Massimi e minimi vincolati

Sia f una funzione differenziabile, definita su un aperto A di $\mathbb{R}^N$. Se K è un sottoinsieme chiuso e limitato di A, per il teorema di Weierstrass f assume massimo e minimo su K. Se uno di essi è assunto in un punto interno a K, sappiamo che in tale punto il gradiente di f è nullo. Però può capitare che il massimo o il minimo di f cadano in punti appartenenti alla frontiera di K, e in questo caso non sappiamo individuare questi punti. Vogliamo sviluppare un metodo per determinare i punti di massimo e di minimo di f su un insieme privo di parte interna.

Anzitutto, ricordiamo che il vettore $\nabla f(\mathbf{x})$ indica la direzione in cui il grafico di f, nel punto $(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))$, ha la massima pendenza. Infatti la pendenza del grafico di f nella generica direzione $\mathbf{v}$ (con $|\mathbf{v}| = 1$) è data dal numero

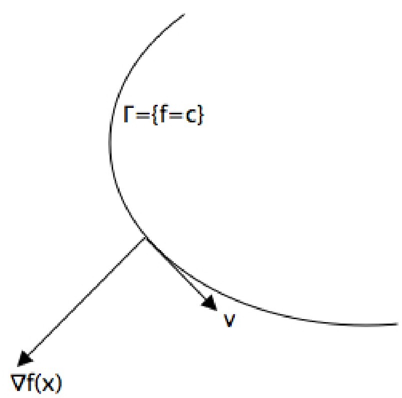
$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) \bullet \mathbf{v},$$

e che per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz tale quantità è massima quando

$$\mathbf{v} = \frac{\nabla f(\mathbf{x})}{|\nabla f(\mathbf{x})|}\,.$$

Di conseguenza, se Γ è la *curva di livello* c di f, ossia

$$\Gamma = \{\mathbf{x} \in A : f(\mathbf{x}) = c\},$$



se essa è non vuota allora $\nabla f(\mathbf{x})$ è diretto ortogonalmente a Γ: infatti, muovendosi lungo Γ la f è costante e quindi la corrispondente derivata direzionale è nulla; dunque, detta $\mathbf{v}$ una direzione tangente a Γ, si ha $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}) = 0$ e pertanto $\nabla f(\mathbf{x}) \bullet \mathbf{v} = 0$, ossia $\nabla f(\mathbf{x})$ è ortogonale a Γ.

Ciò premesso, diamo un risultato importante relativo alla derivazione di una funzione composta.

Teorema 1 Sia f una funzione differenziabile, definita su un aperto A di $\mathbb{R}^N$. Sia inoltre $\mathbf{v} : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ una funzione vettoriale derivabile: in altre parole, date N funzioni reali derivabili $v_1, \ldots, v_N$ definite su $[a, b]$, poniamo

$$\mathbf{v}(t) = (v_1(t), \ldots, v_N(t)) \qquad \forall t \in [a, b]$$

e denotiamo con $\mathbf{v}'(t)$ il vettore delle derivate:

$$\mathbf{v}'(t) = (v_1'(t), \ldots, v_N'(t)) \qquad \forall t \in [a,b].$$

Supponiamo anche che $\mathbf{v}(t) \in A$ per ogni $t \in [a,b]$. Allora la funzione composta $F(t) = f(\mathbf{v}(t))$ è derivabile in $[a,b]$ e si ha

$$F'(t) = \nabla f(\mathbf{v}(t)) \bullet \mathbf{v}'(t) \qquad \forall t \in [a,b]. \quad \square$$

Sia allora $K \subset A$ l'insieme chiuso e limitato nel quale vogliamo determinare i punti di massimo e di minimo della funzione differenziabile f. Sui punti interni a K sappiamo come comportarci; ci interessa adesso sapere cosa succede nei punti della frontiera ∂K. Serve qualche ipotesi; supporremo che ∂K sia espresso in uno dei due modi seguenti:

(i) forma parametrica: $\partial K = \{\mathbf{x} = \mathbf{v}(t),\ t \in [a,b]\}$, con $\mathbf{v}$ funzione vettoriale derivabile definita su $[a,b]$ a valori in $\mathbb{R}^N$, tale che $\mathbf{v}'(t) \neq \mathbf{0}$ per ogni $t \in [a,b]$;

(ii) forma di curva di livello: $\partial K = \{\mathbf{x} \in A : \varphi(\mathbf{x}) = 0\}$, con φ funzione differenziabile definita su A a valori in $\mathbb{R}$, con $\nabla\varphi(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ per ogni $\mathbf{x} \in \partial K$.

Esempio 2 Sia K il disco di centro l'origine e raggio 1 in $\mathbb{R}^2$. Allora

$$\partial K = \{(x,y) = (\cos t, \sin t) :\ t \in [0, 2\pi]\}$$

e la funzione che parametrizza ∂K è $\mathbf{v}(t) = (\cos t, \sin t)$.

Esempio 3 Sia K il quadrato $[0,1] \times [0,1]$: allora ∂K è unione di quattro pezzi:

$$T_1 = \{(t,0) :\ t \in [0,1]\}, \quad T_2 = \{(1,t) :\ t \in [0,1]\},$$
$$T_3 = \{(t,1) :\ t \in [0,1]\}, \quad T_4 = \{(0,t) :\ t \in [0,1]\},$$

ognuno dei quali è in forma parametrica.

Esempio 4 Sia K il rombo di vertici $(\pm 1, 0)$ e $(0, \pm 1)$: esso si può scrivere nella forma

$$K = \{(x,y) :\ |y| \leq 1 - |x|\},$$

e la sua frontiera è esprimibile come curva di livello della funzione $\varphi(x,y) = |y| + |x| - 1$:

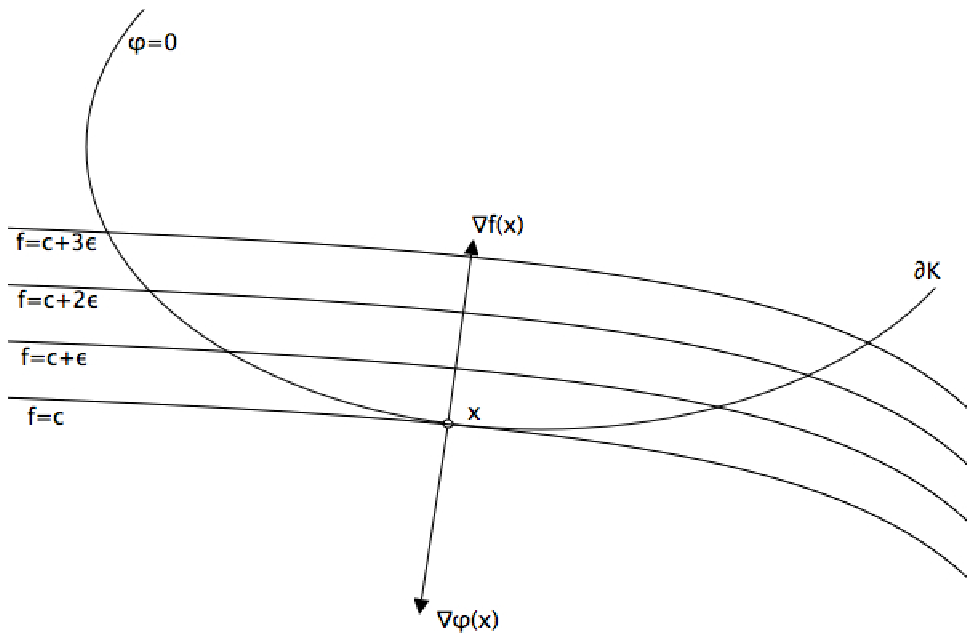
$$\partial K = \{(x,y) : |y| + |x| - 1 = 0\}.$$

Esempio 5 Il disco di centro (a, b) e raggio r si può descrivere come

$$K = \{(x, y) : \ (x - a)^2 + (y - b)^2 \leq r^2\},$$

e dunque

$$\partial K = \{(x, y) : (x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0\}.$$



Nella figura qui sopra è illustrata l'idea seguente: supponiamo che K sia la curva di livello 0 della funzione φ. Se percorriamo la frontiera di K, attraversiamo varie curve di livello di f. Non appena si tocca un punto che appartiene alla curva di livello minimo tra quelle che intersecano ∂K, notiamo che essa è tangente a ∂K nel punto; lo stesso discorso, naturalmente, vale per la curva di livello massimo. Ne segue che i punti di massimo o di minimo della f su ∂K vanno ricercati fra quelli dove la curva di livello di f è tangente a ∂K.

Definizione 6 Un punto $\mathbf{x}_0$ della frontiera di K, nel quale la curva di livello di f è tangente a ∂K, si dice *punto stazionario vincolato* per f su K.

Questa terminologia ci indica che $\mathbf{x}_0$ non è punto stazionario per la f, ma solo per la restrizione di f all'insieme ∂K, ciò che appunto costituisce un "vincolo" per f. In conclusione, i punti di massimo e di minimo per f su K vanno ricercati fra i punti stazionari vincolati.

A questo scopo sono disponibili due ricette. La prima riguarda il caso di un vincolo espresso in forma parametrica.

Teorema 7 Sia f una funzione differenziabile, definita su un aperto A di $\mathbb{R}^N$, e sia K un sottoinsieme chiuso e limitato di A, con frontiera ∂K della forma

$$\partial K = \{\mathbf{x} = \mathbf{v}(t),\ t \in [a,b]\},$$

ove $\mathbf{v}$ è una funzione vettoriale derivabile definita su $[a,b]$ a valori in A, tale che $\mathbf{v}'(t) \neq \mathbf{0}$ per ogni $t \in [a,b]$. Se $\mathbf{x}_0 = \mathbf{v}(t_0) \in \partial K$ è punto di massimo o di minimo per f su ∂K, con t_0 interno ad $[a,b]$, allora $\mathbf{x}_0$ è punto stazionario vincolato per f su ∂K e in particolare

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) \bullet \mathbf{v}'(t_0) = 0.$$

Dimostrazione: sia $t_0 \in]a,b[$ tale che $\mathbf{x}_0 = \mathbf{v}(t_0)$. La funzione composta $F(t) = f(\mathbf{v}(t))$ ha un massimo o un minimo nel punto t_0: quindi, $F'(t_0) = 0$. In virtù del teorema 1,

$$0 = F'(t_0) = \nabla f(\mathbf{v}(t_0)) \bullet \mathbf{v}'(t_0).$$

D'altra parte, il vettore $\mathbf{v}'(t_0)$ è tangente a ∂K nel punto $\mathbf{v}(t_0) = \mathbf{x}_0$ (se interpretiamo $\mathbf{v}(t)$ come uno spostamento, allora $\mathbf{v}'(t)$ è la velocità, che è un vettore tangente alla traiettoria). Dunque $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \nabla f(\mathbf{v}(t_0))$ è perpendicolare a ∂K in $\mathbf{x}_0$. $\square$

La seconda ricetta riguarda il caso in cui il vincolo è una curva di livello di una funzione assegnata.

Teorema 8 Sia f una funzione differenziabile, definita su un aperto A di $\mathbb{R}^N$, e sia K un sottoinsieme chiuso e limitato di A, con frontiera ∂K della forma

$$\partial K = \{\mathbf{x} \in A : \ \varphi(\mathbf{x}) = 0\},$$

ove $\varphi : A \to \mathbb{R}$ è una funzione differenziabile con $\nabla\varphi(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ per ogni $\mathbf{x} \in A$. Se $\mathbf{x}_0 \in \partial K$ è punto di massimo o di minimo per f su ∂K, allora $\mathbf{x}_0$ è punto stazionario vincolato per f su ∂K e in particolare esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\begin{cases} \nabla f(\mathbf{x}_0) - \lambda \nabla\varphi(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0} \\ \varphi(\mathbf{x}_0) = 0. \end{cases}$$

Osservazione 9 La condizione espressa dal teorema 8 può essere riformulata come segue: un punto $\mathbf{x}_0 \in \partial K$ è stazionario vincolato per f su ∂K se e solo se esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $(\mathbf{x}_0, \lambda)$ è punto stazionario libero in $A \times \mathbb{R}$ per la funzione

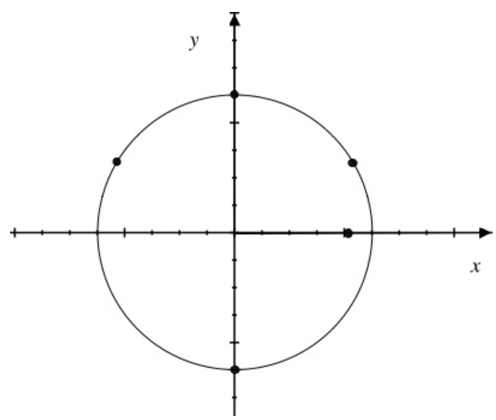
$$L(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) - \lambda\varphi(\mathbf{x}), \qquad (\mathbf{x}, \lambda) \in A \times \mathbb{R}.$$

Infatti, basta osservare che

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}(\mathbf{x}, \lambda) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x^i}(\mathbf{x}), \qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda}(\mathbf{x}, \lambda) = \varphi(\mathbf{x}).$$

Esempio 10 Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x,y) = 2x^2 - 3y^2 + 5y$; cerchiamo il massimo ed il minimo di f sul disco

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 1\}.$$



Cerchiamo eventuali punti stazionari (x,y) interni a K, ossia tali che $x^2 + y^2 < 1$: il gradiente di f si annulla se e solo se

$$\begin{cases} 4x = 0 \\ -6y + 5 = 0, \end{cases}$$

sistema che ha l'unica soluzione $(x,y) = (0, 5/6)$. Questo è dunque l'unico punto stazionario interno a K (infatti in tale punto si ha $x^2 + y^2 = 25/36 < 1$).
Dato che cerchiamo i punti di massimo e minimo assoluti, e non relativi, non conviene calcolare la matrice Hessiana di f: prendiamo nota semplicemente, per un futuro confronto, del valore

$$f\left(0, \frac{5}{6}\right) = \frac{25}{12}.$$

Vediamo che succede sulla frontiera di K. Possiamo parametrizzare ∂K come

$$\partial K = \{(\cos t, \sin t) : \ t \in [0, 2\pi]\}.$$

La restrizione di f a ∂K è la funzione

$$F(t) = 2\cos^2 t - 3\sin^2 t + 5\sin t, \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Si ha
$$F'(t) = 0 \quad \iff \quad -10\cos t \sin t + 5\cos t = 0,$$
ossia deve aversi $\cos t = 0$ oppure $\sin t = 1/2$. Si ottengono così i punti stazionari vincolati seguenti:
$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad (0,1), \quad \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad (0,-1),$$
corrispondenti rispettivamente a $t = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$. In tali punti si ha
$$f\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{13}{4}, \quad f(0,1) = 2, \quad f(0,-1) = -8.$$
Confrontando tutti i valori trovati si conclude che
$$\min_K f = f(0,-1) = -8, \qquad \max_K f = f\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{13}{4}.$$
Riprendiamo adesso lo stesso esempio, scrivendo stavolta ∂K come curva di livello:
$$\partial K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \varphi(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0\}.$$
Come suggerisce l'osservazione 9, cerchiamo i punti stazionari della funzione
$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda\varphi(x,y) = 2x^2 - 3y^2 + 5y - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$
in $\mathbb{R}^3$. Annulliamo il gradiente:
$$\begin{cases} 4x - 2\lambda x = 0 \\ -6y + 5 - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0. \end{cases}$$
La prima equazione ci dice che $\lambda = 2$ oppure $x = 0$. Se $\lambda = 2$, dalla seconda segue $y = \frac{1}{2}$ e quindi, dalla terza, $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Se invece $x = 0$, la terza equazione ci dà $y = \pm 1$ e la seconda ci fornisce i corrispondenti valori di λ: $\lambda = -\frac{1}{2}$ quando $y = 1$, $\lambda = -\frac{11}{2}$ quando $y = -1$. Abbiamo così ritrovato i punti stazionari vincolati
$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad (0,1), \quad \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad (0,-1).$$

Esempio 11 Consideriamo la funzione $f(x,y) = e^{x^2-xy}$: cerchiamone il massimo ed il minimo sul quadrato

$$K = [-1,1] \times [-1,1] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|,|y|\} \leq 1\}.$$

Gli eventuali punti stazionari interni sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} e^{x^2-xy}(2x-y) = 0 \\ e^{x^2-xy}(-x) = 0; \end{cases}$$

l'unica soluzione di questo sistema è $(0,0)$ e si ha $f(0,0) = 1$.
Vediamo cosa succede alla frontiera: ∂K è l'unione dei quattro segmenti

$$\begin{aligned} S_1 &= \{(x,-1) : x \in [-1,1]\}, \quad S_2 = \{(1,y) : y \in [-1,1]\}, \\ S_3 &= \{(x,1) : x \in [-1,1]\}, \qquad S_4 = \{(-1,y) : y \in [-1,1]\}. \end{aligned}$$

Per $i = 1,2,3,4$ denotiamo con f_i la restrizione di f al segmento S_i. Su S_1 si ha

$$f_1(x) = e^{x^2+x}, \quad f_1'(x) = e^{x^2+x}(2x+1) \geq 0 \iff x \geq -\frac{1}{2};$$

quindi f_1 è minima in $x = -1/2$, dove vale $e^{-1/4}$, e massima in uno dei due estremi: dato che $f_1(-1) = 1$ e $f_1(1) = e^2$, essa è massima in $x = 1$.
Su S_2 si ha

$$f_2(y) = e^{1-y}, \quad f_2(y) = -e^{1-y} < 0,$$

quindi f_2 ha minimo in $y = 1$, dove vale 1, e massimo in $y = -1$, dove vale e^2.
Su S_3 si ha

$$f_3(x) = e^{x^2-x}, \quad f_3'(x) = e^{x^2-x}(2x-1) \geq 0 \iff x \geq \frac{1}{2};$$

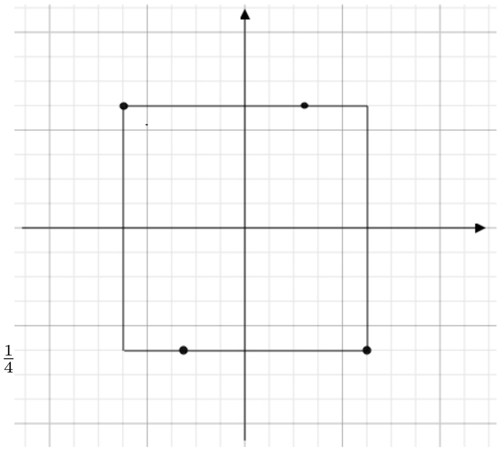
quindi f_3 è minima in $x = 1/2$, dove vale $e^{-1/4}$, e massima in uno dei due estremi: dato che $f_3(-1) = e^2$ e $f_3(1) = 1$, essa è massima in $y = -1$.
Infine su S_4 si ha

$$f_4(y) = e^{1+y}, \quad f_4(y) = e^{1+y} > 0,$$

quindi f_4 ha minimo in $y = -1$, dove vale 1, e massimo in $y = 1$, dove vale e^2.
In conclusione, confrontando tutti i valori estremi trovati, risulta

$$\max_K f = f(1,-1) = f(-1,1) = e^2,$$

$$\min_K f = f\left(-\frac{1}{2},-1\right) = f\left(\frac{1}{2},1\right) = e^{-\frac{1}{4}}$$



Esercizi

1. Determinare, con tutti e due i metodi sopra descritti, il massimo e il minimo della funzione $f(x,y) = e^{x-y}$ sulla circonferenza K di centro $(0,0)$ e raggio 1.

2. Sia Q il quadrato di $\mathbb{R}^2$ di centro l'origine e spigolo 2. Calcolare il massimo e il minimo di $f(x,y) = (x^2-1)y^2$ su Q.

3. Siano $a,b \in \mathbb{R}$ non entrambi nulli. Determinare il massimo ed il minimo della funzione $f(x,y) = ax + by$ sulla circonferenza $x^2 + y^2 = 1$.

4. Sia $\alpha > 0$. Determinare il massimo ed il minimo della funzione $f(x,y) = xy$ sull'insieme
$$\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^\alpha + y^\alpha = 1\}.$$

5. Determinare il massimo ed il minimo delle funzioni seguenti sui vincoli indicati:
   (i) $f(x,y) = (x+2y)^2, \quad K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1\right\};$
   (ii) $f(x,y) = (3x+2y)^2, \quad K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 = 1\}.$

6. Fra tutti i rettangoli, con lati paralleli agli assi, inscritti in una data ellisse, trovare quello di area massima.

7. Trovare il massimo ed il minimo di $f(x,y) = xy$ sul vincolo
$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}.$$