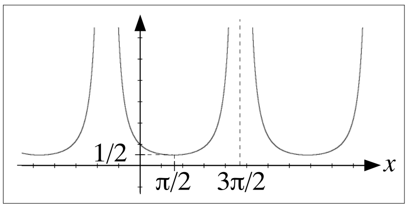
4. $f(x) = \displaystyle\int_0^{4x} (1 + O(t^2))(1 - t + O(t^2))\, dt = \int_0^{4x} 1 - t + O(t^2)\, dt = 4x - 8x^2 + O(x^3).$

5. Siccome $\frac{x^5+3x}{x^4+1} - x = \frac{2x}{x^4+1}$, si ha che $\frac{x^5+3x}{x^4+1} \geq x$ solo per $x \geq 0$.
   Quindi l'area cercata è $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^5 + 3x}{x^4+1} - x\, dx = \int_0^\infty \frac{2x}{x^4+1} dx = \Big|\arctan(x^2)\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2}.$

6. a) La serie si decompone come $\sum \frac{1}{n^2} + \sum \frac{(-1)^n}{n}$ e quindi converge, ma non assolutamente.
   b) $(1 + 2^{-n})/n$ è asintoticamente equivalente a $1/n$ e quindi la serie diverge a $+\infty$.
   c) $\big|\sin n/(1 + 3n + 2^n)\big| \leq 1/(1 + 3n + 2^n)$ che è assolutamente equivalente a $1/2^n$. Pertanto la serie converge assolutamente.

7. A è l'insieme dei punti $z = x + iy$ tali che $x \geq |y|/\sqrt{3}$ (vedi figura).



8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO B

1. $P = \dfrac{9 \cdot 9 \cdot 8}{9 \cdot 10^2} = \dfrac{18}{25} = 72\%.$

2. Analogo al gruppo A: risolvendo l'equazione a variabili separabili $\dot{y} = x(1+y)$ si ottiene $\dot{y}/(1+y) = x$, ovvero $\log(1+y) = x^2/2 + c$, e la condizione iniziale $y(0) = 0$ implica $c = 0$. Pertanto $y = -1 + \exp(x^2/2)$.

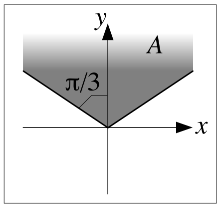
3. a) $x_n := \log n$; b) $x_n := \sin(\log n)$.

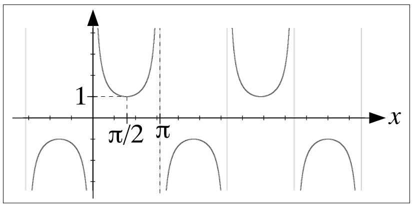
4. $f(x) = \displaystyle\int_0^{2x} (1 + O(t^2))(1 + t + O(t^2))\, dt = \int_0^{2x} 1 + t + O(t^2)\, dt = 2x + 2x^2 + O(x^3).$

5. L'area cercata è $\displaystyle\int_0^\infty \frac{2x^5 + 3x}{x^4+1} - x\, dx = \int_0^\infty \frac{x}{x^4+1} dx = \Big|\frac{1}{2}\arctan(x^2)\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{4}.$

6. a) L'argomento è maggiorato in valore assoluto da $(2+n)/n^3 \sim 1/n^2$ e quindi la serie converge assolutamente.
   b) L'argomento tende a $+\infty$, e quindi la serie diverge a $+\infty$.
   c) L'argomento è minorato da $1/1 + 3\log n + n \sim 1/n$ e quindi la serie diverge a $+\infty$.

7. A è l'insieme dei punti $z = x + iy$ tali che $y \geq |x|/\sqrt{3}$ (vedi figura).



8. 

Seconda parte, gruppo A

1. a) Usando gli sviluppi $\sin x = x - x^3/6 + O(x^5)$ e $\cos x = 1 - x^2/2 + O(x^4)$ si ottiene

$$f(x) = \Big(x - \frac{1}{6}x^3 + O(x^5)\Big)\big(1 - 2x^2 + O(x^4)\big) - x^b = x - x^b - \frac{13}{6}x^3 + O(x^5) \ ,$$

e quindi la parte principale di f è

$$\begin{cases} -x^b & \text{per } 0 < b < 1, \\ -\frac{13}{6}x^3 & \text{per } b = 1, \\ x & \text{per } b > 1. \end{cases} \tag{1}$$

b) La funzione $f(x)/x$ è continua su $(0, 1]$, quindi il comportamento dell'integrale è determinato dal comportamento in 0. Ricordando la (1), si ottiene $f(x)/x^{2b} \sim -x^{-b}$ per $b < 1$, e dunque l'integrale converge. Per $b = 1$, $f(x)/x^{2b}$ tende a 0 e quindi l'integrale converge pure in questo caso. Infine per $b > 1$, $f(x)/x^{2b} \sim x^{1-2b}$ e poiché $1 - 2b < -1$, l'integrale diverge a $+\infty$. Riassumendo, l'integrale converge se e solo se $b \leq 1$.

c) Usando lo sviluppo di Taylor della funzione $\sin x$ con resto di Lagrange si ottiene

$$\sin(1/10) = \frac{1}{10} - \frac{1}{6 \cdot 10^3} + \frac{\cos t}{120 \cdot 10^5}$$

per un opportuno t compreso tra 0 e 1/10. Pertanto

$$\sin(1/10) = \frac{1}{10} - \frac{1}{6000} + \varepsilon_1 \quad \text{con } 0 \leq \varepsilon_1 \leq 10^{-7}, \tag{2}$$

Analogamente

$$\cos(1/5) = 1 - \frac{1}{2 \cdot 5^2} + \frac{\cos t}{24 \cdot 5^4}$$

per un opportuno t compreso tra 0 e 1/5, e quindi

$$\cos(1/5) = 1 - \frac{1}{50} + \varepsilon_2 \quad \text{con } 0 \leq \varepsilon_2 \leq 10^{-4}. \tag{3}$$

Mettendo insieme le uguaglianze (2) e (3) otteniamo infine

$$f(1/10) = \sin(1/10)\cos(1/5) - 1/10 = -\frac{1}{500} - \frac{1}{6000} + \varepsilon_3 = -\frac{13}{6000} + \varepsilon_3$$

con $\varepsilon_3 = \frac{1}{3 \cdot 10^5} + \varepsilon_1 \cos(1/5) + \varepsilon_2 \sin(1/10)$, e dunque

$$0 \leq \varepsilon_3 \leq \frac{1}{3 \cdot 10^5} + \varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_2}{10} \leq 2 \cdot 10^{-5} \ .$$

Si conclude che $f(1/10) \simeq -0,00217$ con errore inferiore a $2 \cdot 10^{-5}$.

2. a) La soluzione del problema di Cauchy in questione è

$$y(x) := e^{ax}\left(t + \int_0^x e^{-as} b(s)\, ds\right) .$$

Pertanto

$$\int_0^{2\pi} y(x)\, dx = \frac{e^{2\pi a} - 1}{a} t + \int_0^{2\pi} e^{ax}\left(\int_0^x e^{-as} b(s)\, ds\right) dx \ ,$$

e quindi l'integrale a sinistra dell'uguale vale 0 se (e solo se)

$$t = -\frac{a}{e^{2\pi a} - 1} \int_0^{2\pi} e^{ax}\left(\int_0^x e^{-as} b(s)\, ds\right) dx \ .$$

b) Ricordando che y soddisfa l'equazione $\dot y = ay + b$, ed utilizzando il teorema fondamentale del calcolo, si ottiene

$$y(2\pi) - y(0) = \int_0^{2\pi} \dot y(x)\, dx = a\int_0^{2\pi} y(x)\, dx + \int_0^{2\pi} b(x)\, dx = 0 \ ,$$

dove l'ultima uguaglianza segue dalle ipotesi su y e su b. (Si confronti questa dimostrazione con quella alternativa accennata nelle note in fondo.)

c) è un caso particolare del punto d).

d) Poniamo $z(x) := y(x + 2\pi) - y(x)$. Allora, essendo $b(x + 2\pi) = b(x)$,

$$\dot z(x) = \dot y(x + 2\pi) - \dot y(x) = a\, y(x + 2\pi) - a\, y(x) + b(x + 2\pi) - b(x) = a\, z(x) \ .$$

Dunque z soddisfa l'equazione differenziale $\dot z = az$; inoltre $z(0) = 0$ per quanto dimostrato al punto b). Pertanto $z(x) = 0$ per ogni x, ovvero $y(x + 2\pi) = y(x)$ per ogni x.

3. La retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa x è data dalla funzione (in x')

$$y(x') = f(x) + f'(x)(x' - x) \ .$$

Pertanto questa retta interseca l'asse delle y nel punto di ordinata $f(x) - x\, f'(x)$ e l'asse delle x nel punto di ascissa $(x\, f'(x) - f(x))/f'(x)$. Insieme all'origine, questi due punti sono i vertici di T_x, la cui area risulta quindi uguale a

$$\text{Area}(T_x) = \frac{(f(x) - x\, f'(x))^2}{2|f'(x)|} \ .$$

Siccome f' non si annulla mai per ipotesi, allora f' è sempre positiva o sempre negativa. Supponiamo di essere nel primo caso (nulla cambia nel secondo). Porre che l'area di T_x sia costante equivale a chiedere che la sua derivata in x sia nulla, ovvero

$$0 = \frac{d}{dx}\text{Area}(T_x) = \left(\frac{(f - x\, f')^2}{2f'}\right)' = -\frac{f''(f - xf')(f + xf')}{2(f')^2} \ .$$

In altre parole le soluzioni del nostro problema sono tutte e sole le funzioni f di classe C^2 con derivata mai nulla che soddisfano

$$f''(f - xf')(f + xf') = 0 \tag{4}$$

Per ogni x si hanno dunque tre possibilità: i) $f'' = 0$, ii) $f - xf' = 0$, oppure iii) $f + xf' = 0$. Le soluzioni della prima equazione sono le funzioni

$$f(x) = ax + b \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

le soluzioni della seconda sono anche soluzioni della prima (derivando $f - xf' = 0$ si ottiene $f'' = 0$), ed infine le soluzioni della terza sono

$$f(x) = \frac{c}{x} \quad \text{con } c \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Le funzioni in (5) ed in (6) con derivata non nulla (cioè con $a \neq 0$ e $c \neq 0$) sono tutte soluzioni nostro problema.

Ma ce ne sono altre? Ad esempio, per una funzione del tipo

$$f(x) := \begin{cases} ax + b & \text{per } x \leq x_0 \\ c/x & \text{per } x > x_0 \end{cases} \tag{7}$$

si avrebbe $f'' = 0$ per $x \leq x_0$ e $f + xf' = 0$ per $x > x_0$, ed in particolare la (4) sarebbe soddisfatta. Facendo un po' di conti si vede però che tale f non è mai di classe C^2 (la derivata seconda è necessariamente discontinua in x_0) e quindi non è una soluzione ammissibile.

Questo suggerisce che le uniche soluzioni siano quelle in (5) e (6). In effetti le cose stanno proprio così, ma l'unica dimostrazione completa che abbiamo trovato richiede nozioni avanzate di topologia, e la omettiamo.

4. Indichiamo con F la primitiva di f nulla in 0. Allora la disuguaglianza

$$f(x) \leq K \int_0^x f(t)\, dt \quad \text{per ogni } x \geq 0$$

si riscrive allora come

$$F'(x) \leq K\, F(x) \quad \text{per ogni } x \geq 0. \tag{8}$$

Vale a dire che $F'(x) - K\,F(x) \leq 0 \Leftrightarrow e^{-Kx}(F'(x) - K\,F(x)) \leq 0 \Leftrightarrow \big(e^{-Kx}F(x)\big)' \leq 0$. Dunque la funzione $e^{-Kx}F(x)$ è decrescente, e siccome vale 0 in 0, deve essere sempre negativa (o nulla). Ovvero

$$F(x) \leq 0 \quad \text{per ogni } x \geq 0. \tag{9}$$

a) Se $K \geq 0$, la (8) e la (9) implicano $f(x) = F'(x) \leq K\,F(x) \leq 0$.

b) Se $f(x) \geq 0$ per ogni x, allora $F(x)$ è crescente, e siccome $F(0) = 0$, allora $F(x) \geq 0$ per ogni $x \geq 0$. Insieme alla (9) questo implica $F(x) = 0$ per ogni $x \geq 0$, e dunque $f(x) = 0$.

c) In generale non è vero che $f(x) \leq 0$ per ogni $x \geq 0$. Un controesempio è dato da

$$f(x) = -e^{-x} \sin x\ .$$

Infatti questa funzione assume anche valori positivi, e d'altra parte

$$-F(x) = \frac{1 - e^{-x}(\cos x + \sin x)}{2} \geq \frac{e^{-x}(1 - \cos x - \sin x)}{2} \geq \frac{-e^{-x}\sin x}{2} = \frac{f(x)}{2}\ ,$$

ovvero $F'(x) \leq -2F(x)$, che è la disequazione (8) per $K = -2$.

La funzione $f(ax)$ con $a := -K/2$ fornisce un controesempio per ogni K negativo.

SECONDA PARTE, GRUPPO B

1. a) Analogo al gruppo A: $f(x) = x - x^b - \dfrac{14}{3}x^3 + O(x^5) = \begin{cases} -x^b & \text{per } 0 < b < 1, \\ -\frac{14}{3}x^3 & \text{per } b = 1, \\ x & \text{per } b > 1. \end{cases}$.

   b) Uguale al gruppo A.

   c) Analogo al gruppo A: alla stima (2) per $\sin(1/10)$ va aggiunta una stima per $\cos(3/10)$:

$$\cos(3/10) = 1 - \frac{9}{200} + \varepsilon_2 \quad \text{con } 0 \leq \varepsilon_2 \leq 4 \cdot 10^{-4}. \tag{10}$$

   Mettendo insieme le stime (2) e (10) otteniamo

$$f(1/10) = \sin(1/10)\cos(3/10) - 1/10 = -\frac{9}{2000} - \frac{1}{6000} + \varepsilon_3 = -\frac{7}{1500} + \varepsilon_3$$

   con $0 \leq \varepsilon_3 \leq 5 \cdot 10^{-5}$. Si conclude che $f(1/10) \simeq -0,00467$ con errore inferiore a $5 \cdot 10^{-5}$.

2. Uguale al gruppo A.
3. Uguale al gruppo A.
4. Uguale al gruppo A.

COMMENTI

- Prima parte, esercizio 4. Molti hanno proposto come soluzione funzioni che non sono nemmeno polinomi!
- Prima parte, esercizio 5. Quasi nessuno ha fatto questo esercizio, che pure è assolutamente standard. L'unica difficoltà sta nel determinare correttamente gli estremi di integrazione.
- Prima parte, esercizio 7. Molti hanno risolto la disequazione $|z| \leq 2\,\mathrm{Re}\,z$ ($|z| \leq 2\mathrm{Im}z$per il gruppo B) elevandola al quadrato, ma dimenticando di imporre $\mathrm{Re}\,z \geq 0$, ed ottenendo così una figura simmetrica rispetto all'asse delle y.
- Seconda parte, esercizio 1. Moltissimi errori nell'uso dei resti negli sviluppi di Taylor (e calcoli conseguentemente errati). Quasi nessuno ha svolto correttamente la parte c).
- Seconda parte, esercizio 2. Diamo una dimostrazione alternativa dei punti b) e c), più "contosa" ma probabilmente più semplice. Tramite un'integrazione per parti, il numero t dato in a) può essere riscritto come

$$\begin{aligned} t &= -\frac{a}{e^{2\pi a} - 1} \int_0^{2\pi} e^{ax} \left[\int_0^x e^{-as} b(s)\, ds \right] dx \\ &= -\frac{e^{2\pi a}}{e^{2\pi a} - 1} \int_0^{2\pi} e^{-ax} b(x)\, dx + \frac{a}{e^{2\pi a} - 1} \int_0^{2\pi} b(x)\, dx\ . \\ &= -\frac{e^{2\pi a}}{e^{2\pi a} - 1} \int_0^{2\pi} e^{-ax} b(x)\, dx \end{aligned}$$

  (nell'ultimo passaggio si è tenuto conto dell'ipotesi su b). Sostituendo quest'ultima espressione nella formula esplicita per la soluzione y si ottiene

$$y(2\pi) - y(0) = (e^{2\pi a} - 1)t + e^{2\pi a} \int_0^{2\pi} e^{-as} b(s)\, ds = 0$$

e questo risolve b). Allo stesso modo si ottiene che per ogni x

$$\begin{aligned}
y(x+2\pi) - y(x) &= e^{a(x+2\pi)}\left[t + \int_0^{x+2\pi} e^{-as}b(s)\,ds\right] - e^{ax}\left[t + \int_0^{x} e^{-as}b(s)\,ds\right] \\
&= e^{ax}\left[(e^{2\pi a}-1)t + e^{2\pi a}\int_0^{x+2\pi} e^{-as}b(s)\,ds - \int_0^{x} e^{-as}b(s)\,ds\right] \\
&= e^{ax}\left[e^{2\pi a}\int_{2\pi}^{x+2\pi} e^{-as}b(s)\,ds - \int_0^{x} e^{-as}b(s)\,ds\right] \\
&= e^{ax}\left[\int_{2\pi}^{x+2\pi} e^{-a(s-2\pi)}b(s)\,ds - \int_0^{x} e^{-as}b(s)\,ds\right] = 0
\end{aligned}$$

(per vedere che i due integrali nell'ultima riga coincidono, basta fare la sostituzione $s = u+2\pi$ nel primo ed utilizzare il fatto che b è periodica di periodo 2π).

- Seconda parte, esercizio 3. Si noti che la funzione data dalla formula (7) è di classe C^1 se (e solo se) $b = -2ax_0$ e $c = -ax_0^2$, e non è difficile vedere che per tale funzione l'area di T_x risulta effettivamente costante in x. In altre parole, se non si richiede che f sia di classe C^2 ma solo di classe C^1 (quanto basta per enunciare il problema), ci sono molte altre soluzioni oltre a quelle in (5) e (6).
- Seconda parte, esercizio 4. Questo esercizio è risultato il più difficile, ed in particolare nessuno ha risolto la parte a). In diversi hanno trovato dimostrazioni apparentemente corrette di questo enunciato (cioè dimostrazioni con errori quasi impercettibili, come l'aver sostituito una disuguaglianza non stretta con una stretta nel punto chiave).

Scritto del III appello, Lunedì 19 settembre 2005

Prima parte, gruppo A

1. Si tratta dei punti che giacciono al di sopra della retta $y = x$ e al di fuori del cerchio centrato nell'origine e di raggio $\sqrt{2}$.
2. a) Falsa; b) vera; c) vera.
3. $z = \big(-\sqrt{2} + i\sqrt{6}\big)^{-12} = \big(2^{3/2}e^{2\pi i/3}\big)^{-12} = 2^{-18}$.
4. Siccome $f(x) := \exp(\log x + \log(x^2+1)/2) = x\sqrt{1+x^2}$, allora $f'(x) = \dfrac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}$.
5. L'integrando è singolare al più in 0 e $\pi/2$. In 0 è asintoticamente equivalente a x^{1+a} ed in $\pi/2$ a $(\pi/2-x)^{1-a}$. Pertanto l'integrale è finito se e solo se $1+a > -1$ e $1-a > -1$, ovvero $-2 < a < 2$.
6. a) $+\infty$; b) $+\infty$; c) si verifica facilmente che $\dfrac{(2n)!}{(n!)^2} \geq 2^n$ e quindi il limite è $+\infty$.
7. Equazione a variabili separabili: $e^{-y}\dot{y} = 2(1-x)$, $-e^{-y} = 2x-x^2-2$, $y = -\log(x^2-2x+2)$.
8. Si tratta del grafico di $y = 1/x^2$ (noto!) traslato a destra di 1 ed in basso di 1.

Prima parte, gruppo B

1. Si tratta dei punti che giacciono al di sotto della retta $y = x$ e dentro al cerchio centrato nell'origine e di raggio $\sqrt{2}$ (quindi un semicerchio).
2. a) Vera; b) vera; c) falsa.
3. $z = \big(-\sqrt{6} + i\sqrt{2}\big)^{12} = \big(2^{3/2}e^{5\pi i/6}\big)^{12} = 2^{18}$.
4. Siccome $f(x) := \exp(\log x + \log(1-x^2)/2) = x\sqrt{1-x^2}$, allora $f'(x) = \dfrac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$.
5. Uguale al gruppo A.
6. a) $-1/2$; b) 0; c) $+\infty$ (uguale al gruppo A).
7. Equazione a variabili separabili: $e^{-y}\dot{y} = 2(1+x)$, $-e^{-y} = 2x+x^2-4$, $y = -\log(4-2x-x^2)$.
8. Si tratta del grafico di $y = 1/x^3$ (noto!) traslato a sinistra di 1 ed in alto di 1.

Seconda parte, gruppo A

1. La sostituzione suggerita è $u(t) = y(e^t)$. Allora $\dot{u}(t) = \dot{y}(e^t)\,e^t$ e $\ddot{u}(t) = \ddot{y}(e^t)\,e^{2t} + \dot{y}(e^t)\,e^t$, e l'equazione $x^2\ddot{y} + x\dot{y} - y = (\log x + 1)x$ diventa

$$\ddot{u} - u = (1+t)e^t \; . \tag{1}$$

   Il polinomio caratteristico dell'equazione omogenea associata è $P(\lambda) = \lambda^2-1 = (\lambda-1)(\lambda+1)$, e quindi le soluzioni (dell'omogenea) sono della forma $ae^t + be^{-t}$ con $a, b \in \mathbb{R}$.

   Non resta che trovare una soluzione dell'equazione non omogenea. Il termine noto $e^t(1+t)$ è una combinazione lineare di e^t e te^t, e quindi risolve un'equazione lineare a coefficienti costanti che ha come polinomio caratteristico $Q(\lambda) = (\lambda-1)^2$. Per il teorema degli annichilatori, esiste una soluzione particolare della (1) che si scrive come combinazione lineare di te^t e t^2e^t, ovvero $u = \alpha te^t + \beta t^2 e^t$. Sostituendo questa espressione nella (1) si ottiene $\alpha = \beta = 1/4$. Pertanto la soluzione generale della (1) è

$$u = ae^t + be^{-t} + \frac{1}{4}(t + t^2)e^t \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R},$$

e quella dell'equazione originale

$$y = ax + \frac{b}{x} + \frac{1}{4}(\log x + \log^2 x)x \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R}.$$

Imponendo le condizioni iniziali $y(1) = 0$ e $\dot{y}(1) = 0$ otteniamo infine $-a = b = 1/8$, ovvero

$$y = \frac{1}{8}\Big(\frac{1}{x} - x\Big) + \frac{1}{4}(\log x + \log^2 x)x \ .$$

2. a) Fissato $z \in \mathbb{R}$, l'insieme V_z dei punti (x, y) tali che $|zx| + |y| \le z \exp(-z^2)$ è vuoto per $z < 0$. Per $z \ge 0$ si tratta invece di un insieme simmetrico rispetto agli assi; nel primo quadrante la disequazione si riduce a $zx + y \le z \exp(-z^2)$, ed è soddisfatta dai punti che giacciono al di sotto della retta di equazione $y = -zx + z \exp(-z^2)$, vale a dire i punti del triangolo di vertici $(0, 0)$, $(0, z \exp(-z^2))$, $(\exp(-z^2), 0)$. Pertanto V_z è il rombo di vertici $(0, \pm z \exp(-z^2))$, $(\pm \exp(-z^2), 0)$.

   b) L'area di V_z è $2z \exp(-2z^2)$ per ogni $z \ge 0$, e quindi

$$\mathrm{Vol}(V) = \int_0^\infty 2ze^{-2z^2}\, dz = \int_0^\infty e^{-2s}\, ds = \frac{1}{2} \ .$$

3. a) La funzione f è continua e definita su tutto $\mathbb{R}$, e quindi l'immagine $f(\mathbb{R})$ è un intervallo (teorema dei valori intermedi). Inoltre $f(x)$ ha limite $+\infty$ (risp., $-\infty$) per x che tende a $+\infty$ (risp., a $-\infty$). e quindi l'intervallo $f(\mathbb{R})$ deve essere illimitato sia superiormente che inferiormente. In altre parole, $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

   b) Vogliamo calcolare il valore minimo di $f'(x) = e^x - 2ax + a$. Siccome $f''(x) = e^x - 2a$, si vede facilmente che $x = \log(2a)$ è il punto di minimo assoluto di f', e quindi

$$\min f' = f'(\log(2a)) = a(3 - 2\log(2a)) \ .$$

   Se $3 - 2\log(2a) \ge 0$, ovvero se $a \le e^{3/2}/2$, f' ha derivata non negativa ovunque. Per la precisione, f' è sempre positiva tranne al più in $x = \log(2a)$, e quindi f è strettamente crescente. Viceversa, se $a > e^{3/2}/2$ la derivata di f è negativa in qualche punto, e quindi f non può essere crescente. I valori di a cercati sono tutti e soli quelli per cui $a \le e^{3/2}/2$.

4. a) Si tratta di trovare un punto in cui si annulla la funzione $F(x) := f(x) - x$. Osserviamo che F è continua, e posto $I = [a, b]$ si ha $F(a) = f(a) - a \ge 0$ e $F(b) = f(b) - b \le 0$ (si ricordi che i valori di f sono compresi tra a e b per ipotesi). Se $F(a)$ o $F(b)$ si annullano abbiamo finito, altrimenti abbiamo che $F(a) < 0$ e $F(b) > 0$, e quindi, per via del teorema dei valori intermedi, deve esistere x compreso tra a e b in cui F si annulla.

   b) Sia $f(x) := h(g(x))$. Siccome f mappa I in I, per quanto dimostrato nel punto a), deve esistere x tale che $f(x) = x$. Posto allora $y := g(x)$, abbiamo che $x = f(x) = h(y)$, e dunque il punto (x, y) appartiene sia al grafico di g che la grafico di h.

Seconda parte, gruppo B

1. La sostituzione suggerita è $u(t) = y(e^t)$. Allora $\dot{u}(t) = \dot{y}(e^t)\, e^t$ e $\ddot{u}(t) = \ddot{y}(e^t)\, e^{2t} + \dot{y}(e^t)\, e^t$, e l'equazione $x^2\ddot{y} + x\dot{y} - 4y = (\log x + 2)x^2$ diventa
$$\ddot{u} - 4u = (2+t)e^{2t} \ . \tag{2}$$
Il polinomio caratteristico dell'equazione omogenea associata è $P(\lambda) = \lambda^2 - 4 = (\lambda-2)(\lambda+2)$, e quindi le soluzioni (dell'omogenea) sono della forma $ae^{2t} + be^{-2t}$ con $a, b \in \mathbb{R}$.
Non resta che trovare una soluzione dell'equazione non omogenea. Il termine noto $e^{2t}(2+t)$ è una combinazione lineare di e^{2t} e te^{2t}, e quindi risolve un'equazione lineare a coefficienti costanti che ha come polinomio caratteristico $Q(\lambda) = (\lambda - 2)^2$. Per il teorema degli annichilatori, esiste una soluzione particolare della (2) della forma $u = \alpha te^{2t} + \beta t^2 e^{2t}$, e sostituendo si ottiene $\alpha = 7/16$ e $\beta = 1/8$. Pertanto la soluzione generale della (2) è
$$u = ae^{2t} + be^{-2t} + \frac{1}{16}(7t + 2t^2)e^{2t} \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R},$$
e quella dell'equazione originale
$$y = ax^2 + \frac{b}{x^2} + \frac{1}{16}(7\log x + 2\log^2 x)x^2 \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R}.$$
Imponendo le condizioni iniziali $y(1) = 0$ e $\dot{y}(1) = 0$ otteniamo infine $-a = b = 7/64$, ovvero
$$y = \frac{7}{64}\Big(\frac{1}{x^2} - x^2\Big) + \frac{1}{16}(7\log x + 2\log^2 x)x^2 \ .$$

2. a) Fissato $z \in \mathbb{R}$, l'insieme V_z dei punti (x, y) tali che $|zx| + |y| \le z^2 \exp(-z^2)$ è simmetrico rispetto agli assi. Nel primo quadrante la disequazione si riduce a $|z|x + y \le z^2 \exp(-z^2)$, ed è soddisfatta dai punti che giacciono al di sotto della retta $y = -|z|x + z^2 \exp(-z^2)$, vale a dire il triangolo di vertici $(0, 0)$, $(0, z^2 \exp(-z^2))$, $(|z| \exp(-z^2), 0)$. Pertanto V_z è il rombo di vertici $(0, \pm z^2 \exp(-z^2))$, $(\pm z \exp(-z^2), 0)$.
b) L'area di V_z è $2|z|^3 \exp(-2z^2)$ per ogni $z \in \mathbb{R}$, e quindi
$$\mathrm{Vol}(V) = \int_{-\infty}^{\infty} 2|z|^3 e^{-2z^2}\, dz = \int_0^{\infty} 4z^3 e^{-2z^2}\, dz = \int_0^{\infty} 2se^{-2s}\, ds = \frac{1}{2} \ .$$

3. a) Uguale al gruppo A: $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
b) Vogliamo calcolare il valore minimo di $f'(x) = e^x - 2ax - a$. Siccome $f''(x) = e^x - 2a$, si vede facilmente che $x = \log(2a)$ è il punto di minimo assoluto di f', e quindi
$$\min f' = f'(\log(2a)) = a(1 - 2\log(2a)) \ .$$
Allora f è strettamente crescente se e solo se $a \le e^{1/2}/2$.

4. Uguale al gruppo A.

SCRITTO DEL IV APPELLO, LUNEDÌ 9 GENNAIO 2006

PRIMA PARTE

1. $\displaystyle\Big(\frac{15}{4+8i}+\frac{5}{4-8i}\Big)^{10}=\Big(\frac{15(1-2i)+5(1+2i)}{4(1+2i)(1-2i)}\Big)^{10}=\big(1-i\big)^{10}=\big(\sqrt{2}e^{-\pi i/4}\big)^{10}=-32i.$

2. $f(x):=\dfrac{1}{8}\log(x^2-1)-\dfrac{1}{8}\log(x^2+1)$ e quindi $f'(x)=\dfrac{x}{4(x^2-1)}-\dfrac{x}{4(x^2+1)}=\dfrac{x}{2(x^4-1)}$.

3. a) $N_a=5\cdot4\cdot5\cdot4=400$. b) $N_b=C_{4,2}N_a=\binom{4}{2}\cdot400=2400$.

4. a) $+\infty$; b) -1; c) $+\infty$.

5. Ad esempio $f(x):=\begin{cases}x\sin(1/x) & \text{per } x\neq0\\ 0 & \text{per } x=0\end{cases}$.

6. $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n8^nx^{3n}$; il raggio di convergenza è $R=1/2$.

7. Il cambio di variabile $t=x^2+2$ dà $\displaystyle\int x\sqrt{x^2+2}\,dx=\int\frac{1}{2}\sqrt{t}\,dt=\frac{t^{3/2}}{3}+c=\frac{1}{3}(x^2+2)^{3/2}+c.$

8. Si tratta del grafico di $y=\dfrac{1}{x^2}$ traslato a destra di 1 e poi in basso di 1.

SECONDA PARTE

1. a) Segue dal punto b). Una dimostrazione indipendente è questa: detto L il limsup di a_n per $n\to+\infty$ e fissato un qualunque intero m si ha che

$$L=\limsup_{n\to+\infty}a_{n+m}\le\lim_{n\to+\infty}\frac{n+m}{n\sqrt{m}}=\frac{1}{\sqrt{m}}\ .$$

Siccome questa disuguaglianza vale per ogni m, deve valere $L\le0$, e siccome i numeri a_n sono positivi, $L\le0$ implica che il limite di a_n è 0.
b) La condizione $(*)$ può essere riscritta come

$$a_n\le\frac{n}{(n-k)\sqrt{k}}\qquad\text{per ogni } n=1,2,\dots \text{ e } k=1,\dots,n-1. \tag{1}$$

Dato n pari, ponendo $k:=n/2$ la (1) implica

$$a_n\le\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\ .$$

Dato n dispari, ponendo $k:=(n-1)/2$ la (1) implica

$$a_n\le\frac{2\sqrt{2}n}{(n+1)\sqrt{n-1}}\sim\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\ .$$

Dunque $c=2\sqrt{2}$ soddisfa quanto richiesto.
c) La condizione (1) equivale a $a_n\le n/\alpha_n$ per ogni n, dove

$$\alpha_n:=\max\big\{(n-k)\sqrt{k}:\ k=1,\dots,n-1\big\}\ . \tag{2}$$

Vogliamo ora stimare α_n. A questo scopo, determiniamo il comportamento della funzione $f(x):=(n-x)\sqrt{x}$ sull'intervallo $[0,n]$. Dallo studio del segno della derivata, si vede che f è (strettamente) crescente in $[0, n/3]$ e (strettamente) decrescente in $[n/3, n]$, ed in particolare il $x = n/3$ è il punto di massimo assoluto (stretto) di $f(x)$ per x compreso tra 0 ed n. Chiaramente $\alpha_n \le f(n/3)$ per ogni n, ovvero

$$\alpha_n \le f(n/3) = \frac{2n}{3}\sqrt{\frac{n}{3}} = \frac{2n^{3/2}}{3^{3/2}} \tag{3}$$

(e vale l'uguaglianza se e solo se $n/3$ è intero). Poiché tra $n/3$ e $1 + n/3$ cade sicuramente un intero k, abbiamo la minorazione $\alpha_n \ge f(k) \ge f(1 + n/3)$, ovvero

$$\alpha_n \ge f(1 + n/3) = \Big(\frac{2n}{3} - 1\Big)\sqrt{\frac{n}{3} + 1} \sim \frac{2n^{3/2}}{3^{3/2}} \tag{4}$$

Le disuguaglianze (3), (4) implicano dunque

$$\frac{n}{\alpha_n} \sim \frac{3^{3/2}}{2\sqrt{n}} \ .$$

Siccome le successioni (a_n) che soddisfano la condizione $(*)$ sono tutte e solo quelle per cui $a_n \le n/\alpha_n$, abbiamo che le costanti c tali che $a_n \le c/\sqrt{n} + o(1/\sqrt{n})$ per ogni (a_n) che soddisfa $(*)$ sono tutte e sole quelle tali che $c \ge 3^{3/2}/2$.

2. a) Dato $x \ne 0$, l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa x è $y(t) = f(x) + f'(x)(t - x)$ (uso t invece di x come variabile indipendente) e dunque questa retta interseca l'asse delle y nel punto di ordinata $f(x) - x\,f'(x)$. Imponendo che questo numero sia 2 otteniamo l'equazione $f(x) - x\,f'(x) = 2$, ovvero

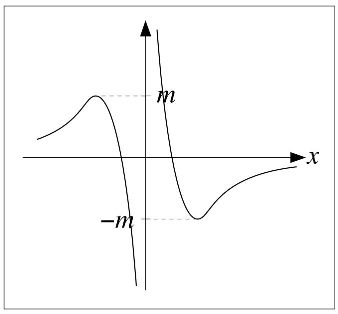
$$\frac{4}{x^3} - \frac{2}{x} = 2 \ ,$$

che equivale a $x^3 + x^2 - 2 = 0$. Si vede subito che una soluzione è $x = 1$, e fattorizzando il polinomio si verifica che non ci sono altre soluzioni reali. Pertanto c'è un'unica retta tangente al grafico di f che passa per $(0, 2)$, vale a dire quella di equazione $y(t) := 2(1 - t)$.
b) Per quanto visto sopra, il numero di rette tangenti cercato è pari al numero di soluzioni dell'equazione

$$\frac{4}{x^3} - \frac{2}{x} = a \ . \tag{5}$$

Per determinare tale numero, studiamo il grafico di $f(x) := 4/x^3 - 2/x$.

La funzione f è dispari, e quindi il grafico è simmetrico rispetto all'origine; lo studiamo solo per $x > 0$. La derivata $f'(x) = -12/x^4 + 2/x^2$ risulta negativa in $(0, \sqrt{6})$ e positiva in $(\sqrt{6}, +\infty)$. Pertanto in $(0, \sqrt{6})$ il valore di $f(x)$ decresce strettamente da $+\infty$ (il limite di f per $x \to 0^+$) a $f(\sqrt{6}) = -m$, (si è posto $m := (2/3)^{3/2}$) e quindi l'equazione $f(x) = a$ ammette una soluzione in $(0, \sqrt{6})$ se $a > -m$, nessuna se $a \le -m$. In $(\sqrt{6}, +\infty)$, invece, il valore di $f(x)$ cresce da $f(\sqrt{6}) = -m$ a 0 (il limite di f per $x \to +\infty$), e quindi l'equazione $f(x) = a$ ammette una soluzione in $(\sqrt{6}, +\infty)$ se $-m < a < 0$, nessuna negli altri casi.



Analogo discorso vale per la semiretta $x < 0$ (vedi figura). Mettendo insieme queste osservazioni si ottiene che l'equazione (5) ha 1 soluzione se $|a| > m$, 2 soluzioni se $|a| = m$, 3 soluzioni se $m > |a| > 0$ ed infine 2 soluzioni se $a = 0$.

3. Si tratta di un'equazione lineare del primo ordine. Un fattore integrante è $\exp(A(x))$ dove $A(x)$ è una primitiva di $a(x) := \tan x$, vale a dire
$$A(x) = \int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = -\log(\cos x) \ .$$
Moltiplicando l'equazione per $\exp(A(x)) = 1/\cos x$ e poi integrando otteniamo quindi
$$y = \cos x \int \frac{2\sin^3 x}{\cos x} \, dx \ .$$
Resta da calcolare quest'integrale indefinito: tramite il cambio di variabile $t = \cos x$ otteniamo
$$\begin{aligned} \int \frac{2\sin^3 x}{\cos x} \, dx &= -2 \int \frac{(1-\cos^2 x)}{\cos x} (-\sin x) dx \\ &= -2 \int \frac{1-t^2}{t} \, dt = \int 2t - \frac{2}{t} \, dt \\ &= t^2 - 2\log|t| + c = \cos^2 x - 2\log|\cos x| + c \end{aligned}$$
Pertanto la soluzione generale dell'equazione differenziale è
$$y = \cos^3 x - 2\cos x \, \log(\cos x) + c\cos x \ ,$$
definita per $-\pi/2 < x < \pi/2$. Imponendo $y(0) = 2$ otteniamo infine $c = 1$.

4. a) Segue dal punto b); una dimostrazione diretta è la seguente: nella somma che definisce x_n, minoriamo gli addendi con $k > n/2$ con $\log(n/2)$, ed i rimanenti con 0. Siccome i primi sono almeno $n/2$, abbiamo che
$$x_n \geq \frac{(n/2)\log(n/2)}{n} = \frac{\log n - \log 2}{2} \to +\infty \ .$$
b) Usiamo la solita stima integrale per le somme parziali di una serie: poiché la funzione $\log x$ è crescente, si ha che per ogni $k \geq 2$
$$\int_{k-1}^{k} \log x \, dx \leq \log k \leq \int_{k}^{k+1} \log x \, dx$$
per cui
$$\int_{1}^{n} \log x \, dx \leq \sum_{k=2}^{n} \log k \leq \int_{2}^{n+1} \log x \, dx \ .$$
Siccome dividendo per n il termine centrale di questa catena di disuguaglianze si ottiene proprio x_n, calcolando gli integrali ricaviamo le seguenti stime:
$$\log n - 1 + \frac{1}{n} \leq x_n \leq \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)\log(n+1) - 1 + \frac{1 - 2\log 2}{n} \ . \tag{6}$$
Poiché sia il termine maggiorante che quello minorante sono asintoticamente equivalenti a $\log n$, abbiamo dimostrato che $x_n \sim \log n$.
c) Usiamo la prima in stima (6) per $n = 100$ e ricordando che $\log 100 = 2\log 10 = 4{,}60 \pm 0{,}02$ otteniamo
$$x_{100} \geq \log 100 - 1 + 0{,}01 \geq 3{,}60 - 0{,}01 \ .$$
Viceversa, usando la seconda stima e ricordando che $2\log 2 > 1$ e $\log 1{,}01 \leq 0{,}01$ (perché $\log(1+x) \leq x$),
$$\begin{aligned} x_{100} &\leq 1{,}01 \cdot \log 101 - 1 = 1{,}01 \cdot (\log 100 + \log 1{,}01) - 1 \\ &\leq (4{,}60 + 0{,}03)(1 + 0{,}01) - 1 = 3{,}60 + 0{,}08 \ . \end{aligned}$$
Pertanto $x_{100} = 3{,}6 \pm 0{,}1$.

Commenti

- Seconda parte, esercizio 2. Nel risolvere l'esercizio, si è detto che il numero di rette tangenti al grafico di f che passano per il punto $(0, a)$ è pari al numero di soluzioni dell'equazione (5). Questo non è però del tutto esatto: se infatti una certa retta fosse tangente al grafico di f in più di un punto, allora a questa retta corrisponderebbero più soluzioni di (5) Si vede ad esempio che per $a = 0$, le due soluzioni dell'equazione (5), vale a dire $\pm\sqrt{2}$, corrispondono in realtà ad un'unica retta, cioè $y(t) = -t$. Si può dimostrare, ma non è affatto semplice, che questa è l'unica retta tangente al grafico di f in due punto distinti.

- Seconda parte, esercizio 4. Il punto b) può anche essere ottenuto come corollario della formula di Stirling: $n! \sim \sqrt{2\pi n}(n/e)^n$. In questo modo si ottiene anzi una stima molto più precisa di x_n:

$$nx_n = \log(n!) = \log\left[\sqrt{2\pi n}(n/e)^n(1 + o(1))\right] = n \log n - n + \frac{1}{2}\log n + o(1) \ . \qquad (7)$$

  Non si supponeva però che l'esercizio venisse risolto in questo modo. (Anche perché di solito si dimostra la stima (7) per ottenere la formula di Stirling, e non il viceversa!)

Prima parte

1. La funzione $e^z + 2$ è strettamente crescente e positiva, e dunque $(e^z + 2)^{-2}$ è strettamente decrescente. Pertanto i punti di minimo e massimo di $f(x)$ corrispondono rispettivamente ai punti di massimo e di minimo di $(x-1)^2$. In particolare, il punto di massimo di $f(x)$ è $x = 1$, mentre non esiste alcun punto di minimo.

2. Per esempio $f(x) := \exp(x^2)$.

3. Si integra per parti due volte:
$$\int_1^\infty x^2 e^{-x} dx = \Big| - x^2 e^{-x} \Big|_1^\infty + \int_1^\infty 2xe^{-x} dx = \frac{1}{e} + \Big| - 2xe^{-x} \Big|_1^\infty + \int_1^\infty 2e^{-x} dx = \frac{5}{e} \ .$$

4. Siccome $e^t = 1 + t + o(t)$, si ha $f(x) = \exp(x^3) - \exp(-x^3) = 2x^3 + o(x^3) \sim 2x^3$.

5. $\displaystyle\sum_{n=0}^\infty \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{\substack{n\ge 0\\ n \text{ pari}}} \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{2}\Big[\sum_{n\ge0} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n\ge0} \frac{(-x)^n}{n!}\Big] = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$

   Il raggio di convergenza è $+\infty$, come per la serie dell'esponenziale.

6. a) No, perché $\log n \ll n^{1/2}$ e quindi $1/\log^2 n \gg 1/n$.
   b) Sì, perché $2^n \gg n^5$ e quindi $|2^{-n} n^3 \sin n| \le 2^{-n} n^3 \ll n^{-2}$.
   c) No, perché il termine generico della serie non è infinitesimo.

7. Equazione a variabili separabili: $(1 + y^2)^{-1}\dot{y} = (1 + x^2)^{-1}$, e quindi $\arctan y = \arctan x + c$. Siccome $\arctan(\pm 1) = \pm\pi/4$, la condizione $y(-1) = 1$ implica $\pi/4 = -\pi/4 + c$, ovvero $c = \pi/2$. Quindi $y = \tan(\arctan x + \pi/2) = -1/\tan(\arctan x) = -1/x$.

8. Ponendo $z = x + iy$ la disequazione diventa $|(x+8) + (y-4)i| \ge |(2x+4) + (2y-2)i|$, vale a dire $(x+8)^2 + (y-4)^2 \ge (2x+4)^2 + (2y-2)^2$, e semplificando $20 \ge x^2 + y^2$. Si tratta dunque della circonferenza (piena) di centro l'origine e raggio $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

Seconda parte

1. a) I numeri di otto cifre comprese tra 1 e 9 sono $N = 9^8$, e quelli le cui prime tre sono uguali a 1 sono $N_a = 1^3 \cdot 8^5 = 8^5$. La probabilità cercata è quindi
$$P_a = \frac{N_a}{N} = \frac{8^5}{9^8} = 7{,}6 \cdot 10^{-4} \pm 10^{-5} \ .$$

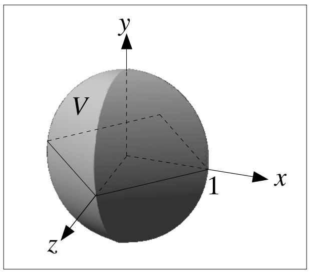
   b) I numeri con tre e solo tre cifre uguali a 1 sono N_a moltiplicato per il numero di modi di scegliere le posizioni delle tre cifre in questione, cioè $N_b = N_a \cdot C_{8,3}$, e quindi
$$P_b = \frac{N_b}{N} = \frac{N_a \cdot}{N} \cdot C_{8,3} = \frac{8^5}{9^8} \cdot \frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1} = \frac{8^5 \cdot 56}{9^8} = 4{,}3 \cdot 10^{-2} \pm 10^{-3} \ .$$

   c) I numeri con nessuna cifra uguale a 1 sono 8^8, quelli con una sola cifra uguale a 1 sono $8^7 \cdot C_{8,1}$, quelli con due sole cifre uguali a 1 sono infine $8^6 \cdot C_{8,2}$. Quindi i numeri con *al più* due cifre uguali a 1 sono $N_c = 8^8 + 8^7 \cdot C_{8,1} + 8^6 \cdot C_{8,2} = 8^6 \cdot 156$. Pertanto
$$P_c = \frac{N - N_c}{N} = 1 - \frac{8^6 \cdot 156}{9^8} = 5{,}0 \cdot 10^{-2} \pm 10^{-3} \ .$$

d) I numeri le cui prime tre cifre sono uguali a 1 e le seconde tre sono uguali a 2, e le rimanenti due non sono né 1 né 2 sono in totale $1^3 \cdot 1^3 \cdot 7^2$. I numeri con tre cifre uguali a 1 e tre uguali a 2 sono quindi pari a 7^2 moltiplicato per i possibili modi di scegliere le posizioni degli 1 e dei 2; i modi di scegliere le posizioni degli 1 sono $C_{8,3}$, ed una volta fatto questo, i modi di scegliere le posizioni dei 2 sono $C_{5,3}$. Pertanto i numeri con tre cifre uguali a 1 e tre uguali a 2 sono $N_d := 7^2 \cdot C_{8,3} \cdot C_{5,3}$, e quindi

$$P_d = \frac{N_d}{N} = \frac{7^2 \cdot}{9^8} \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{7^3 \cdot 5 \cdot 2^4}{9^8} = 6{,}4 \cdot 10^{-4} \pm 10^{-5} \ .$$

2. a) Fissato $t \in \mathbb{R}$, l'insieme V_t dei punti di (x, z) tali che (x, t, z) appartiene a V è descritto dalla disequazione $|x|+|z| \leq \sqrt{1-t^2}$. Per $|t| > 1$ si tratta dell'insieme vuoto, per $t = \pm 1$ si tratta dell'insieme che contiene solo l'origine, mentre per $|t| < 1$ abbiamo il quadrato di vertici $(\pm\sqrt{1-t^2}, 0)$ e $(0, \pm\sqrt{1-t^2})$. In particolare l'area di V_t è $2(1-t^2)$.
b) Vedi figura.
c) Il volume di V è dato dall'integrale dell'area di V_t rispetto a t:



$$\mathrm{vol}(V) = \int_{-1}^{1} 2(1-t^2)\, dt = \frac{8}{3} \ .$$

3. a) Usando gli sviluppi di Taylor $\sin x = x - x^3/6 + o(x^4)$ e $e^t = 1 + t + t^2/2 + o(t^2)$ si ottiene

$$\begin{aligned} \exp(-x \sin x) &= \exp\Big(-x^2 + \frac{x^4}{6} + o(x^5) \Big) \\ &= 1 + \Big(-x^2 + \frac{x^4}{6} + o(x^5) \Big) + \frac{1}{2}\big(-x^2 + o(x^3) \big)^2 + o(x^4) \\ &= 1 - x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4) \ . \end{aligned}$$

Usando lo sviluppo $\cos t = 1 - t^2/2 + t^4/24 + o(t^5)$ si ottiene invece

$$\cos(\sqrt{2}x) = 1 - x^2 + \frac{x^4}{6} + o(x^5) \ ,$$

e dunque

$$f(x) := \exp(-x \sin x) - \cos(\sqrt{2}x) = \frac{x^4}{2} + o(x^4) \ . \tag{1}$$

b) Per via di (1), la successione $f(n^{-a})$ è asintoticamente equivalente alla successione positiva $1/(2n^{4a})$, e quindi è definitivamente positiva. Stiamo usando il seguente fatto generale: se $a_n \sim b_n$ e b_n è definitivamente positiva, allora lo stesso vale per a_n, in quanto il rapporto a_n/b_n tende ad 1 e quindi $a_n/b_n \geq 1/2$ definitivamente, vale a dire $a_n \geq b_n/2$, che è positivo.
c) Siccome $f(n^{-a})$ è asintoticamente equivalente a $1/(2n^{4a})$, $\sum f(n^{-a}) < +\infty$ se e solo se $\sum 1/n^{4a} < +\infty$, ovvero se e solo se $a > 1/4$.
d) La serie converge per ogni $a > 0$. Per dimostrarlo, ricordiamo che una serie a termini (definitivamente) di segno alterno converge se il termine generico è infinitesimo e decrescente in modulo, almeno da un certo punto in poi (criterio di Leibniz). La prima condizione è verificata per ogni $a > 0$ perché $f(x)$ è infinitesima a $+\infty$. La seconda condizione è verificata per ogni $a > 0$ perché $f(x)$ è crescente in un intorno destro di 0. Infatti, per via di (1) il polinomio di Taylor all'ordine 3 di $f'(x)$ in 0 deve essere $2x^3$, ovvero $f'(x)$ è asintoticamente equivalente a $2x^3$ per $x \to 0$, e siccome quest'ultima funzione è positiva a destra di 0, $f'(x)$ deve essere positiva in un intorno destro di 0.

Commenti

- Prima parte, esercizio 2. Molti hanno dato una funzione f che dipende dal valore del parametro a, mentre il punto dell'esercizio è proprio esibire un'unica funzione f che va bene per tutti i valori di a.
- Seconda parte, esercizio 2. Nella versione data all'esame, l'equazione che definisce V è stata erroneamente trascritta come $(x+z)^2 + y^2 \leq 1$. In questo caso V è un cilindro illimitato ottenuto traslando il disco di centro l'origine e raggio 1 che giace sul piano xy lungo la retta di equazioni $y = 0$ e $z = -x$ (tale retta è quindi l'asse del cilindro, e la sezione ortogonale all'asse è un'ellisse con asse maggiore 1 ed asse minore $1/\sqrt{2}$). Ovviamente V ha volume infinito.
  Qui ho preferito mettere l'esercizio come era originariamente inteso.
- Seconda parte, esercizio 3a). Nessuno ha determinato correttamente la parte principale di $f(x)$; l'errore più frequente è consistito nell'usare lo sviluppo $e^t = 1 + t + o(t)$, senza accorgersi che sostituendo $t = -x \sin x$ il resto $o(t)$ diventa $o(x^2)$, e non $o(x^4)$.
- Seconda parte, esercizio 3b). Quasi nessuno ha giustificato correttamente il fatto che $f(n^{-a})$ è definitivamente positiva.
- Seconda parte, esercizio 3d). Quasi nessuno ha dimostrato correttamente che $f(n^{-a})$ è definitivamente decrescente; in effetti questo non segue dal fatto che $f(n^{-a})$ è asintoticamente equivalente a $1/(2n^{4a})$ (ad esempio, $n^{-1} + (-1)^n n^{-3/2}$ è asintoticamente equivalente a $1/n$, ma a differenza di quest'ultima non è definitivamente decrescente).