CORSO: **Introduzione alla teoria delle equazioni alle derivate parziali**
CORSO DI LAUREA: **Matematica**
ANNO ACCADEMICO: **2002/03**
DOCENTE: **Giovanni Alberti**

Lo scopo del corso è di illustrare alcune applicazioni dell'analisi funzionale alla teoria delle equazioni alle derivate parziali. Si presuppone quindi che lo studente abbia seguito il corso di Analisi Funzionale. Gli argomenti in corsivo solo stati solo accennati.

Programma del corso

1. ELEMENTI DI CALCOLO DELLE VARIAZIONI
   1.1. Una funzione sufficientemente regolare che minimizza un funzionale integrale (con condizioni fissate al bordo oppure no) risolve l'equazione di Eulero-Lagrange associata (con condizioni di Dirichlet oppure di Neumann al bordo).
   1.2. Vale il viceversa per funzionali convessi. Funzionale di Dirichlet ed equazione di Laplace.
2. COMPLEMENTI DI ANALISI FUNZIONALE
   2.1. Misure (finite) vettoriali, e duale delle funzioni continue.
   2.2. Dimostrazione completa del teorema di Riesz (duale di L^p)
   2.3. Topologia debole e debole star, spazi riflessivi, teorema di Banach-Alaoglu.
   2.4. Esempi di convergenza debole ma non forte: limite di $f_n(x) := f(nx)$.
   2.5. *Il teorema di Hahn-Banch come teorema di separazione (senza dimostrazione). Un convesso fortemente chiuso è debolmente chiuso.*
   2.6. Esistenza di minimi per funzionali coercivi e debolmente semicontinui inferiormente su uno spazio riflessivo separabile.
   2.7. Convessità e semicontinuità inferiore forte implicano la semicontinuità inferiore debole. Applicazione: funzionali integrali convessi su L^p: coercività e crescita p dell'integranda.
3. DISTRIBUZIONI
   3.1. Distribuzioni (su $\mathbb{R}$) come duale delle funzioni regolari a supporto compatto. *Topologia sullo spazio delle distribuzioni.* Nozione di convergenza debole per una successione di distribuzioni.
   3.2. L'operatore di derivazione sulle distribuzioni.
   3.3. Prodotto di convoluzione di funzioni L^p, stime L^p standard. Derivata del prodotto di convoluzione.
   3.4. Regolarizzazione per convoluzione delle funzioni L^p.
   3.5. Convoluzione di distribuzioni e regolarizzazione per convoluzione.
   3.6. Distribuzioni su un aperto qualunque; approssimazione con funzioni regolari.
4. SPAZI DI SOBOLEV
   4.1. Definizione distribuzionale degli spazi di Sobolev $W^{1,p}$ su un aperto di $\mathbb{R}^n$.
   4.2. Proprietà degli spazi di Sobolev su un intervallo: estensione, approssimazione con funzioni regolari, immersione (compatta) nelle funzioni Hölderiane fin sul bordo.
   4.3. Caratterizzazione della convergenza debole negli spazi di Sobolev in termini di convergenza debole di funzioni e derivate.
   4.4. Esistenza del minimo per alcuni esempi di funzionali integrali convessi. Equazione di Eulero-Lagrange in senso debole, regolarità ulteriore per i minimi del funzionale di Dirichlet.

4.5. *Spazi di Sobolev su un aparto regolare in dimensione qualunque: caratterizzazioni alternative, estensione, immersioni, traccia sul bordo, disuguaglianze tipo Poincaré.*

4.6. Convergenza debole degli spazi di Sobolev ed esistenza del minimo per l'energia di Dirichlet; soluzioni deboli dell'equazione di Laplace (con varie condizioni al bordo).

5. Serie di Fourier

5.1. Serie di Fourier reale e complessa per fuzioni in $L^2(-\pi,\pi)$. Differenza tra $(-\pi,\pi)$ e $\mathbb{R}/2\pi$.

5.2. Serie di Fourier di una funzione C^1 su $\mathbb{R}/2\pi$ e della sua derivata.

5.3. Caratterizzazione delle funzioni regolari su $\mathbb{R}/2\pi$ in termini dei coefficienti Fourier.

5.4. *Caratterizzazione delle distribuzioni su* $\mathbb{R}/2\pi$ *in termini dei coefficienti Fourier.*

5.5. Convergenza della serie di Fourier per funzioni a) in L^2, b) con coefficienti sommabili, c) in $W^{1,2}$, d) in $W^{1,2}$ a tratti.

5.6. Calcolo delle serie di Fourier di alcune funzioni.

5.7. Soluzione dell'equazione delle onde e del calore via serie di Fourier (separazione delle variabili, caso classico). Ruolo dei dati iniziali e delle condizioni al bordo.

5.8. Serie di Fourier per funzioni sul cubo $(-\pi,\pi)^n$.

6. Teorema spettrale e basi ortonormali

6.1. Teorema spettrale: dato un spazio di Hilbert W che si immerge compattamente e densamente nello spazio di Hilbert H, ed una forma quadratica Q su W semicontinua inferiormente e coerciva, allora esiste una base ortonormale di H fatta di autovettori dell'operatore autoaggiunto T associato a Q. Dimostrazione per minimizzazioni successive.

6.2. La base standard di $L^2(-\pi,\pi)$ come base di autovettori dell'operatore $Tu = -\ddot{u}$ con condizioni di periodicità al bordo.

6.3. Basi $L^2(0,\pi)$ di autovettori dell'operatore $Tu = -\ddot{u}$ con condizioni di Dirichlet (risp. Neumann) al bordo.

7. Trasformata di Fourier

7.1. *Trasformata di Fourier come limite delle serie di Fourier.*

7.2. Trasformata di Fourier di una funzione in L^1 di $\mathbb{R}^n$.

7.3. La trasformata di Fourier è un'isometria su L^2; trasformata della derivata.

7.4. Distribuzioni temperate e loro trasformate di Fourier.

7.5. Calcolo delle trasformate di Fourier di alcune funzioni.

7.6. *Soluzione fondamentale di un'equazione lineare su* $\mathbb{R}^n$.

Bibliografia

Il corso non seguirà un testo preciso. Tra quelli esistenti, tuttavia, segnaliamo i seguenti:

1. W. Rudin: *Real and Complex Analysis. Third edition.* McGraw-Hill, New York, 1987. (Traduzione italiana: *Analisi reale e complessa.* Boringhieri, Torino 1991.)
2. W. Rudin: *Functional Analysis. Third edition.* McGraw-Hill, New York, 1973.
3. H. Brezis: *Analyse fonctionnelle. Thorie et applications.* Masson, Paris 1983. (Traduzione italiana: *Analisi funzionale. Teoria e applicazioni.* Liguori, Napoli 1986.)