Integrazione - Analisi in più variabili 2

Prove scritte dal 2008

Prova scritta del 12 giugno 2008

Esercizio 1 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Provare che i seguenti fatti sono equivalenti:

(i) f trasforma insiemi misurabili in insiemi misurabili;

(ii) f trasforma insiemi misurabili di misura nulla in insiemi misurabili.

Esercizio 2

(i) Fissate $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $g \in C_0^0(\mathbb{R})$, si provi che

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+n)g(x)\,dx = 0.$$

(ii) Si può estendere il risultato al caso in cui $f \in L^p(\mathbb{R})$ e $g \in L^q(\mathbb{R})$, con $p, q \in]1, \infty[$ esponenti coniugati?

Esercizio 3 Si calcoli il volume del solido T delimitato dai piani $z = 0$, $z = 1$ e dalla superficie ottenuta ruotando attorno all'asse z il grafico della funzione

$$x = \sqrt{z}\, e^{-4z^2}, \quad 0 \le z \le 1.$$

Esercizio 4 Si scriva la serie di Fourier della funzione

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi+x}{2} & \text{se } \ -\pi \le x \le -1 \\ \frac{\pi-1}{2}\, x & \text{se } \ -1 \le x \le 1 \\ \frac{\pi-x}{2} & \text{se } \ 1 \le x \le \pi. \end{cases}$$

Se ne deducano le uguaglianze

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin(2k+1)}{(2k+1)^2} = \frac{\pi}{4}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^4} = \frac{(\pi-1)^2}{6}\,.$$

Risoluzione

Esercizio 1 (i) $\Longrightarrow$ (ii) Evidente.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Cominciamo con il caso di un insieme E misurabile e limitato. Per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ esiste un compatto $K_n \subseteq E$ tale che $m_1(K_n) > m_1(E) - \frac{1}{n}$; posto $C = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, ne segue $C \subseteq E$ e $m_1(C) = m_1(E)$. Quindi l'insieme $N = E \setminus C$ è misurabile con misura nulla.
Per ipotesi, l'insieme $f(N)$ è misurabile. Consideriamo l'insieme $f(E)$: possiamo scrivere

$$f(E) = f(C \cup N) = f(C) \cup f(N) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f(K_n) \cup f(N);$$

dato che gli insiemi $f(K_n)$ sono compatti, essi sono misurabili e quindi $f(E)$ risulta a sua volta misurabile.
Se adesso E è un insieme misurabile e non limitato, per ogni palla B_n, centrata nell'origine e di raggio $n \in \mathbb{N}^+$, l'insieme $E_n = E \cap B_n$ è misurabile e limitato: quindi, per quanto già provato, $f(E_n)$ è misurabile. Allora, essendo

$$f(E) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f(E_n),$$

anche $f(E)$ è misurabile.
Esercizio 2 (i) Possiamo scrivere

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+n)g(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t-n)\,dt;$$

poichè $g \in C_0^0(\mathbb{R})$, per ogni $t \in \mathbb{R}$ si ha $g(t-n) \to 0$ per $n \to \infty$. Dato che

$$|f(t)g(t-n)| \leq |f(t)|\|g\|_\infty \qquad \text{q.o. in } \mathbb{R},$$

dal teorema di Lebesgue ricaviamo

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t-n)\,dt = 0$$

e quindi la tesi.

(ii) Siano $p, q \in]1, \infty[$ esponenti coniugati e siano $f \in L^p(\mathbb{R})$, $g \in L^q(\mathbb{R})$. Fissato $\varepsilon > 0$, scegliamo $M_\varepsilon > 0$ tale che

$$\left[\int_{\{|x| \geq M_\varepsilon\}} |g|^q \, dx\right]^{\frac{1}{q}} < \varepsilon.$$

Sia poi $\nu_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$\left[\int_{-M_\varepsilon+\nu_\varepsilon}^{+\infty} |f|^p \, dx\right]^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

Allora si ha per ogni $n \geq \nu_\varepsilon$

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+n)g(x)\, dx\right| \leq \\
&\quad \leq \int_{\{|x|\geq M_\varepsilon\}} |f(x+n)g(x)|\, dx + \int_{-M_\varepsilon}^{+M_\varepsilon} |f(x+n)g(x)|\, dx \leq \\
&\quad \leq \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+n)|^p \, dx\right]^{\frac{1}{p}} \cdot \left[\int_{\{|x|\geq M_\varepsilon\}} |g|^q \, dx\right]^{\frac{1}{q}} + \\
&\quad + \left[\int_{-M_\varepsilon}^{+M_\varepsilon} |f(x+n)|^p \, dx\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|^q \, dx\right]^{\frac{1}{q}} = \\
&\quad = \|f\|_{L^p(\mathbb{R})} \left[\int_{\{|x|\geq M_\varepsilon\}} |g|^q \, dx\right]^{\frac{1}{q}} + \left[\int_{-M_\varepsilon+\nu_\varepsilon}^{+\infty} |f(t)|^p \, dt\right]^{\frac{1}{p}} \|g\|_{L^q(\mathbb{R})} < \\
&\quad < \varepsilon \left[\|f\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|g\|_{L^q(\mathbb{R})}\right],
\end{aligned}$$

e ciò prova che

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+n)g(x)\, dx = 0 \quad \forall f \in L^p(\mathbb{R}),\ \forall g \in L^q(\mathbb{R}).$$

Esercizio 3 L'insieme T è un solido di rotazione: esso si rappresenta nella forma

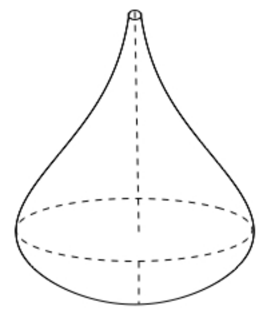
$$T = \{(x, y, z) : \sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{z}\, e^{-4z^2},\ 0 \leq z \leq 1\},$$

ovvero, in coordinate cilindriche,

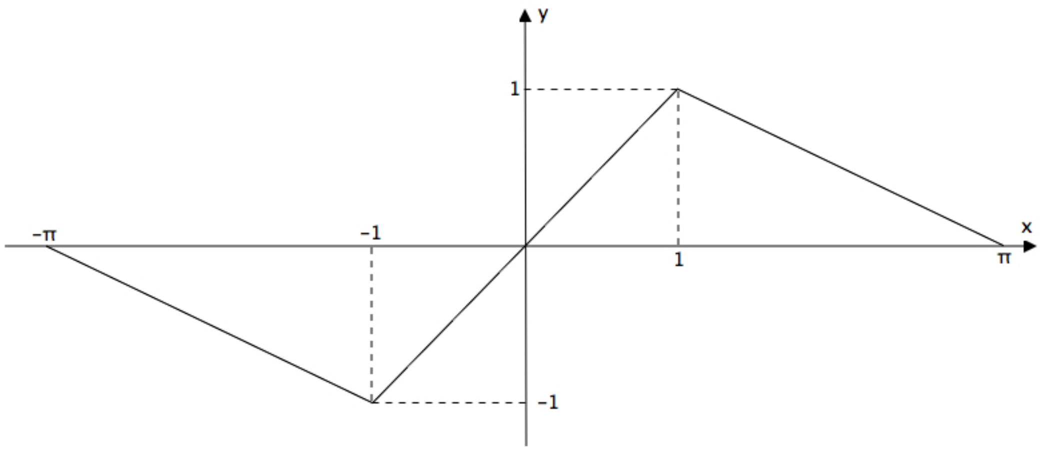
$$T = \{(\rho, \vartheta, z) : \vartheta \in [0, 2\pi],\ \rho \in [0, \sqrt{z}\, e^{-4z^2}],\ z \in [0, 1]\}.$$

Si può quindi integrare per fette orizzontali: dato che ciascuna fetta è un disco di raggio $\sqrt{z}\, e^{-4z^2}$, si ha

$$\begin{aligned} m_3(T) &= \int_0^1 \pi z e^{-8z^2}\, dz = \\ &= \frac{\pi}{16}\left[-e^{-8z^2}\right]_0^1 = \\ &= \frac{\pi(1-e^{-8})}{16}. \end{aligned}$$



Esercizio 4 La funzione f è dispari, come è facile verificare; quindi i coefficienti di Fourier relativi ai coseni sono nulli, mentre quelli relativi ai seni sono dati da



$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\sin nt\,dt = \\
&= \frac{\pi-1}{\pi}\int_0^1 t\sin nt\,dt + \frac{1}{\pi}\int_1^\pi (\pi-t)\sin nt\,dt = \\
&= \frac{\pi-1}{\pi}\left(\left[-t\frac{\cos nt}{n}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{\sin nt}{n}\,dt\right) + \\
&\quad +\frac{1}{\pi}\left(\left[-(\pi-t)\frac{\cos nt}{n}\right]_1^\pi - \int_1^\pi \frac{\cos nt}{n}\,dt\right) = \\
&= \frac{\pi-1}{\pi}\left(-\frac{\cos n}{n} + \frac{\sin n}{n^2}\right) + \frac{1}{\pi}\left((\pi-1)\frac{\cos n}{n} + \frac{\sin n}{n^2}\right) = \\
&= \frac{\sin n}{n^2}.
\end{aligned}$$

Quindi la serie di Fourier di f è

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}\sin nx;$$

essa converge totalmente in $[-\pi,\pi]$ e la sua somma, per il teorema di Dirichlet, è $f(x)$. Calcolando per $x=\pi/2$ si trova

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{4} &= f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2} = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)}{(2k+1)^2}\sin\frac{(2k+1)\pi}{2} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\sin(2k+1)}{(2k+1)^2};
\end{aligned}$$

Utilizzando invece l'identità di Bessel si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^4} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 \, dx = \frac{(\pi-1)^2}{2\pi} \int_0^1 x^2 \, dx + \frac{1}{2\pi} \int_1^{\pi} (\pi - x)^2 \, dx =$$

$$= \frac{(\pi-1)^2}{6\pi} + \frac{(\pi-1)^3}{6\pi} = \frac{(\pi-1)^2}{6}.$$

Prova scritta del 3 luglio 2008

Esercizio 1 Data una successione $\{E_n\}$ di insiemi misurabili di $\mathbb{R}$, definiamo

$$E' = \{x \in \mathbb{R} : \; x \in E_n \text{ definitivamente}\},$$
$$E'' = \{x \in \mathbb{R} : \; x \in E_n \text{ per infiniti indici } n\}.$$

(i) Si verifichi che $E' = \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} E_m$, $E'' = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} E_m$.

(ii) Si mostri che $m_1(E') \le \liminf_{n\to\infty} m_1(E_n)$, e che se $m_1\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n\right) < \infty$ allora $m_1(E'') \ge \limsup_{n\to\infty} m_1(E_n)$, ma che quest'ultima disuguaglianza è falsa in generale.

(iii) Si provi che $E' \subseteq E''$, e che se la successione $\{E_n\}$ è monotona rispetto all'inclusione, allora $E' = E''$.

Esercizio 2 Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_\Gamma \sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+1}} \, ds,$$

ove Γ è il sostegno della curva descritta dalle relazioni $\rho\vartheta = 1$, $\vartheta \ge \pi/4$.

Esercizio 3 Posto

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(\frac{x^2 y}{2} e^{-z^2} + y^2 + z^2, \; xy\, e^{-z^2} \left(xz - \frac{y}{2} \right), \; \frac{x^2}{2} e^{-z^2} + z - xy \right),$$

si calcoli l'integrale superficiale $\int_{\partial T} \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle_3 \, d\mathbf{s}$, ove

$$T = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \le 1, \; z^2 \le \frac{1}{2} \right\}$$

e $\mathbf{n}$ è la normale esterna a T.

Risoluzione

Esercizio 1 (i) Per definizione, $x \in E'$ se e solo se esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $x \in E_m$ per ogni $m \geq n$, cioè se e solo se

$$x \in \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} E_m \,.$$

Similmente, si ha $x \in E''$ se e solo se per ciascun $n \in \mathbb{N}$ esiste $m \geq n$ tale che $x \in E_m$, cioè se e solo se

$$x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} E_m \,.$$

(ii) L'insieme E' è l'unione della famiglia crescente di insiemi $\{\bigcap_{m=n}^{\infty} E_m\}_{n\in\mathbb{N}}$; ne segue, per la regolarità della misura di Lebesgue e per monotonia,

$$m_1(E') = \lim_{n\to\infty} m_1 \left(\bigcap_{m=n}^{\infty} E_m \right) \leq \liminf_{n\to\infty} m_1(E_n).$$

Similmente, l'insieme E'' è l'intersezione della famiglia decrescente di insiemi $\{\bigcup_{m=n}^{\infty} E_m\}_{n\in\mathbb{N}}$; se il maggiore di essi, $\bigcup_{m=0}^{\infty} E_m$, ha misura finita, ancora per la regolarità della misura di Lebesgue e per monotonia otteniamo

$$m_1(E'') = \lim_{n\to\infty} m_1 \left(\bigcup_{m=n}^{\infty} E_m \right) \geq \limsup_{n\to\infty} m_1(E_n).$$

Senza l'ipotesi $m_1\left(\bigcup_{m=0}^{\infty} E_m\right) < \infty$ la disuguaglianza è falsa: ad esempio, se $E_n = [n, \infty[$, si ha

$$\bigcup_{m=n}^{\infty} E_m = E_n \,, \qquad E'' = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} E_m = \bigcap_{n=0}^{\infty} E_n = \emptyset;$$

risulta dunque

$$m_1 \left(\bigcup_{m=0}^{\infty} E_m \right) = \infty,$$

e la tesi non vale, dato che

$$m_1(E'') = 0, \qquad \limsup_{n\to\infty} m_1(E_n) = \limsup_{n\to\infty} \infty = \infty.$$

(iii) Se $x \in E'$, allora $x \in E_n$ definitivamente; in particolare $x \in E_n$ per infiniti indici, e quindi $x \in E''$.
Supponiamo che $E_n \subseteq E_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$: allora si ha

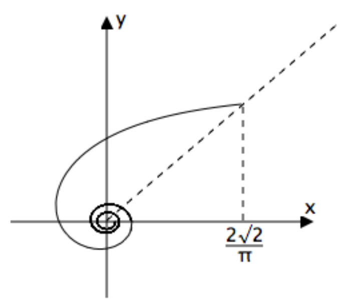
$$E'' = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} E_m \subseteq \bigcup_{m=0}^{\infty} E_m \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} E_m = E'.$$

Se invece $E_n \supseteq E_{n+1}$, allora si ha

$$E'' = \bigcap_{m=0}^{\infty} \bigcup_{k=m}^{\infty} E_k = \bigcap_{m=0}^{\infty} E_m \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} E_m = E'.$$

Esercizio 2 L'insieme Γ è sostegno della curva

$$\begin{cases} x = \dfrac{\cos\vartheta}{\vartheta}, \\ y = \dfrac{\sin\vartheta}{\vartheta}, \end{cases} \qquad \vartheta \in [\pi/4, \infty[;$$



La curva è regolare, con

$$\begin{cases} x' = -\dfrac{\cos\vartheta}{\vartheta^2} - \dfrac{\sin\vartheta}{\vartheta}, \\ y' = -\dfrac{\sin\vartheta}{\vartheta^2} + \dfrac{\cos\vartheta}{\vartheta}, \end{cases}$$

da cui

$$ds = \sqrt{x'^2 + y'^2}\, d\vartheta = \frac{\sqrt{1+\vartheta^2}}{\vartheta^2}\, d\vartheta.$$

L'integrale da calcolare diventa allora:

$$\begin{aligned} \int_\Gamma \sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+1}}\, ds &= \int_{\pi/4}^{\infty} \sqrt{\frac{\frac{1}{\vartheta^2}}{\frac{1}{\vartheta^2}+1}}\, \frac{\sqrt{1+\vartheta^2}}{\vartheta^2}\, d\vartheta = \\ &= \int_{\pi/4}^{\infty} \frac{d\vartheta}{\vartheta^2} = \frac{4}{\pi}\,. \end{aligned}$$

Esercizio 3 Possiamo utilizzare due metodi: il metodo diretto, e il teorema della divergenza, che è quello pìu semplice.

Primo metodo: sfruttiamo il teorema della divergenza; risulta

$$\int_{\partial T} \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle_3 \, d\mathbf{s} = \int_T \operatorname{div} \mathbf{F} \, dxdydz.$$

Poiché

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{F}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x^2 y}{2} \, e^{-z^2} + y^2 + z^2 \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(xy \, e^{-z^2} \left(xz - \frac{y}{2} \right) \right) + \\ & \quad + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{x^2}{2} \, e^{-z^2} + z - xy \right) = \\ &= xy \, e^{-z^2} + xe^{-z^2} \left(xz - \frac{y}{2} \right) - \frac{xy}{2} e^{-z^2} - x^2 z \, e^{-z^2} + 1 = 1, \end{aligned}$$

si ha semplicemente

$$\int_{\partial T} \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle_3 \, d\mathbf{s} = m_3(T).$$

Dunque, integrando per fette orizzontali T_z, e osservando che la sezione orizzontale di quota $\pm z$ è il disco di centro $(0,0,\pm z)$ e raggio $\sqrt{1-z^2}$, si ottiene

$$\int_{\partial T} \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle_3 \, d\mathbf{s} = \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} m_2(T_z) \, dz = 2 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \pi (1 - z^2) \, dz = \frac{5\pi}{3\sqrt{2}} \, .$$

Secondo metodo: la superficie ∂T è regolare a tratti, essendo composta da tre porzioni regolari S_1, S_2, S_3: i due tappi S_1 e S_2 superiore ed inferiore, e la parte laterale S_3. Si verifica che

$$S_1 : \begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta \\ z = \frac{1}{\sqrt{2}}, \end{cases} \qquad \rho \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right], \ \vartheta \in [0, 2\pi]; \qquad \sqrt{EG - F^2} = \rho,$$

e sopra S_1 il versore normale esterno è $\mathbf{n} =$;

$$S_2 : \begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta \\ z = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \end{cases} \qquad \rho \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right], \ \vartheta \in [0, 2\pi]; \qquad \sqrt{EG - F^2} = \rho,$$

e sopra S_2 il versore normale esterno è $\mathbf{n} = (0,0,-1)$;

$$S_3 : \begin{cases} x = \sqrt{1-z^2} \cos \vartheta \\ y = \sqrt{1-z^2} \sin \vartheta \\ z = z, \end{cases} \quad z \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right], \ \vartheta \in [0, 2\pi], \ \sqrt{EG - F^2} = 1.$$

I versori normali sono rispettivamente

$$(0,0,1) \text{ su} S_1, \quad (0,0,-1) \text{ su } S_2, \quad \left(\sqrt{1-z^2}\cos\vartheta, \sqrt{1-z^2}\sin\vartheta, z\right) \text{ su } S_3.$$

Pertanto

$$\int_{S_1} \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle_3 \, d\mathbf{s} = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\rho^2 \cos^2 \vartheta}{2} e^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \rho^2 \sin\vartheta \cos\vartheta \right) \rho \, d\rho d\vartheta.$$

Il terzo integrale è nullo per la simmetria e periodicità della funzione $\sin\vartheta\cos\vartheta$; dunque

$$\begin{aligned}
\int_{S_1} \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle_3 \, ds &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\rho^2 \cos^2 \vartheta}{2} e^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \rho \, d\rho d\vartheta = \\
&= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{\rho^3}{2} e^{-\frac{1}{2}} \pi + \sqrt{2}\pi\rho \right) d\rho = \\
&= \left[\frac{\pi}{8} e^{-\frac{1}{2}} \rho^4 + \frac{\pi}{\sqrt{2}} \rho^2 \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\pi e^{-\frac{1}{2}}}{32} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

In modo del tutto simile si trova

$$\begin{aligned}
\int_{S_1} \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle_3 \, d\mathbf{s} &= -\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\rho^2 \cos^2 \vartheta}{2} e^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \rho \, d\rho d\vartheta = \\
&= -\frac{\pi e^{-\frac{1}{2}}}{32} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Infine

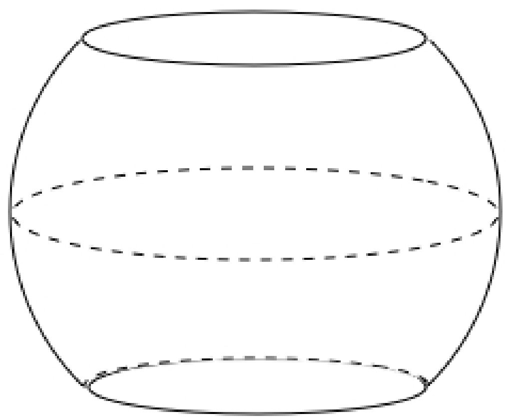
$$
\begin{aligned}
&\int_{S_3} \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle_3 \, d\mathbf{s} = \\
&\quad = \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_0^{2\pi} \Bigg[\sqrt{1-z^2} \cos\vartheta \left(\frac{(1-z^2)^{\frac{3}{2}}}{2} \cos^2\vartheta \sin\vartheta \, e^{-\frac{1}{2}} + \right. \\
&\qquad\qquad \left. + (1-z^2)\sin^2\vartheta + z^2 \right) + \\
&\qquad + \sqrt{1-z^2}\sin\vartheta \left[(1-z^2)\cos\vartheta \sin\vartheta \, e^{-\frac{1}{2}} \left(\sqrt{1-z^2}\cos\vartheta \, z - \right. \right. \\
&\qquad\qquad \left. \left. - \frac{\sqrt{1-z^2}\sin\vartheta}{2} \right) \right] + \\
&\qquad + z \left(\frac{1-z^2}{2} e^{-\frac{1}{2}} + z - (1-z^2)\cos\vartheta \sin\vartheta \right) \Bigg] \, d\vartheta dz.
\end{aligned}
$$

Molti di questi 8 termini si cancellano: il primo contiene $cos^3\vartheta \sin\vartheta$ e il suo integrale su $[0, 2\pi]$ è nullo; per la stessa ragione sono nulli il secondo, il terzo, il quinto e l'ottavo. Inoltre il quarto e il sesto termine contengono una funzione dispari di z, quindi il loro integrale su $[-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$ è nullo. Quindi resta solo il settimo termine e si ha

$$
\int_{S_3} \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle_3 \, d\mathbf{s} = \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_0^{2\pi} z^2 \, d\vartheta dz = 4\pi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} z^2 \, dz = \frac{\pi\sqrt{2}}{3} \, .
$$

Pertanto si conclude che

$$
\int_{\partial T} \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle_3 \, d\mathbf{s} = \frac{\pi e^{-\frac{1}{2}}}{32} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}} - \frac{\pi e^{-\frac{1}{2}}}{32} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + \frac{\pi\sqrt{2}}{3} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi\sqrt{2}}{3} = \frac{5\pi}{3\sqrt{2}} \, .
$$



Prova scritta del 15 settembre 2008

Esercizio 1 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione. Provare che i seguenti fatti sono equivalenti:

(i) f è una funzione misurabile;

(ii) esiste una funzione $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, strettamente monotona, tale che $\varphi \circ f$ è una funzione misurabile,

(iii) $|f|$ è una funzione misurabile e $\{f \geq 0\}$ è un insieme misurabile.

Esercizio 2 Scrivere la serie di Fourier della funzione

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \left| |x| - \frac{\pi}{2} \right|, \qquad x \in [-\pi, \pi],$$

e dedurre che risulta

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}\,.$$

Esercizio 3 Si consideri la curva φ in $\mathbb{R}^3$ di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = \left(2 + \cos\dfrac{\vartheta}{2}\right)\cos\vartheta \\ y = \left(2 + \cos\dfrac{\vartheta}{2}\right)\sin\vartheta & \qquad \vartheta \in [0, 4\pi]. \\ z = \sin\dfrac{\vartheta}{2}\,, \end{cases}$$

(i) Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_{\varphi} f\,ds, \quad \text{ove} \quad f(x,y,z) = |z|.$$

(ii) Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_{\varphi} (yz\,dx + zx\,dy + xy\,dz).$$

Risoluzione

Esercizio 1 (i) $\Longrightarrow$ (ii) Sia f misurabile: allora, scelta una *arbitraria* funzione strettamente monotona (per fissare le idee, crescente) $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, si ha per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\{\varphi \circ f > \alpha\} = \begin{cases} \emptyset & \text{se } \alpha \geq \sup \varphi(\mathbb{R}) \\ \{f > \varphi^{-1}(\alpha)\} & \text{se } \alpha \in \varphi(\mathbb{R}) \\ \mathbb{R} & \text{se } \alpha \leq \inf \varphi(\mathbb{R}). \end{cases}$$

In tutti i casi, $\{\varphi \circ f > \alpha\}$ risulta misurabile. Il discorso è analogo se φ è decrescente (troveremo $\{f < \varphi^{-1}(\alpha)\}$ invece di $\{f > \varphi^{-1}(\alpha)\}$) .

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Sia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strettamente monotona e tale che $\varphi \circ f$ sia misurabile. Allora, essendo per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\{f > \alpha\} = \begin{cases} \{\varphi \circ f > \varphi(\alpha)\} & \text{se } \varphi \text{ è crescente} \\ \{\varphi \circ f < \varphi(\alpha)\} & \text{se } \varphi \text{ è decrescente,} \end{cases}$$

anche f è misurabile.

(i) $\Longrightarrow$ (iii) Se f è misurabile, si sa che $\{f \geq 0\}$ è un insieme misurabile; inoltre

$$\{|f| > \alpha\} = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } \alpha < 0 \\ \{f > \alpha\} \cup \{f < -\alpha\} & \text{se } \alpha \geq 0, \end{cases}$$

e quindi $|f|$ è misurabile.

(iii) $\Longrightarrow$ (i) Sia $|f|$ misurabile e sia $\{f \geq 0\}$ un insieme misurabile. Allora per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha

$$\{f > \alpha\} = \begin{cases} \{|f| > \alpha\} \cap \{f \geq 0\} & \text{se } \alpha \geq 0 \\ \{|f| < \alpha\} \cup \{f \geq 0\} & \text{se } \alpha < 0, \end{cases}$$

e quindi f è misurabile.
Esercizio 2 La funzione f è pari e quindi avrà uno sviluppo di soli coseni. Si ha

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \left|x - \frac{\pi}{2}\right|\right)dx = \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} x\,dx + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - x)\,dx = \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

e per ogni $n \in \mathbb{N}^+$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \left|x - \frac{\pi}{2}\right|\right)\cos nx\,dx = \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} x\,\cos nx\,dx + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - x)\,\cos nx\,dx = \\ &\quad [t = x \text{ nel primo integrale e } t = \pi - x \text{ nel secondo}] \\ &= \frac{2[1+(-1)^n]}{\pi}\int_0^{\pi/2} t\,\cos nt\,dt = \\ &= \frac{2[1+(-1)^n]}{n\pi}\left([t\,\sin nt]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}\sin nt\,dt\right) = \\ &= \frac{2[1+(-1)^n]}{n\pi}\left(\frac{\pi}{2}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - 1\right)\right), \end{aligned}$$

da cui

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{(-1)^m - 1}{m^2\pi} & \text{se } n = 2m, \\ 0 & \text{se } n = 2m+1. \end{cases}$$

Ancor più precisamente possiamo scrivere

$$a_{2m} = \begin{cases} 0 & \text{se } m = 2k, \\ -\dfrac{2}{(2k+1)^2\pi} & \text{se } m = 2k+1. \end{cases}$$

Dunque la serie di Fourier di f è

$$\frac{\pi}{4} + \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m - 1}{m^2\pi}\cos 2mx = \frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2}{(2k+1)^2\pi}\cos(4k+2)x;$$

essendo f continua e di classe C^1 a tratti con $f(-\pi) = f(\pi)$, la serie converge in ogni punto di $[-\pi, \pi]$ con somma $f(x)$: pertanto

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{(2k+1)^2\pi} \cos(4k+2)x \qquad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

Scegliendo in particolare $x = 0$, si ottiene

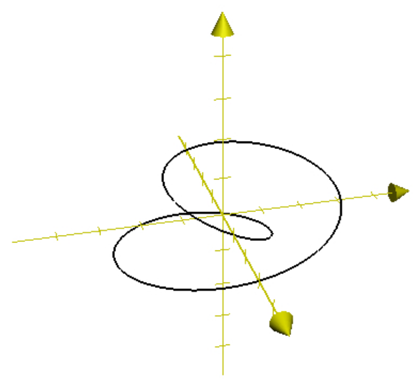
$$0 = \frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{(2k+1)^2\pi}\,,$$

da cui

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}\,.$$

Esercizio 3 (i) Poiché

$$\begin{cases} x'(\vartheta) = -\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\vartheta}{2}\cos\vartheta - \left(2+\cos\dfrac{\vartheta}{2}\right)\sin\vartheta \\ y'(\vartheta) = -\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\vartheta}{2}\sin\vartheta + \left(2+\cos\dfrac{\vartheta}{2}\right)\cos\vartheta \\ z'(\vartheta) = \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\vartheta}{2}\,, \end{cases}$$



quadrando e sommando si ha, notando che i doppi prodotti si cancellano,

$$|\varphi'(\vartheta)|_3 = \sqrt{\frac{1}{4} + \left(2+\cos\frac{\vartheta}{2}\right)^2}\,.$$

Quindi

$$\int_\varphi f\,ds = \int_0^{4\pi} \left|\sin\frac{\vartheta}{2}\right| \sqrt{\frac{1}{4} + \left(2+\cos\frac{\vartheta}{2}\right)^2}\, d\vartheta =$$

$$= 2\int_0^{2\pi} |\sin t| \sqrt{\frac{1}{4} + (2+\cos t)^2}\, dt =$$

$$= 2\int_0^{\pi} \sin t \sqrt{\frac{1}{4} + (2+\cos t)^2}\, dt - 2\int_\pi^{2\pi} \sin t \sqrt{\frac{1}{4} + (2+\cos t)^2}\, dt =$$

[con $u = t$ nel primo integrale e $u = t - \pi$ nel secondo]

$$= 2\int_0^{\pi} \sin u \left[\sqrt{\frac{1}{4} + (2+\cos u)^2} + \sqrt{\frac{1}{4} + (2-\cos u)^2}\right] du =$$

$$= 2\int_{-1}^{1} \left[\sqrt{\frac{1}{4} + (2+x)^2} + \sqrt{\frac{1}{4} + (2-x)^2}\right] dx =$$

[con $y = 2(2+x)$ nel primo integrale e $y = 2(2-x)$ nel secondo]

$$= \int_2^6 \sqrt{1+y^2}\, dy = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{1+y^2} + \ln(y + \sqrt{1+y^2})\right]_2^6 =$$

$$= 3\sqrt{37} - \sqrt{5} + \frac{1}{2}\ln\frac{6+\sqrt{37}}{2+\sqrt{5}}\,.$$

(ii) La forma $\omega = yz\,dx + zx\,dy + xy\,dz$ è esatta in $\mathbb{R}^3$, il quale ovviamente è un aperto semplicemente connesso. Quindi l'integrale curvilineo $\int_\varphi \omega$ lungo la curva chiusa φ è nullo.

Prova scritta del 13 gennaio 2009

Esercizio 1

(i) Si calcoli il limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n dx.$$

(ii) Si verifichi che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n$$

converge puntualmente q.o. in $\mathbb{R}$ ad una funzione misurabile $g(x)$.

(iii) Si mostri che g non è sommabile su $\mathbb{R}$.

Esercizio 2

(i) Scrivere la serie di Fourier della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [-\pi, 0] \\ e^{-x} & \text{se } x \in]0, \pi]. \end{cases}$$

(ii) Calcolare la somma $S(x)$ della serie per $x \in [-\pi, \pi]$.

(iii) Utilizzando i valori di $S(x)$ in $x = 0$ e $x = \pi$, si determini la somma delle due serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2}\,, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1+k^2}\,.$$

Esercizio 3 Si calcoli l'integrale superficiale

$$\int_{\Sigma} (x^2 + y^2)\, d\mathbf{s},$$

ove Σ è la superficie ottenuta ruotando attorno all'asse z la curva del piano xz di equazione

$$x = \frac{1}{z+1}\,, \qquad z \in [0, 1].$$

Risoluzione

Esercizio 1 (i) Per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ la funzione integranda è continua, quindi misurabile, e di segno variabile. Inoltre

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n = 0 \qquad \forall x \neq 0,$$

e d'altra parte possiamo scrivere

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right|^n \le \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < |x| < 1 \\ 1/x^2 & \text{se } |x| \ge 1 \end{cases} \qquad \forall n \ge 2.$$

Dunque, per il teorema di Lebesgue,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n dx = 0.$$

(ii) La serie proposta è una serie geometrica di ragione $\frac{\sin x}{x}$, quindi essa converge puntualmente in tutti i punti in cui $\left|\frac{\sin x}{x}\right| < 1$, ossia per ogni $x \neq 0$. La somma della serie è

$$g(x) = \frac{\frac{\sin x}{x}}{1 - \frac{\sin x}{x}} = \frac{\sin x}{x - \sin x}, \qquad x \neq 0.$$

(iii) Dato che

$$g(x) \simeq \frac{x}{x^3/6} = \frac{6}{x^2} \qquad \text{per } x \to 0,$$

la funzione g non è sommabile in alcun intervallo contenente 0, e quindi non può essere sommabile su $\mathbb{R}$.

Esercizio 2 **(i)** Calcoliamo i coefficienti di Fourier a_n e b_n della funzone f. Si ha

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-x}\,dx = \frac{1 - e^{-\pi}}{\pi},$$

e per $n \geq 1$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-x} \cos nx\,dx = \frac{1}{\pi n}\left[e^{-x} \sin nx\right]_0^{\pi} + \frac{1}{\pi n}\int_0^{\pi} e^{-x} \sin nx\,dx = \\ &= \frac{1}{n}\,b_n = -\frac{1}{\pi n^2}\left[e^{-x} \cos nx\right]_0^{\pi} - \frac{1}{\pi n^2}\int_0^{\pi} e^{-x} \cos nx\,dx = \\ &= \frac{1 - (-1)^n e^{-\pi}}{\pi n^2} - \frac{1}{n^2}\,a_n, \end{aligned}$$

da cui, facilmente,

$$a_n = \frac{1 - (-1)^n e^{-\pi}}{\pi(1 + n^2)}, \quad b_n = \frac{n[1 - (-1)^n e^{-\pi}]}{\pi(1 + n^2)} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^+.$$

La serie di Fourier di f è dunque

$$\frac{1 - e^{-\pi}}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n e^{-\pi}}{1 + n^2}(\cos nx + n \sin nx).$$

(ii) La somma della serie di Fourier di f, in virtù del teorema di Dirichlet, è

$$S(x) = \begin{cases} \frac{e^{-\pi}}{2} & \text{se } x = \pm\pi \\ 0 & \text{se } -\pi < x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{se } x = 0 \\ e^{-x} & \text{se } 0 < x < \pi. \end{cases}$$

(iii) Poniamo

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2}\,, \qquad B = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1+k^2}\,;$$

allora dalle relazioni

$$\frac{1}{2} = S(0) = \frac{1-e^{-\pi}}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n e^{-\pi}}{1+n^2} = \frac{1-e^{-\pi}}{2\pi} + \frac{A}{\pi} - \frac{Be^{-\pi}}{\pi},$$

$$\frac{e^{-\pi}}{2} = S(\pi) = \frac{1-e^{-\pi}}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n e^{-\pi}}{1+n^2}\cdot(-1)^n = \frac{1-e^{-\pi}}{2\pi} + \frac{B}{\pi} - \frac{Ae^{-\pi}}{\pi}$$

si ottiene il sistema

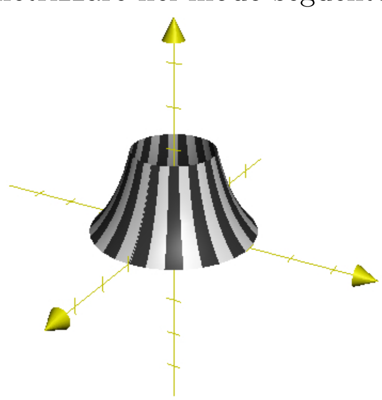
$$\begin{cases} \pi = 1 - e^{-\pi} + 2A - 2e^{-\pi}B \\ \pi\, e^{-\pi} = 1 - e^{-\pi} + 2B - 2e^{-\pi}A. \end{cases}$$

La risoluzione di questo sistema è facile anche se noiosa, e fornisce i valori

$$A = \frac{\pi(1+e^{-2\pi}) + e^{-2\pi} - 1}{2e^{-\pi}}\,, \quad B = \frac{2\pi\, e^{-\pi} + e^{-2\pi} - 1}{2(1-e^{-\pi})}\,.$$

Esercizio 3 La superficie Σ si può parametrizzare nel modo seguente:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{z+1}\,\cos\vartheta \\ y = \frac{1}{z+1}\,\sin\vartheta \\ z = z \end{cases}$$



con $z \in [0,1]$, $\vartheta \in [0,2\pi]$, e quindi si tratta di una superficie regolare di rotazione. Dato che la matrice delle derivate è

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{(z+1)^2}\,\cos\vartheta & -\frac{1}{z+1}\,\sin\vartheta \\ -\frac{1}{(z+1)^2}\,\sin\vartheta & \frac{1}{z+1}\,\cos\vartheta \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

risulta
$$E = 1 + \frac{1}{(z+1)^4}\,, \quad G = \frac{1}{(z+1)^2}\,, \quad F = 0$$
e quindi
$$\sqrt{EG - F^2} = \frac{1}{z+1}\sqrt{1 + \frac{1}{(z+1)^4}}.$$
Dunque l'integrale da calcolare è
$$\int_\Sigma (x^2+y^2)\, d\mathbf{s} = 2\pi \int_0^1 \frac{1}{(z+1)^3}\sqrt{1 + \frac{1}{(z+1)^4}}\, dz.$$
Posto $\frac{1}{(z+1)^2} = t$, si ha $dt = -\frac{2dz}{(z+1)^3}$ e quindi
$$\int_\Sigma (x^2+y^2)\, d\mathbf{s} = \pi \int_{\frac{1}{4}}^1 \sqrt{1+t^2}\, dt.$$
Integrando per parti,
$$\begin{aligned} \pi \int_{\frac{1}{4}}^1 \sqrt{1+t^2}\, dt &= \pi \left[t\sqrt{1+t^2}\right]_{\frac{1}{4}}^1 - \pi \int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}\, dt = \\ &= \pi \left[t\sqrt{1+t^2}\right]_{\frac{1}{4}}^1 - \pi \int_{\frac{1}{4}}^1 \sqrt{1+t^2}\, dt + \pi \int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\, dt, \end{aligned}$$
ovvero
$$\pi \int_{\frac{1}{4}}^1 \sqrt{1+t^2}\, dt = \frac{\pi}{2}\left[t\sqrt{1+t^2}\right]_{\frac{1}{4}}^1 + \frac{\pi}{2}\int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\, dt.$$
Ricordando che una primitiva di $1/\sqrt{1+t^2}$ è $\ln(t + \sqrt{1+t^2})$, si ottiene finalmente
$$\begin{aligned} \int_\Sigma (x^2+y^2)\, d\mathbf{s} &= \left[t\sqrt{1+t^2} + \ln(t+\sqrt{1+t^2})\right]_{\frac{1}{4}}^1 = \\ &= \frac{\pi}{2}\left[\sqrt{2} - \frac{\sqrt{17}}{16} + \ln(1+\sqrt{2}) - \ln\left(\frac{1+\sqrt{17}}{4}\right)\right]. \end{aligned}$$

Prova scritta del 10 febbraio 2009

Esercizio 1 Calcolare, se esiste,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n \frac{\arctan nx}{1+(n-x)^2}\,dx.$$

Esercizio 2 Calcolare l'integrale

$$\int_E \frac{\ln x}{z^2}\,dxdydz,$$

ove

$$E=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x\in[0,1],\ |y|\le x,\ 1\le z\le \frac{4}{4x-y^2}\right\}.$$

Esercizio 3 Stabilire se la forma differenziale lineare

$$\omega(x,y)=\left[\frac{x}{\sqrt{2y-x^2}}+xy\right]\,dx+\left[\frac{1}{2}(x^2+y^2)-\frac{1}{\sqrt{2y-x^2}}\right]\,dy$$

è esatta nell'aperto $A\subset\mathbb{R}^2$ nel quale è definita, e calcolarne l'integrale lungo la curva $\varphi:[0,1]\to\mathbb{R}^2$ definita da $\varphi(t)=(t,2-t)$.

Risoluzione

Esercizio 1 Conviene fare il cambiamento di variabile $t=n-x$, che sposta sulla sola arcotangente la dipendenza da n: si ha

$$\int_0^n \frac{\arctan nx}{1+(n-x)^2}\,dx=\int_0^n \frac{\arctan n(n-t)}{1+t^2}\,dt=\int_0^\infty I_{[0,n]}(t)\frac{\arctan n(n-t)}{1+t^2}\,dt.$$

L'integrando converge puntualmente a $\frac{\pi}{2}\frac{1}{1+t^2}$, ed è dominato dalla stessa funzione, che ovviamente è sommabile su $[0,\infty[$. Pertanto

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n \frac{\arctan nx}{1+(n-x)^2}\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2}=\frac{\pi^2}{4}\,.$$

Esercizio 2 Si ha

$$\int_E \frac{\ln x}{z^2}\,dxdydz = \int_0^1 \int_{-x}^{x} \int_1^{\frac{4}{4x-y^2}} \frac{\ln x}{z^2}\,dz\,dy\,dx =$$

$$= \int_0^1 \ln x \int_{-x}^{x} \left[-\frac{1}{z}\right]_1^{\frac{4}{4x-y^2}} dy\,dx = \int_0^1 \ln x \int_{-x}^{x} \left[\frac{y^2}{4} - x + 1\right] dy\,dx =$$

$$= -\int_0^1 2x^2 \ln x\,dx + 2\int_0^1 \ln x \int_0^x \left[\frac{y^2}{4} + 1\right] dy\,dx =$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^1 x^2\,dx + \int_0^1 \left(\frac{x^3}{6} + 2x\right) \ln x\,dx =$$

$$= \frac{2}{9} - \int_0^1 \left(\frac{x^3}{24} + x\right) dx = \frac{2}{9} - \frac{1}{96} - \frac{1}{2} = -\frac{83}{288}\,.$$

Esercizio 3 La forma è di classe C^∞ nell'aperto $\Omega = \{x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2/2\}$, il quale è semplicemente connesso (è addirittura convesso, essendo il sopragrafico di una funzione convessa). Verifichiamo se è chiusa:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{x}{\sqrt{2y - x^2}} + xy\right] = -\frac{x}{(2y - x^2)^{3/2}} + x,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{1}{\sqrt{2y - x^2}}\right] = x - \frac{x}{(2y - x^2)^{3/2}}\,,$$

quindi le due espressioni sono uguali e la forma è chiusa. Ne segue che essa è esatta in Ω.

Per trovare una primitiva f di ω, possiamo procedere come segue: essendo

$$f_x(x, y) = \frac{x}{\sqrt{2y - x^2}} + xy,$$

deve aversi

$$f(x, y) = \int_0^x \left[\frac{\xi}{\sqrt{2y - \xi^2}} + \xi y\right] d\xi + h(y) = -\sqrt{2y - x^2} + \frac{x^2 y}{2} + k(y),$$

con k arbitraria funzione C^1. Quindi

$$\frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{1}{\sqrt{2y - x^2}} = f_y(x, y) = -\frac{1}{\sqrt{2y - x^2}} + \frac{x^2}{2} + k'(y),$$

da cui, semplificando,

$$k'(y) = \frac{y^2}{2}, \qquad k(y) = \frac{y^3}{6} + c.$$

Quindi una primitiva di ω è

$$f(x,y) = -\sqrt{2y - x^2} + \frac{x^2 y}{2} + \frac{y^3}{6}\,.$$

A questo punto, il calcolo dell'integrale di ω lungo la curva φ è immediato:

$$\begin{aligned}\int_\varphi \omega &= f(\varphi(1)) - f(\varphi(0)) = f(1,1) - f(0,2) = \\ &= \left(-1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right) - \left(-2 + 0 + \frac{4}{3}\right) = \frac{1}{3}\,.\end{aligned}$$

Prova scritta del 18 giugno 2010

Esercizio 1 Per ogni $x \in]0,1]$ sia $0.q_1q_2q_3q_4\ldots$ lo sviluppo decimale di x. Sia $f :]0,1] \to \mathbb{R}$ definita da:

$$f(x) = q_n \qquad \text{se } q_n \text{ è la prima cifra decimale non nulla di } x.$$

Provare che f è misurabile e calcolare $\displaystyle\int_0^1 f\,dx$.

Esercizio 2 Determinare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \sqrt[n]{n + x^2}\, e^{-\frac{nx}{n+1}}\,dx.$$

Esercizio 3 Calcolare l'integrale

$$\int_A yz\,dxdydz,$$

ove

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{2x^2 + 8y^2} \le z \le \sqrt{1 - 2x^2 - 8y^2},\ x \ge 0,\ y \ge 0\}.$$

Esercizio 4 Sia D il dominio del piano xz delimitato dall'asse z e dall'arco di cicloide

$$\gamma : \begin{cases} x = 1 - \cos t \\ z = t - \sin t, \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

Detto A il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ ottenuto ruotando D attorno all'asse z, se ne calcoli la misura $m_3(A)$.

Risoluzione

Esercizio 1 La funzione f assume un numero finito di valori, poiché $f(x) \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Fissato un intero j fra 1 e 9, analizziamo l'insieme $E_j = \{x \in]0,1] : f(x) = j\}$. Si ha $f(x) = j$ se e solo se la prima cifra decimale non nulla di x, qualunque essa sia, vale esattamente j: dunque

$$x \in E_j \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left] \frac{j}{10^{n+1}}, \frac{j+1}{10^{n+1}} \right].$$

Si conclude che E_j è unione numerabile di intervalli, quindi è un boreliano; in particolare, $f = \sum_{j=1}^{9} j \cdot I_{E_j}$ è una funzione semplice, quindi misurabile. Calcoliamo l'integrale di f: poiché gli intervalli che costituiscono ciascun E_j sono ovviamente disgiunti, si ha

$$\int_0^1 f\,dx = \sum_{j=1}^{9} j \cdot m_1(E_j) = \sum_{j=1}^{9} j \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^{n+1}} = \frac{9 \cdot 10}{2} \cdot \frac{\frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = 5.$$

Esercizio 2 La funzione integranda $f_n(x) = \sqrt[n]{n + x^2}\, e^{-\frac{nx}{n+1}}$ è non negativa e il suo limite puntuale è e^{-x} per ogni $x \geq 0$. Non vi è sicuramente crescenza rispetto a n, perché $e^{-\frac{nx}{n+1}} \geq e^{-x}$ e $\sqrt[n]{n+x^2} \geq 1$: pertanto il teorema di B. Levi non è utilizzabile. Non resta allora che applicare il teorema di Lebesgue: dato che

$$\sqrt[n]{n + x^2} \leq \sqrt[n]{n} + \sqrt[n]{x^2} \leq 2 + (1 \vee x^2) < 3 + x^2, \qquad e^{-\frac{nx}{n+1}} \leq e^{-\frac{x}{2}},$$

si ha

$$f_n(x) \leq (3 + x^2) e^{-\frac{x}{2}} \qquad \forall n \geq 1, \quad \forall x \geq 0.$$

La funzione $g(x) = (3+x^2)e^{-\frac{x}{2}}$ è chiaramente sommabile su $[0, \infty[$, e pertanto si può concludere che

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^\infty \sqrt[n]{n + x^2}\, e^{-\frac{nx}{n+1}}\, dx = \int_0^\infty e^{-x}\, dx = 1.$$

Esercizio 3 L'insieme A è normale rispetto al piano xy: esso si proietta sull'insieme base

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{2x^2 + 8y^2} \leq \sqrt{1 - 2x^2 - 8y^2},\ x \geq 0,\ y \geq 0\},$$

ed è immediato riconoscere che

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + 16y^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}.$$

L'insieme B è dunque la parte dell'ellisse di centro l'origine, con semiassi $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$, contenuta nel primo quadrante.
L'integrale diventa perciò

$$\int_A yz\,dxdydz = \int_B y \int_{\sqrt{2x^2+8y^2}}^{\sqrt{1-2x^2-8y^2}} z\,dzdxdy = \frac{1}{2}\int_B y(1-4x^2-16y^2)\,dxdy.$$

L'insieme B è normale rispetto all'asse x:

$$B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \frac{1}{2},\ 0 \leq y \leq \frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}\right\};$$

quindi

$$\begin{aligned}
\int_A yz\,dxdydz &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^{\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}} y(1-4x^2-16y^2)\,dxdy = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\left((1-4x^2)\frac{1}{2}\Big[y^2\Big]_0^{\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}} - 4\Big[y^4\Big]_0^{\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}}\right)dx = \\
&= \frac{1}{64}\int_0^{\frac{1}{2}}(1-4x^2)^2 - \frac{1}{128}\int_0^{\frac{1}{4}}(1-4x^2)^2\,dx = \\
&= \frac{1}{128}\int_0^{\frac{1}{2}}(1-8x^2+16x^4)\,dx = \\
&= \frac{1}{128}\left[x - \frac{8}{3}x^3 + \frac{16}{5}x^5\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{128}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{10}\right] = \\
&= \frac{1}{128}\cdot\frac{4}{15} = \frac{1}{480}\,.
\end{aligned}$$

Per il calcolo dell'integrale su B si potevano anche utilizzare, più semplicemente, le coordinate polari, anzi ellittiche: poiché risulta

$$B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = \frac{r}{2}\ \cos\vartheta,\ y = \frac{r}{4}\sin\vartheta,\ r \in [0,1],\ \vartheta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right\},$$

tenuto conto che

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\cos\vartheta}{2} & \frac{\sin\vartheta}{4} \\ -\frac{r\sin\vartheta}{2} & \frac{r\cos\vartheta}{4} \end{pmatrix} = \frac{r}{8}\,,$$

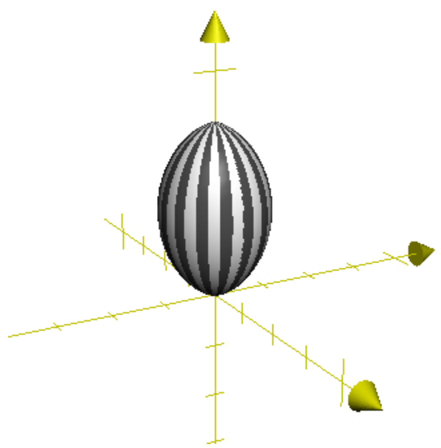
otteniamo

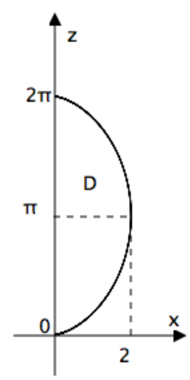
$$\begin{aligned}\int_A yz\,dxdydz &= \frac{1}{2}\int_B y(1-4x^2-16y^2)\,dxdy = \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 \frac{r}{4}\sin\vartheta\,(1-r^2)\,\frac{r}{8}\,drd\vartheta = \frac{1}{64}\int_0^1 r^2\,(1-r^2)dr = \\ &= \frac{1}{64}\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right] = \frac{1}{480}\,.\end{aligned}$$

Esercizio 4 La formula per il calcolo della misura degli insiemi di rotazione ci dà

$$m_3(A) = 2\pi\int_D x\,dxdz.$$

Poiché D è delimitato dall'asse z e da un arco di cicloide, D è un insieme normale rispetto all'asse z ma il calcolo diretto dell'integrale non è agevole.





Conviene usare le formule di Gauss-Green: si ha allora, scrivendo $x = \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{2}x^2$,

$$m_3(A) = 2\pi\int_D x\,dxdz = \pi\int_{+\partial D} x^2\,dz,$$

ove $+\partial D$ è l'orientazione nel verso antiorario. La curva $+\partial D$ è costituita dall'arco di cicloide, con la sua orientazione naturale, e dal segmento $[0, 2\pi]$ dell'asse z, orientato da 2π a 0, sul quale tuttavia l'integrando è nullo. Si ha quindi, essendo lungo la cicloide $dz = (1 - \cos t)dt$,

$$\begin{aligned} m_3(A) &= \pi \int_{+\partial D} x^2\, dz = \pi \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt = \\ &= \pi \int_0^{2\pi} (1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t) dt = \\ &= \pi \int_0^{2\pi} (1 + 3\cos^2 t) dt = \pi(2\pi + 3\pi) = 5\pi^2. \end{aligned}$$

Prova scritta del 12 luglio 2010

Esercizio 1 Si consideri la successione di funzioni così definita:

$$\begin{cases} f_0(x) = x \\ f_{n+1}(x) = f_n(x)^x \quad \forall n \in \mathbb{N}, \end{cases} \qquad x \in]0,1].$$

Si determini, se esiste,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx.$$

Esercizio 2 Si calcoli l'integrale

$$\int_A (xy^2 + x^2 y)\, \cos[\pi(y^2 x - x^2 y)]\, dxdy,$$

ove

$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le xy \le 4,\ x + \frac{1}{2} \le y \le x + 4,\ y > 0 \right\}.$$

Esercizio 3 Si definisca in $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\}$ la forma differenziale

$$\omega(x,y,z) = \left[\frac{4x^2 + 2zx}{x^2 + y^2} + 2\, A(x,y) \right] dx + \left[\frac{2y}{x^2 + y^2}\, (2x + z) \right] dy + A(x,y)\, dz$$

ove $A : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0\} \to \mathbb{R}$ è una funzione continua.

(i) Si trovi una funzione A che renda esatta la forma ω.

(ii) Si determini in tal caso l'insieme delle primitive di ω.

Risoluzione

Esercizio 1 Notiamo anzitutto che, come si verifica agevolmente per induzione,

$$0 < f_n(x) \leq 1 \qquad \forall x \in]0,1], \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Di conseguenza,

$$f_{n+1}(x) = f_n(x)^x < f_n(x) \qquad \forall x \in]0,1], \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

per cui

$$\exists \lim_{n\to\infty} f_n(x) =: f(x) \in]0,1] \qquad \forall x \in]0,1].$$

Dalla relazione $f_{n+1}(x) = f_n(x)^x$ segue però $f(x) = f(x)^x$, da cui segue che $f(x)$ vale 0, oppure 1, oppure $+\infty$: ma essendo $f(x) \in]0,1]$ si ricava necessariamente $f(x) = 1$ per ogni $x \in]0,1]$.
Inoltre osserviamo che tutte le f_n sono funzioni misurabili perché continue salvo al più in $x = 0$. Quindi, per il teorema di B. Levi,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 1\,dx = 1.$$

Esercizio 2 L'insieme A è contenuto nel primo quadrante, La sua definizione suggerisce di fare il cambiamento di coordinate

$$xy = u, \qquad y - x = v,$$

che trasforma l'insieme chiuso A nel rettangolo $B = [1,4] \times [1/2, 4]$. La matrice Jacobiana di questa trasformazione è

$$\mathbf{J}(x,y) = \begin{pmatrix} y & x \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

e si ha $|\det \mathbf{J}(x,y)| = y + x > 0$. L'integrale proposto si può allora riscrivere come

$$\int_A (xy^2 + x^2y)\, \cos[\pi(y^2x - x^2y)]\,dxdy =$$
$$= \int_A xy(y+x)\cos[\pi xy(y-x)]\,dxdy = \int_B u\cos(\pi uv)dudv.$$

A questa stessa conclusione si può arrivare in modo più standard: dapprima si ricavano x, y in funzione di u, v, trovando $x = \frac{1}{2}(-v + \sqrt{v^2 + 4u})$ e $y = \frac{1}{2}(v + \sqrt{v^2 + 4u})$. Poi si calcola lo Jacobiano

$$\mathbf{J}^{-1}(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{v^2+4u}} & -\frac{1}{2} + \frac{v}{\sqrt{v^2+4u}} \\ \frac{1}{\sqrt{v^2+4u}} & \frac{1}{2} + \frac{v}{\sqrt{v^2+4u}} \end{pmatrix},$$

che ha (ovviamente) modulo del determinante uguale a $\frac{1}{\sqrt{v^2+4u}} = \frac{1}{y+x}$; infine si fa il cambiamento di variabili nell'integrale, ottenendo nuovamente la relazione

$$\int_A (xy^2 + x^2y) \cos[\pi(y^2x - x^2y)]\, dxdy = \int_B u \cos(\pi uv) dudv.$$

A questo punto il calcolo è facile:

$$\begin{aligned} \int_B u \cos(\pi uv) dudv &= \int_1^4 u \int_{1/2}^4 \cos(\pi uv) dv\, du = \int_1^4 u \left[\frac{\sin(\pi uv)}{\pi u} \right]_{1/2}^4 du = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_1^4 \left[\sin(4\pi u) - \sin\left(\frac{\pi u}{2}\right) \right] du = \\ &= \frac{1}{\pi^2} \left[-\frac{\cos 16\pi - \cos 4\pi}{4} + 2\left(\cos 2\pi - \cos\frac{\pi}{2}\right) \right] = \frac{2}{\pi^2}\,. \end{aligned}$$

L'integrale proposto è dunque uguale a $2/\pi^2$.

Esercizio 3 Indichiamo con P, Q, R i coefficienti della forma ω e imponiamo che essa sia chiusa. Si ha, con facili calcoli,

$$\begin{aligned} P_y(x,y,z) &= -\frac{4xy(2x+z)}{(x^2+y^2)^2} + 2\, A_y(x,y), & P_z(x,y,z) &= \frac{2x}{x^2+y^2}, \\ Q_x(x,y,z) &= \frac{4y}{x^2+y^2} - \frac{4xy(2x+z)}{(x^2+y^2)^2}, & Q_z(x,y,z) &= \frac{2y}{x^2+y^2}, \\ R_x(x,y,z) &= A_x(x,y), & R_y(x,y,z) &= A_y(x,y), \end{aligned}$$

ed affinché ω sia chiusa si deve avere $P_y = Q_x$, $P_z = R_x$ e $Q_z = R_y$. La prima equazione equivale a

$$A_y(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2}\,,$$

la seconda diventa

$$A_x(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2}\,,$$

mentre la terza fornisce nuovamente $A_y(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2}$.
Dobbiamo dunque risolvere il sistema

$$\begin{cases} A_y(x,y) = \dfrac{2y}{x^2+y^2} \\ A_x(x,y) = \dfrac{2x}{x^2+y^2} \, . \end{cases}$$

La garanzia di trovare la funzione incognita A è fornita dal fatto che valgono le relazioni

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{2y}{x^2+y^2} = -\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{2x}{x^2+y^2} \, .$$

La prima equazione del sistema ci dice che $A(x,y)$ è una primitiva, rispetto alla variabile y, di $\frac{2y}{x^2+y^2}$: dunque sarà

$$A(x,y) = \ln(x^2+y^2) + b(x),$$

con b funzione arbitraria di classe C^1. Sostituendo nella seconda equazione del sistema si trova

$$\frac{2x}{x^2+y^2} = A_x(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2} + b'(x),$$

da cui $b'(x) = 0$ ossia $b =$costante. Quindi possiamo scegliere

$$A(x,y) = \ln(x^2+y^2).$$

A questo punto la forma

$$\omega = \left[\frac{4x^2+2zx}{x^2+y^2} + 2\ln(x^2+y^2) \right] dx + \left[\frac{2y}{x^2+y^2} \, (2x+z) \right] dy + \ln(x^2+y^2) \, dz$$

è chiusa per costruzione. Poiché ω è definita sull'aperto $E = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\}$, che non è semplicemente connesso, non è detto che essa sia esatta. Tuttavia, fissato un punto arbitrario in E, esiste sicuramente una primitiva locale $V(x,y,z)$ di ω, definita in un intorno di tale punto: essa verificherà in tale intorno

$$\begin{cases} V_x(x,y,z) = \dfrac{4x^2+2zx}{x^2+y^2} + 2\ln(x^2+y^2) \\ V_y(x,y,z) = \dfrac{2y}{x^2+y^2} \, (2x+z) \\ V_z(x,y,z) = \ln(x^2+y^2). \end{cases}$$

Dalla terza equazione deduciamo $V(x,y,z) = z\ln(x^2+y^2) + B(x,y)$, con B funzione arbitraria di classe C^1; inserendo nella seconda, si ricava $B_y(x,y) = \frac{4xy}{x^2+y^2}$ e dunque $B(x,y) = 2x\ln(x^2+y^2) + C(x)$, con C funzone arbitraria di classe C^1; quindi $V(x,y,z) = (z+2x)\ln(x^2+y^2) + C(x)$. Infine, dalla prima equazione si ottiene facilmente $C'(x) = 0$, ossia $C =$costante. In definitiva possiamo scegliere

$$V(x,y,z) = (z+2x)\ln(x^2+y^2);$$

questa funzione è in realtà definita su tutto l'aperto E, e verifica il sistema sopra scritto in ogni punto di E. Perciò possiamo concludere che ω è esatta e le sue primitive sono tutte le funzioni della forma $V(x,y,z) + c$, $c \in \mathbb{R}$.
Per provare l'esattezza di ω potevamo anche, in alternativa, verificare che

$$\int_{+\boldsymbol{\gamma}} \omega = 0$$

su ogni curva chiusa $\boldsymbol{\gamma}$ che circonda l'asse z. Tuttavia, dato che ω è chiusa, la scelta di $\boldsymbol{\gamma}$ è irrilevante: prendendo dunque la curva

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = (\cos t, \sin t, 0), \qquad t \in [0, 2\pi],$$

si trova facilmente che $\int_{+\boldsymbol{\gamma}} \omega = 0$.
Per determinare adesso le primitive di ω, dobbiamo comunque tornare ai calcoli precedenti.

Prova scritta dell'8 settembre 2010

Esercizio 1 Determinare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{x^{n-2}}{e^n + x^n}\, dx.$$

Esercizio 2 Si calcoli l'integrale triplo

$$\int_D z\, dxdydz,$$

ove

$$D = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2 \le 4,\ z^2 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} \ge 2, \right.$$
$$\left. x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0 \right\}.$$

Esercizio 3 Sia Γ il sostegno della curva

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = (t, t^2, t^3), \qquad t \in [0, 1].$$

Si calcolino i seguenti integrali curvilinei:

(i) $\displaystyle\int_\Gamma f\, ds$, ove $f(x, y, z) = xyz\sqrt{1 + 4y + 9xz}$;

(ii) $\displaystyle\int_{+\Gamma} \omega$, ove $\omega(x, y, z) = x\, dx + xy\, dy + xyz\, dz$, e l'orientazione positiva di Γ è quella indotta dalla sua parametrizzazione.

Risoluzione

Esercizio 1 L'integrando, che è non negativo, converge puntualmente per ogni $x \geq 0$: infatti, a seconda che sia $x < e$ oppure $x \geq e$, si trova

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^{n-2}}{e^n + x^n} \leq \frac{1}{e^2} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{x}{e}\right)^{n-2} = 0 \qquad \forall x \in [0, e[,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^{n-2}}{e^n + x^n} = \frac{1}{x^2} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{e}{x}\right)^n + 1} = \frac{1}{x^2} \qquad \forall x > e,$$

mentre per $x = e$ il limite, che è banalmente $\frac{1}{2e^2}$, non ha rilevanza.
Inoltre la convergenza è dominata, in quanto

$$\frac{x^{n-2}}{e^n + x^n} \leq \begin{cases} \frac{1}{e^2} & \text{se } x < e \\ \frac{1}{x^2} & \text{se } x \geq e \end{cases} \qquad \forall n \geq 2.$$

Dato che la funzione $e^{-2} I_{[0,e[} + x^{-2} I_{[e,\infty[}$ è sommabile, possiamo applicare il teorema di Lebesgue e otteniamo

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{x^{n-2}}{e^n + x^n}\, dx = \int_e^\infty \frac{dx}{x^2} = e^{-1}.$$

Esercizio 2 Conviene effettuare il seguente cambiamento di variabili:

$$\begin{cases} x = 3u \\ y = 2v \\ z = w, \end{cases} \qquad (u, v, w) \in \mathbb{R}^3;$$

il nuovo dominio di integrazione è dato da

$$D'=\{(u,v,w)\in\mathbb{R}^3 : u^2+v^2+w^2\le 4,\ w^2-u^2-v^2\ge 2,\ u\ge 0,\ v\ge 0,\ w\ge 0\}.$$

Il determinante della matrice Jacobiana della trasformazione è 6; di conseguenza

$$\int_D z\,dxdydz = 6\int_{D'} w\,dudvdw.$$

Passando in coordinate sferiche

$$\begin{cases} u=\rho\cos\vartheta\sin\varphi \\ v=\rho\sin\vartheta\sin\varphi \\ w=\rho\cos\varphi, \end{cases} \qquad \rho\ge 0,\ \vartheta\in[0,2\pi],\ \varphi\in[0,\pi],$$

si verifica che il nuovo dominio di integrazione è

$$D''=\left\{(\rho,\vartheta,\varphi) : 0\le\rho\le 2,\ 0\le\vartheta\le\frac{\pi}{2},\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{6},\ \rho^2\cos 2\varphi\ge 2\right\},$$

da cui, tenuto conto che il determinante dello Jacobiano della trasformazione in coordinate sferiche è $\rho^2\sin\varphi$, otteniamo

$$\begin{aligned}
\int_D z\,dxdydz &= 6\int_{D'} w\,dudvdw = 6\int_{D''}\rho^3\sin\varphi\cos\varphi\,d\rho d\varphi d\vartheta = \\
&= 6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\int_{\sqrt{\frac{2}{\cos 2\varphi}}}^2 \rho^3\ \sin\varphi\ \cos\varphi\,d\rho d\vartheta = \\
&= \frac{3\pi}{8}\int_0^{\frac{\pi}{6}} [\rho^4]^2_{\sqrt{2/\cos 2\varphi}}\sin 2\varphi\,d\varphi = \\
&= \frac{3\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(4\sin 2\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{\cos^2 2\varphi}\right)d\varphi\ = \\
&= 3\pi\,[-\cos 2\varphi]_0^{\pi/6} - \frac{3\pi}{4}\left[\frac{1}{\cos 2\varphi}\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{3\pi}{2}-\frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}\,.
\end{aligned}$$

Esercizio 3 (i) Si ha $|\boldsymbol{\varphi}'(t)|_3=\sqrt{1+4t^2+9t^4}$; quindi

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma f\,ds &= \int_0^1 f(\boldsymbol{\varphi}(t))\,|\boldsymbol{\varphi}'(t)|_3\,dt = \int_0^1 t^6(1+4t^2+9t^4)\,dt = \\
&= \int_0^1 [t^6+4t^8+9t^{10})\,dt = \frac{1}{7}+\frac{4}{9}+\frac{9}{11} = \frac{974}{693}\,.
\end{aligned}$$

(ii) Per definizione risulta

$$\int_{+\Gamma} \omega = \int_0^1 \langle \omega(\boldsymbol{\varphi}(t)), \boldsymbol{\varphi}'(t)\rangle_3^* \, dt = \int_0^1 [t + 2t^4 + 3t^8] \, dt = \frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{37}{30}.$$

Prova scritta dell'8 febbraio 2011

Esercizio 1 Determinare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{x^{n+10} \sin e^{-nx}}{1 + x^n} \, dx.$$

Esercizio 2 Fissato $n \in \mathbb{N}$, si calcoli l'integrale triplo

$$\int_T (x^n + y^n + z^n) \, dxdydz,$$

ove T è il tetraedro di $\mathbb{R}^3$ di vertici $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$.
Esercizio 3 Sia $\boldsymbol{\varphi}$ la curva piana definita da

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = \left(\frac{t}{1 + t^3}, \frac{t^2}{1 + t^3} \right), \qquad t \in [0, \infty[\,.$$

(i) Si verifichi che $\boldsymbol{\varphi}$ è una curva regolare che, pur non essendo chiusa, delimita una regione D del piano.

(ii) Si calcoli l'area della regione D.

Risoluzione

Esercizio 1 L'integrando converge puntualmente per ogni $x \geq 0$: infatti

$$\left| \frac{x^{n+10} \sin e^{-nx}}{1 + x^n} \right| \leq \frac{x^n}{1 + x^n} \cdot x^{10} e^{-nx},$$

e dunque

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+10} \sin e^{-nx}}{1 + x^n} = 0 \qquad \forall x \geq 0.$$

Inoltre la convergenza è dominata, in quanto

$$\left| \frac{x^{n+10} \sin e^{-nx}}{1 + x^n} \right| \leq \frac{x^n}{1 + x^n} \cdot x^{10} e^{-nx} \leq x^{10} e^{-x} \qquad \forall n \geq 1, \quad \forall x \geq 0.$$

Dato che la funzione $x^{10}e^{-x}$ è sommabile, possiamo applicare il teorema di Lebesgue e otteniamo

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{x^{n+10}\sin e^{-nx}}{1+x^n}\,dx = 0.$$

Esercizio 2 Il tetraedro T si descrive come segue:

$$T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1-x,\ 0 \le z \le 1-x-y\}.$$

Quindi

$$\int_T (x^n + y^n + z^n)\,dxdydz = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} (x^n + y^n + z^n)\,dxdydz;$$

tuttavia, data la simmetria del dominio e della funzione integranda rispetto alle tre variabili, possiamo facilitare i calcoli scrivendo

$$\int_T (x^n + y^n + z^n)\,dxdydz = 3\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} z^n\,dxdydz.$$

Si ha dunque

$$\begin{aligned}\int_T (x^n + y^n + z^n)\,dxdydz &= 3\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} z^n\,dxdydz = \\ &= 3\int_0^1\int_0^{1-x} \frac{(1-x-y)^{n+1}}{n+1}\,dydx = 3\int_0^1 \frac{(1-x)^{n+2}}{(n+2)(n+1)}\,dx = \\ &= \frac{3}{(n+3)(n+2)(n+1)}.\end{aligned}$$

Esercizio 3 (i) Si ha

$$\boldsymbol{\varphi}'(t) = \left(\frac{1-2t^3}{(1+t^3)^2}, \frac{2t-t^4}{(1+t^3)^2}\right),$$

quindi

$$|\boldsymbol{\varphi}'(t)|_2 = \frac{\sqrt{(1-2t^3)^2 + t^2(2-t^3)^2}}{1+t^3};$$

chiaramente quindi $|\boldsymbol{\varphi}'(t)|_2 > 0$ per ogni $t \ge 0$. La curva non è chiusa, perché $\boldsymbol{\varphi}$ è iniettiva; tuttavia risulta

$$\boldsymbol{\varphi}(0) = (0,0), \qquad \lim_{t\to\infty}\boldsymbol{\varphi}(t) = (0,0).$$

Quindi il sostegno Γ di $\boldsymbol{\varphi}$ delimita una regione D. Poiché le relazioni

$$x = \frac{t}{1+t^3}\,, \qquad y = \frac{t^2}{1+t^3}$$

implicano, come si verifica facilmente,

$$xy = \frac{t^3}{(1+t^3)^2} = \frac{t^{3+6}}{(1+t^3)^3} = x^3 + y^3,$$

si ricava che

$$\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \geq 0, \ y \geq 0, \ xy = x^3 + y^3\};$$

di conseguenza si può verificare che la regione D è descritta da

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \geq 0, \ y \geq 0, \ xy \geq x^3 + y^3\} :$$

infatti Γ è simmetrica rispetto alla bisettrice $y = x$ e i punti di Γ sulla bisettrice sono solamente $(0,0)$ e $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$; poiché nei punti (x,x) della bisettrice, con $0 < x < \frac{1}{2}$, vale $x^2 > 2x^3$, si deduce che i punti di D sono caratterizzati dalla disuguaglianza $xy \geq x^3 + y^3$.

(ii) Per calcolare l'area di D conviene utilizzare la formula

$$m_2(D) = \frac{1}{2} \int_\Gamma (x\,dy - y\,dx).$$

Si ottiene

$$\begin{aligned}
m_2(D) &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \left(\frac{t}{1+t^3} \cdot \frac{2t - t^4}{(1+t^3)^2} - \frac{t^2}{1+t^3} \cdot \frac{1 - 2t^3}{(1+t^3)^2} \right) dt = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{1}{(1+t^3)^3} (2t^2 - t^5 - t^2 + 2t^5)\, dt = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{t^2 + t^5}{(1+t^3)^3}\, dt = \int_0^\infty \frac{t^2}{(1+t^3)^2}\, dt = \frac{1}{6} \int_0^\infty \frac{ds}{(1+s)^2} = \frac{1}{6}\,.
\end{aligned}$$

Prova scritta del 3 marzo 2011

Esercizio 1 Provare che per ogni $p > 0$ risulta:

(i) $\displaystyle \int_0^\infty \frac{t\,e^{-t}}{e^{pt} - 1}\, dt = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(pn+1)^2}\,,$

(ii) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{t\,e^{-t}}{e^{pt}+1}\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(pn+1)^2}\,.$

Esercizio 2 Scrivere la serie di Fourier della funzione

$$f(x) = |x| \wedge \frac{\pi}{2}\,, \qquad x \in [-\pi, \pi];$$

verificare che la serie converge uniformemente e dedurre le relazioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos\frac{n\pi}{2}}{n^2} = \frac{3\pi^2}{16}\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\,, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}\,.$$

Esercizio 3 Calcolare l'integrale superficiale

$$\int_{\Sigma} (1-x)(1-y^3)\,d\mathbf{s},$$

ove $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+2z^2 = 1\}$.

Risoluzione

Esercizio 1 (i) Possiamo scrivere l'integrando nella forma

$$\frac{t\,e^{-t}}{e^{pt}-1} = \frac{t\,e^{-(1+p)t}}{1-e^{-pt}} = \sum_{n=0}^{\infty} t\,e^{-t[1+(n+1)p]}.$$

Questa serie è a termini positivi. Pertanto, in virtù del teorema di Beppo Levi,

$$\int_0^{\infty} \frac{t\,e^{-t}}{e^{pt}-1}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} t\,e^{-t[1+(n+1)p]}\,dt.$$

Poiché, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\infty} t\,e^{-t[1+(n+1)p]}\,dt = \\
&\quad = \left[-\frac{t\,e^{-t[1+(n+1)p]}}{1+(n+1)p}\right]_0^{\infty} + \frac{1}{1+(n+1)p}\int_0^{\infty} e^{-t[1+(n+1)p]}\,dt = \\
&\quad = \frac{1}{[1+(n+1)p]^2}\,,
\end{aligned}$$

si ottiene

$$\int_0^{\infty} \frac{t\,e^{-t}}{e^{-tp}-1}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{[1+(n+1)p]^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1+kp)^2}\,.$$

(ii) Stavolta possiamo scrivere l'integrando nella forma

$$\frac{t\,e^{-t}}{e^{pt}+1} = \frac{t\,e^{-(1+p)t}}{1+e^{-pt}} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,t\,e^{-t[1+(n+1)p]}.$$

Questa serie è a termini di segno alterno. La sua somma parziale N-sima è dominata nel modo seguente:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\,t\,e^{-t[1+(n+1)p]} &= t\,e^{-(1+p)t}\,\frac{1-(-1)^{N+1}\,e^{-t(N+1)p}}{1+e^{-pt}} \leq \\ &\leq \frac{2t\,e^{-(1+p)t}}{1+e^{-pt}} \leq 2t\,e^{-(1+p)t}.\end{aligned}$$

La funzione all'ultimo membro è sommabile in $]0,\infty[$. Pertanto, in virtù del teorema di Lebesgue,

$$\int_0^{\infty} \frac{t\,e^{-t}}{e^{pt}+1}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^{\infty} t\,e^{-t[1+(n+1)p]}\,dt.$$

In definitiva si ottiene, utilizzando il calcolo fatto in (i),

$$\int_0^{\infty} \frac{t\,e^{-t}}{e^{tp}+1}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[1+(n+1)p]^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(1+kp)^2}\,.$$

Esercizio 2 Calcoliamo i coefficienti di Fourier di f. Trattandosi di una funzione pari, saranno presenti solo i coefficienti a_n relativi ai coseni, e possiamo scrivere

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(x \wedge \frac{\pi}{2}\right)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,dx + \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\pi}{2}\,dx = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}\,,$$

mentre per $n > 0$

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\Big(x \wedge \frac{\pi}{2}\Big)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,\cos nx\,dx + \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\pi}{2}\,\cos nx\,dx = \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{x\,\sin nx}{n}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin nx\,dx + \left[\frac{\sin nx}{n}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \\
&= \frac{1}{n}\,\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{2}{n^2\pi}\Big(\cos\frac{n\pi}{2} - 1\Big) - \frac{1}{n}\,\sin\frac{n\pi}{2} = \frac{2}{\pi}\,\frac{\cos\frac{n\pi}{2} - 1}{n^2}\,.
\end{aligned}
$$

Dunque la serie di Fourier di f è

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,\cos nx = \frac{3\pi}{8} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{2} - 1}{n^2}\,\cos nx.$$

Questa serie converge totalmente in $\mathbb{R}$, per confronto con la serie $\frac{4}{\pi}\Sigma\frac{1}{n^2}$. Scegliendo $x = 0$ si ottiene

$$\frac{3\pi}{8} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{2} - 1}{n^2} = 0,$$

ovvero

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1 - \cos\frac{n\pi}{2}}{n^2} = \frac{3\pi^2}{16}\,.$$

Da qui, essendo

$$\cos\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 2k+1, \quad k \in \mathbb{N} \\ (-1)^k & \text{se } n = 2k, \qquad\quad k \in \mathbb{N}^+, \end{cases}$$

si ricava

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{4k^2} = \frac{3\pi^2}{16}\,,$$

e quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} - \frac{1}{4}\sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{4h^2} + \frac{1}{4}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{1}{(2h+1)^2} = \frac{3\pi^2}{16}\,,$$

ossia

$$\frac{15}{16}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} + \frac{1}{4}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{1}{(2h+1)^2} = \frac{3\pi^2}{16}.$$

Ma osservando che

$$\sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{(2h+1)^2} = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h^2} - \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{(2h)^2} = \frac{3}{4} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h^2}\,,$$

si può scrivere

$$\frac{18}{16} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{3\pi^2}{16}\,,$$

che implica finalmente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\,,$$

e di conseguenza

$$\sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{(2h+1)^2} = \frac{3}{4} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h^2} = \frac{\pi^2}{8}\,.$$

Esercizio 3 Possiamo parametrizzare Σ nel modo seguente:

$$\begin{cases} x = \sin\vartheta\cos\varphi \\ y = \sin\vartheta\sin\varphi \qquad \vartheta \in [0,\pi], \quad \varphi \in [0, 2\pi]. \\ z = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\vartheta, \end{cases}$$

e la matrice delle derivate è

$$\begin{pmatrix} \cos\vartheta\cos\varphi & -\sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta\sin\varphi & \sin\vartheta\cos\varphi \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\vartheta & 0 \end{pmatrix}.$$

Pertanto

$$\sqrt{EG-F^2} = \sqrt{\left(\cos^2\vartheta + \frac{1}{2}\sin^2\vartheta\right)\sin^2\vartheta} = \frac{\sin\vartheta}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\cos^2\vartheta}.$$

L'integrale proposto diventa allora

$$\int_\Sigma (1-x)(1-y^3)\, d\mathbf{s} =$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} (1-\sin\vartheta\cos\varphi)(1-3\sin^3\vartheta\sin^3\varphi)\frac{\sin\vartheta}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\cos^2\vartheta}\, d\vartheta d\varphi.$$

Sviluppando il prodotto si vede che i termini contenenti $\cos\varphi$ oppure $\sin^3\varphi$ hanno integrale su $[0,2\pi]$ nullo: quindi si ha semplicemente

$$\begin{aligned}
\int_\Sigma (1-x)(1-y^3)\,d\mathbf{s} &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin\vartheta}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\cos^2\vartheta}\,d\vartheta d\varphi = \\
&= \sqrt{2}\,\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1+t^2}\,dt = 2\sqrt{2}\,\pi\int_0^1\sqrt{1+t^2}\,dt = \\
&= 2\sqrt{2}\,\pi\int_0^{\operatorname{settsinh}1}\cosh s\,ds = 2\sqrt{2}\,\pi.
\end{aligned}$$