



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PISA

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea Triennale in Matematica

Tesi di Laurea

PROBLEMI ELLITTICI SU POLIGONI

Relatore:
Prof. PAOLO ACQUISTAPACE

Candidato:
GAIA LAURA TALONE

ANNO ACCADEMICO 2011-2012

Indice

Introduzione	iii
1 Nozioni preliminari	1
1.1 Presentazione del problema	1
1.2 Prerequisiti	2
1.2.1 Spazi di Sobolev	2
1.2.2 Ω e il suo bordo	5
1.2.3 Traccia	9
1.2.4 Convergenza debole	12
2 Regolarità della soluzione	13
2.1 Soluzione in $H^{1,2}$	13
2.2 Soluzione in $H^{2,2}$	17
2.2.1 Ω con bordo C^2	17
2.2.2 Ω convesso	17
2.2.3 Ω poligono non convesso	18
2.2.4 Soluzioni singolari	29

*Alla professoressa
Ester Guercilena.*

Introduzione

L'oggetto di questa tesi è lo studio del problema di Dirichlet per equazioni ellittiche, con secondo membro $f \in L^2(\Omega)$, in aperti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ con bordo poligonale. Poiché tali aperti hanno bordo lipschitziano, esiste unica la soluzione variazionale in $H_0^{1,2}(\Omega)$ del problema. Se il poligono è convesso, la soluzione variazionale appartiene a $H^{2,2}(\Omega)$, come conseguenza dell'uso della classica tecnica dei rapporti incrementali e di un risultato di approssimazione.

Questo non è più vero nel caso di poligoni non convessi, perché la soluzione variazionale u presenta delle singolarità nell'intorno dei vertici V_j corrispondenti ad angoli $\omega_j \in]\pi, 2\pi[$. L'obiettivo principale della tesi è quello di illustrare un elegante risultato di Grisvard, che caratterizza precisamente tali singolarità, mostrando che esistono delle funzioni S_j , nulle fuori da un intorno di V_j , che sono in $H^{1,2}(\Omega) \setminus H^{2,2}(\Omega)$ e sono tali che $u - \sum_j S_j \in H^{2,2}(\Omega)$. Per semplicità espositiva, la trattazione è limitata al caso dell'operatore di Laplace.

Vediamo in dettaglio il contenuto della tesi.

Nella prima parte vengono descritti i concetti fondamentali che sono di sostegno per tutta la trattazione. Esibiamo anzitutto alcuni risultati della teoria degli spazi di Sobolev. Definiamo dapprima lo *spazio* $W^{m,p}(\Omega)$ come l'insieme delle funzioni che ammettono *derivate deboli*. Introduciamo poi lo *spazio* $H^{m,p}(\Omega)$ delle funzioni che ammettono *derivate forti* e vediamo in quali casi (e il nostro è uno di questi) i due spazi sono equivalenti. Enunciamo il teorema di immersione di Sobolev e proviamo alcuni risultati di compattezza.

Analizziamo poi le proprietà di regolarità dell'aperto Ω , tra le quali alcune storicamente importanti, come la *proprietà del segmento e del cono*: per ciascun punto x del bordo Γ di Ω , esiste un segmento lineare C con origine in x o un cono C con vertice in x , tale che $C \setminus \{x\}$ è contenuto in Ω . Infine definiamo gli aperti Ω con bordo poligonale curvilineo.

Introduciamo poi il concetto di traccia γ_0 e le sue principali caratteristiche, definendo gli spazi di Sobolev con esponenti frazionari e negativi, con cui caratterizziamo i duali degli spazi di Sobolev.

La prima parte si conclude con la nozione di convergenza debole e la descrizione delle sue proprietà negli spazi di Hilbert.

La seconda parte della tesi inizia provando l'esistenza e l'unicità della soluzione variazionale quando Ω ha bordo lipschitziano, utilizzando il teorema di Lax-Milgram.

Successivamente viene provata la regolarità della soluzione quando il bordo Γ è di classe C^2 , ed anche quando Ω è convesso, utilizzando un'approssimazione di Ω dall'interno con aperti di classi C^2 . Questo garantisce che la soluzione variazionale è in $H^{2,2}(\Omega)$ quando Ω è un poligono convesso.

Se Ω è un poligono non convesso, si costruiscono le soluzioni singolari S_j nell'intorno di ogni V_j con angolo $\omega_j \in]\pi, 2\pi[$ e si mostra che esse appartengono a $H^{1,2}(\Omega) \setminus H^{2,2}(\Omega)$. Infine si prova il risultato di Grisvard, cioè che esiste un'unica combinazione lineare delle S_j tale che per la soluzione variazionale u del problema

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega, \text{ con } f \in L^2(\Omega) \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

si ha $u - \sum_j c_j S_j \in H^{2,2}(\Omega)$.

Capitolo 1

Nozioni preliminari

1.1 Presentazione del problema

Il problema di Dirichlet è espresso come segue:

$$\begin{cases} L(u) = f + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

dove $L(u)$ è un operatore differenziale del secondo ordine, definito su di un aperto limitato Ω di \mathbb{R}^n , f e f_i sono in $L^2(\Omega)$ e g è un elemento dello spazio di Sobolev $W^{1,2}(\Omega)$.

Definizione 1.1. Un'equazione lineare del secondo ordine in forma di divergenza è un'equazione differenziale della forma:

$$L(u) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=0}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (b_i u) + c_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + du = f + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \quad (1.1)$$

dove $a_{ij}, b_i, c_i, d, f, f_i$ sono funzione definite in un aperto Ω di \mathbb{R}^n .

Definizione 1.2. L'equazione (1.1) si definisce **ellittica** se esiste un numero naturale $\nu > 0$ tale che:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \nu |\xi|^2$$

per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$ e per quasi ogni $x \in \Omega$.

Indicando con $A(x)$ la matrice dei coefficienti $a_{ij}(x)$, osserviamo che chiedere l'ellitticità equivale a voler la matrice $A(x)$ definita positiva, uniformemente al variare di $x \in \Omega$.

L'operatore di Laplace

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = f + \sum \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$$

è ovviamente un'equazione che soddisfa la condizione di ellitticità: la matrice dei coefficienti è la matrice I_n .

L'obiettivo principale di questa tesi è studiare la soluzione del problema di Laplace e la sua regolarità. Consideriamo però il problema di Laplace definito nel seguente modo:

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega, \text{ con } f \in L^2(\Omega) \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

Vedremo come le caratteristiche dell'insieme Ω influiranno sulla regolarità della soluzione.

1.2 Prerequisiti

1.2.1 Spazi di Sobolev

Definizione 1.3. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e sia $p \geq 1$. Denotiamo con $L^p(\Omega)$ la classe di tutte le funzioni misurabili u , definite su Ω , per le quali vale

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty.$$

In $L^p(\Omega)$ identifichiamo funzioni che coincidono quasi ovunque; gli elementi di $L^p(\Omega)$ sono allora classi di funzioni misurabili che soddisfano la relazione appena definita. Scriviamo, quindi, che $u = 0$ in $L^p(\Omega)$ se $u = 0$ quasi ovunque in Ω . È chiaro che $L^p(\Omega)$ è uno spazio vettoriale. Inoltre, se $1 \leq p < \infty$, sullo spazio $L^p(\Omega)$ la quantità

$$\|u\|_p = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

definisce una norma, rispetto alla quale $L^p(\Omega)$ è completo.

Generalizziamo ora il concetto di spazio L^p :

Definizione 1.4. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto. Lo spazio $L^p_{loc}(\Omega)$ è la classe di tutte le funzioni misurabili u , definite su Ω , tali che $u \in L^p(K)$ per ogni $K \subset \Omega$ compatto.

È giunto il momento di introdurre gli spazi di Sobolev di ordine intero, mostrando alcune delle loro proprietà più importanti. Questi spazi sono definiti su un arbitrario aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e sono sottospazi vettoriali di $L^p(\Omega)$. Iniziamo dando alcune definizioni:

Definizione 1.5. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Si dice che f è α -hölderiana in Ω , con parametro $\alpha \in]0, 1]$, se esiste una costante $L \geq 0$ tale che

$$\forall x, y \in \Omega \quad |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|^\alpha.$$

In particolare, se $\alpha = 1$ allora f è **lipschitziana**.

Prima di definire la nozione di derivata debole, ricordiamo che $C_0^\infty(\Omega)$ è l'insieme delle funzioni di classe C^∞ a supporto compatto, cioè nulle al di fuori di un opportuno compatto contenuto in Ω ; tale spazio è denso in $L^p(\Omega)$, quando $1 \leq p < \infty$.

Definizione 1.6. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto, e sia $u \in L_{loc}^1(\Omega)$. Definiamo **derivata debole** di u la funzione v (se esiste) che soddisfa la seguente relazione

$$\int_{\Omega} v(x)f(x)dx = - \int_{\Omega} u(x)D^j f(x)dx \quad \forall f \in C_0^\infty(\Omega).$$

E' evidente che, se u è derivabile in senso classico, allora la sua derivata j -esima $D^j u$ coincide con la derivata debole. Inoltre, con una semplice verifica, si dimostra che se esiste una derivata debole di u allora questa è unica.

Chiaramente è possibile definire derivate deboli di ordine successivo al primo. Per questo motivo, se α è un multi-indice, denoteremo con $D^\alpha u$ la derivata debole α -esima di u .

Definizione 1.7. Sia m un intero positivo e sia $p \in [1, \infty]$. Definiamo, per le funzioni u dotate di derivate deboli $D^\alpha u$ (con $1 \leq |\alpha| \leq m$), la seguente norma:

- se $p \in [1, \infty[$

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}};$$

- se $p = \infty$

$$\|u\|_{m,p} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_\infty;$$

dove $\|\cdot\|_p$ indica la norma in $L^p(\Omega)$.

La norma $\|\cdot\|_{m,p}$ è la **norma di Sobolev**.

Definizione 1.8. Per ogni intero positivo m e per ogni $p \in [1, \infty]$ definiamo

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega) \quad \forall 0 \leq |\alpha| \leq m\}.$$

$W^{m,p}(\Omega)$, munito della norma di Sobolev, è detto **spazio di Sobolev**.

Osservazione 1.9. Chiaramente, se $m = 0$, lo spazio $W^{0,p}$ coincide con lo spazio L^p per ogni $p \in [1, \infty[$.

Come fatto in precedenza per gli spazi L^p , possiamo definire il concetto di spazio di Sobolev *locale*:

Definizione 1.10. Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^n . Definiamo

$$W_{loc}^{m,p}(\Omega) = \{u \in L_{loc}^p(\Omega) \mid u \in W^{m,p}(K) \ \forall K \subseteq \Omega \text{ compatto}\}.$$

Un'altro concetto fondamentale è quello di **derivata forte** di una funzione. Vedremo poi che questa nozione, sotto certe ipotesi su Ω , è del tutto equivalente a quella di derivata debole.

Definizione 1.11. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e sia $u \in L^p(\Omega)$. Diciamo che u ha **derivate forti** $v_1, \dots, v_n \in L^p(\Omega)$ se esiste una successione $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subseteq C^1(\Omega)$ tale che $u_m \rightarrow u$ in L^p e $D^i u_m \rightarrow v_i$ in L^p per $i = 1, \dots, n$.

L'insieme delle funzioni che ammettono derivate forti si denota con $H^{m,p}(\Omega)$.

Osservazione 1.12. Si ha che $H^{s,2}(\mathbb{R}^n) = W^{s,2}(\mathbb{R}^n)$, per $s \in \mathbb{R}$ (grazie al teorema di Plancherel) e $H^{m,p}(\mathbb{R}^n) = W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, per ogni intero m e $1 < p < +\infty$ (grazie al teorema di Mikhlin). Di questi teoremi non riportiamo la dimostrazione, poiché esula dagli scopi di questa tesi.

Si ha inoltre il forte risultato che $H(\Omega) = W(\Omega)$ se $\Gamma = \partial\Omega$ ha la proprietà del segmento (proprietà che enunceremo poco più avanti, definizione 1.18). Per la dimostrazione di tale fatto si veda Adams [3], Th. 3.22.

A noi interesserà il caso in cui Ω è un poligono di \mathbb{R}^2 : siccome i poligoni rispettano la proprietà del segmento, utilizzeremo indifferentemente le derivate forti o quelle deboli.

Diamo, senza dimostrazione, un fondamentale teorema della teoria di Sobolev:

Teorema 1.13. (di Sobolev) *Sia Ω un aperto limitato di \mathbb{R}^n , con la proprietà del cono. Allora*

$$H^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \begin{cases} L^{p^*}(\Omega) & \text{con } p^* = \frac{np}{n-p}, \text{ se } p < n \\ \bigcap_{r < \infty} L^r(\Omega) & \text{se } p = n \\ C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) & \text{con } \alpha = 1 - \frac{n}{p}, \text{ se } p > n \end{cases}$$

Corollario 1.14. *L'immersione $H^{2,2}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ è compatta se $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ è limitato.*

Dimostrazione. Infatti $H^{2,2}(\Omega) \hookrightarrow \bigcap_{r < \infty} H^{1,r}(\Omega) \hookrightarrow \bigcap_{0 < \alpha < 1} C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$. Quindi se $\{u_n\} \subset H^{2,2}(\Omega)$ è limitata, allora $\{u_n\}$ è limitata in $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, con $\alpha \in]0, 1[$ arbitrariamente fissato. Perciò $\{u_n\}$ è equilimitata ed equicontinua, quindi esiste una sottosuccessione $\{u_{n_k}\}$ che converge uniformemente in $\overline{\Omega}$ a una $u \in C(\overline{\Omega})$. Poiché Ω è limitato, $u_{n_k} \rightarrow u \in L^2(\Omega)$ \square

È necessario per i nostri scopi, introdurre il concetto di spazio di Sobolev con esponente negativo:

Definizione 1.15. Siano $p \in]1, \infty[$ e p' l'esponente coniugato di p ($\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$). Se Ω è un aperto di \mathbb{R}^n , lo spazio di Sobolev $H^{-m,p}(\Omega)$, con $m \in \mathbb{N}^+$ è il **duale dello spazio di Sobolev** $H_0^{m,p'}(\Omega)$.

In altre parole $T \in H^{-m,p}(\Omega)$ se e solo se esiste $K \geq 0$ tale che

$$| \langle T, u \rangle | \leq K \|u\|_{m,p} \text{ per ogni } u \in H_0^{m,p'}(\Omega).$$

Teorema 1.16. Sia A un arbitrario sottoinsieme di \mathbb{R}^n e sia \mathcal{A} una famiglia di aperti di \mathbb{R}^n che ricoprono A . Allora esiste una famiglia Ψ di funzioni $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ che soddisfa le seguenti proprietà:

- (i) per ogni $\psi \in \Psi$ e per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, $0 \leq \psi(x) \leq 1$;
- (ii) se K è un compatto contenuto in A , allora è diverso da 0 in K al più un numero finito di funzioni $\psi \in \Psi$;
- (iii) per ogni $\psi \in \Psi$ esiste $U \in \mathcal{A}$ tale che il supporto di ψ è contenuto in U ;
- (iv) per ogni $x \in A$ si ha $\sum_{\psi \in \Psi} \psi(x) = 1$.

La famiglia Ψ è detta **partizione dell'unità per A subordinata a \mathcal{A}** .

1.2.2 Ω e il suo bordo

Le proprietà delle funzioni di un dato spazio di Sobolev sono fortemente legate alle proprietà del bordo Γ del dominio Ω . Introduciamo, quindi, alcune di queste proprietà.

Definizione 1.17. Sia Ω un sottoinsieme aperto di \mathbb{R}^n . Diciamo che il suo bordo Γ è **continuo** (risp. **Lipschitziano**, **differenziabile con continuità**, **di classe $C^{k,1}$** , **differenziabile m volte con continuità**) se per ogni $x \in \Gamma$ esistono un intorno V di x in \mathbb{R}^n e nuove coordinate ortogonali $\{y_1, \dots, y_n\}$ tali che:

- (i) V è un cubo nelle nuove coordinate:

$$V = \{(y_1, \dots, y_n) \mid -a_j < y_j < a_j, 1 \leq j \leq n\};$$

- (ii) esiste una funzione ϕ continua (risp. Lipschitziana, differenziabile con continuità, di classe $C^{k,1}$, differenziabile m volte con continuità) definita in

$$V' = \{(y_1, \dots, y_{n-1}) \mid -a_j < y_j < a_j, 1 \leq j \leq n-1\}$$

e tale che

$$|\phi(y')| \leq a_n/2 \text{ per ogni } y' = (y_1, \dots, y_{n-1}) \in V',$$

$$\Omega \cap V = \{y = (y', y_n) \in V | y_n < \phi(y')\},$$

$$\Gamma \cap V = \{y = (y', y_n) \in V | y_n = \phi(y')\}.$$

In altre parole, in un intorno di x , Ω segue il grafico di ϕ e conseguentemente il bordo Γ è localmente il grafico di tale ϕ .

Se Γ è lipschitziano, esso ha dimensione $n - 1$ e l'insieme Ω non può giacere da entrambe le parti del bordo stesso.

Negli stadi iniziali della teoria degli spazi di Sobolev, molti autori hanno descritto le proprietà del bordo dei possibili domini Ω in modi molto stravaganti. Per esempio hanno richiesto che per ciascun punto x del bordo Γ di Ω , debba esistere un segmento lineare C con origine in x o un cono C con vertice in x , tale che $C \setminus \{x\}$ sia contenuto in Ω . Questo punto di vista è adottato dallo stesso Sobolev.

Definizione 1.18. Sia Ω un sottoinsieme aperto di \mathbb{R}^n . Diciamo che Ω soddisfa la **condizione del segmento** (risp. **del cono**) se per ogni $x \in \Gamma$, esiste un intorno V di x in \mathbb{R}^n e nuove coordinate $\{y_1, \dots, y_n\}$ tali che:

(i) nelle nuove coordinate $x = 0$ e V è il cubo

$$\{(y_1, \dots, y_n) \mid -a_j < y_j < a_j, 1 \leq j \leq n\};$$

(ii) per ogni $y \in \overline{\Omega} \cap V$ e $z \in C$, si ha $y - z \in \Omega$, ove C è il segmento aperto $\{(0, \dots, 0, z_n) \mid 0 < z_n < h\}$ (risp. C è il cono aperto $\{z = (z', z_n) \mid (\cot \theta)|z'| < z_n < h\}$) per qualche $\theta \in]0, \pi/2[$) e $h > 0$.

Osservazione 1.19. Se Ω ha bordo lipschitziano, allora esso ha la proprietà del cono. Questo fatto si prova facilmente rimpiazzando tutte le a_j con $a_j/2$, scegliendo $h < a_n/2$ e

$$\theta \leq \inf \left(\arctan \frac{1}{K}, \arctan \frac{a_1}{a_n}, \dots, \arctan \frac{a_{n-1}}{a_n} \right),$$

con K la costante di Lipschitz di ϕ .

Da notare che ovviamente la proprietà del segmento e del cono non sono equivalenti; riportiamo di seguito due controesempi:

Esempio 1.20. Sia Ω la porzione di piano contenuta nell'asteroide (figura 1.1), la cui parametrizzazione è:

$$\begin{cases} x = c \cos^3 \phi & \text{con } 0 \leq \phi < 2\pi \\ y = c \sin^3 \phi & \text{e } c \in \mathbb{R}^+. \end{cases}$$

Notiamo che esso rispetta la proprietà del segmento ma sicuramente non quella del cono, in quanto non si riuscirà mai a costruire un cono contenuto in Ω , con vertice in una delle quattro cuspidi.

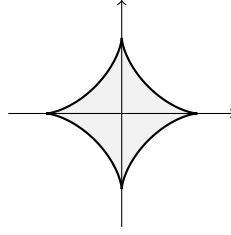


Figura 1.1: Asteroide

Esempio 1.21. Sia ora Ω la corona circolare a cui si toglie un segmento (figura 1.2): si vede che esso ha la proprietà del cono, ma non quella del segmento. Essa cade infatti per tutti i punti presi sul 'taglio'.

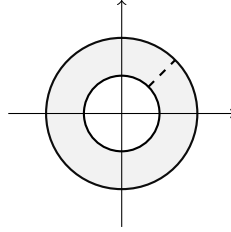


Figura 1.2: Corona circolare con taglio

Di seguito due risultati interessanti, che riportano alcune equivalenze tra le definizioni appena citate.

Teorema 1.22. *Se Ω soddisfa la condizione del segmento, allora l'insieme delle restrizioni a Ω delle funzioni $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ è denso in $W^{m,p}(\Omega)$, per $1 \leq p < \infty$.*

Teorema 1.23. *Sia Ω un sottoinsieme di \mathbb{R}^n aperto e limitato. Ω soddisfa la proprietà del cono se e solo se ha bordo Lipschitziano.*

Dimostrazione. Abbiamo già osservato che la condizione di avere un bordo lipschitziano è sufficiente (osservazione 1.19).

Consideriamo, quindi, $x \in \Gamma$ e assumiamo che Ω abbia la proprietà del cono, si veda figura 1.3. Sappiamo che $x - C \subseteq \Omega$. Mostriamo che $x + C \subset \Omega^c$, sempre che sia $\text{dist}(x, V^c) > \frac{h}{\cos \theta}$ (ciò è sempre possibile, rimpicciolendo eventualmente h). Infatti, se esistesse $y \in (x + C) \cap \Omega$, allora avremmo $y \in \Omega \cap V$, dato che $|y_n - x_n| < h$. Ne seguirebbe, per la condizione del cono, $y - C \subseteq \Omega$, il che è assurdo perché $x \in y - C$, ma $x \in \partial\Omega$.

Da tutto ciò deduciamo che se definiamo il cilindro K tale che

$$K = \{(y', y_n) \mid -h < y_n < h, |y'| < h \tan \theta\},$$

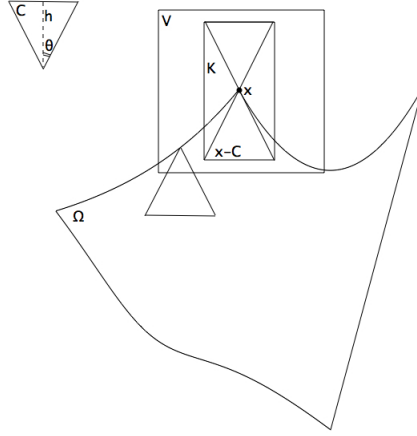


Figura 1.3: Ω proprietà del cono se e solo se bordo Lipschitziano

allora abbiamo

$$\Gamma \cap K \subset \{(y', y_n) \mid |y_n| \tan \theta < |y'| < h \tan \theta\}.$$

Altrimenti se fosse $|y'| \leq |y_n| \tan \theta$, il punto y starebbe in $x - C \subseteq \Omega$. Quindi la prosecuzione di Γ non esce dalla parte superiore di K , perché ciò vorrebbe dire $|y_n| \geq h$. Allora definiamo $\phi(y') = \sup\{y_n \mid (y', y_n) \in \Gamma \cap K\}$ per ogni y' con $|y'| < h \tan \theta$. Quindi $(y', \phi(y')) \in \Gamma$ perché Γ è chiuso.

La proprietà del cono implica che se $(y', y_n) \in K$ e $y_n < \phi(y')$ allora $(y', y_n) \in \Omega$, poiché $(y', \phi(y'))$ è vertice di un cono $y - C \subseteq \Omega$. A questo punto, ragionando per assurdo, come fatto per x , si vede che se $(y', y_n) \in K$ e $y_n > \phi(y')$ allora $(y', y_n) \notin \bar{\Omega}$ (se per assurdo $y = (y', y_n) \in \bar{\Omega}$, allora è vertice di un cono $y - C \subseteq \Omega$, da cui $(y', \phi(y')) \in \Omega$, il che è assurdo).

Infine se $(y', \phi(y'))$ e $(z', \phi(z'))$ stanno nel grafo di ϕ , allora la proprietà del cono dice che

$$y_n - z_n > -|y' - z'| \cot \theta$$

e quindi

$$\phi(z') - \phi(y') < |y' - z'| \cot \theta$$

e scambiando z' e y' , in quanto scelti arbitrariamente, si ottiene

$$|\phi(z') - \phi(y')| < |y' - z'| \cot \theta,$$

cioè ϕ è Lipschitziana di costante $K = \cot \theta$. □

Corollario 1.24. *Sia Ω un sottoinsieme di \mathbb{R}^n aperto, limitato e convesso. Allora Ω ha bordo Lipschitziano.*

Dimostrazione. Sia x_0 un punto in Ω e sia $r > 0$ il raggio di una palla B con centro in x_0 , contenuta in Ω . Poiché Ω è convesso, tutti i punti $ty + (1-t)z$, con $y \in \bar{\Omega}$, $z \in B(y)$, $0 \leq t < 1$, sono in Ω . Questo già mostra che Ω rispetta in un certo senso la proprietà del cono, ma ci manca ancora l'uniformità. Ora fissiamo $x \in \Gamma$ e scegliamo nuove coordinate $\{y_1, \dots, y_n\}$, con origine in x e tale che x_0x sia parallelo a Oy_n . Denotiamo con l la distanza tra x_0 e x . Ora per ogni $y \in \bar{\Omega}$, che dista meno di $r/2$ da x , prendiamo la palla $B(y)$ centrata in $(y', y_n - l)$ con raggio $r/2$. Ovviamente $B(y) \subset B$ e tutti i punti $ty + (1-t)z$, con $z \in B$, $0 \leq t < 1$, stanno in Ω . La proprietà del cono è quindi verificata scegliendo gli a_j sufficientemente piccoli, $h = l$ e $\sin \theta = r/2l$. \square

L'insieme Ω può presentare un bordo ancora meno semplice, Γ può essere infatti un poligono. Vediamone la definizione formale:

Definizione 1.25. Sia Ω un sottoinsieme aperto di \mathbb{R}^2 . Diciamo che il bordo Γ è un **poligono curvilineo di classe C^m** , con m intero maggiore di 1 (risp. **di classe $C^{k,\alpha}$** , con $k \geq 1$, $0 < \alpha \leq 1$) se per ogni $x \in \Gamma$ esiste un intorno V di x in \mathbb{R}^2 e una mappa ψ da V in \mathbb{R}^2 tale che:

- (i) ψ è iniettiva,
- (ii) ψ e ψ^{-1} sono entrambe di classe C^m (risp. $C^{k,\alpha}$),
- (iii) $\Omega \cap V$ è uguale a

$$\{y \in \Omega \mid \psi_2(y) < 0\}, \{y \in \Omega \mid \psi_1(y) > 0 \text{ e } \psi_2(y) < 0\},$$

oppure

$$\{y \in \Omega \mid \psi_1(y) < 0 \text{ o } \psi_2(y) < 0\}$$

dove $\psi_j(y)$ denota la j -esima componente di ψ .

Osservazione 1.26. Ogni dominio Ω che soddisfa la definizione 1.25 ha bordo Lipschitziano.

Noi arriveremo a considerare il caso, non solo di un poligono, ma di un poligono non convesso, cioè che presenta spigoli con angoli interni maggiori di π .

1.2.3 Traccia

D'ora in avanti adotteremo la seguente notazione: per ogni punto $x \in \mathbb{R}^n$, scriviamo $x = (\bar{x}, x_n)$, con $\bar{x} \in \mathbb{R}^{n-1}$, $x_n \in \mathbb{R}$. Consideriamo innanzitutto $\Omega = \Gamma \times]0, \alpha]$ (con Γ aperto di \mathbb{R}^{n-1} e $0 < \alpha < +\infty$), cioè Ω è un cilindro.

Definizione 1.27. Definiamo **traccia di u** la funzione $\gamma_0 : C^0(\bar{\Omega}) \rightarrow C^0(\Gamma)$ tale che $\gamma_0 u = u|_{\Gamma}$.

Osserviamo che γ_0 è un operatore lineare.

Vale il seguente importante risultato:

Teorema 1.28. *L'operatore lineare γ_0 è continuo da $C^1(\overline{\Omega})$, munito della norma $\|\cdot\|_{H^{1,p}(\Omega)}$, in $L^p(\Gamma)$.*

Dimostrazione. Sia $u \in C^1(\overline{\Omega})$ e sia $\bar{x} \in \Gamma$. Allora osserviamo che, per ogni $x_n \in (0, \alpha)$ e $x = (\bar{x}, x_n)$, si ha:

$$u(x) = u(\bar{x}, 0) + \int_0^{x_n} \frac{\partial u}{\partial x_n}(\bar{x}, t) dt.$$

Quindi, per la disuguaglianza di Hölder,

$$|u(\bar{x}, 0)|^p \leq c(p) \left[|u(x)|^p + \alpha^{p-1} \int_0^\alpha \left| \frac{\partial u}{\partial x_n}(\bar{x}, t) \right|^p dt \right].$$

Ora, integrando su Ω otteniamo:

$$\begin{aligned} \int_\Gamma |u(\bar{x}, 0)|^p d\bar{x} &\leq \frac{c(p)}{\alpha} \left[\int_\Omega |u|^p dx + \alpha^p \int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x_n}(x) \right|^p dx \right] \leq \\ &\leq c(p, \alpha) \left[\|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \|u\|_{H^{1,p}(\Omega)}^p \right]. \end{aligned}$$

□

Forti di questa proposizione osserviamo che esiste un unico prolungamento continuo di γ_0 lineare e continuo in $H^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\Gamma)$, che chiameremo ancora γ_0 .

Ovviamente il concetto di traccia, che noi abbiamo definito su $\Omega = \Gamma \times]0, \alpha]$, con α finito, è estendibile al caso di $\alpha = +\infty$.

É chiaro, però che noi siamo interessati al caso ancora più generale, cioè al caso in cui Ω sia un aperto limitato qualsiasi di \mathbb{R}^n .

Prima di estendere la nozione di traccia agli spazi di Sobolev, occorre introdurre gli spazi di Sobolev frazionari: $H^{s,p}(\Omega)$, con $s \in \mathbb{R}^+$ e Ω è un aperto di \mathbb{R}^n .

Poniamo per $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ misurabile e $0 < s < 1$

$$\|u\|_{s,p}^p = \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dy dx,$$

dove n è la dimensione di Ω . $\|u\|_{s,p}$ è una seminorma.

Notiamo che se per esempio u è lipschitziana di costante K , allora si ha

$$\|u\|_{s,p}^p \leq K^p \int_\Omega \int_\Omega \frac{1}{|x - y|^{n+(s-1)p}} dy dx$$

e poiché $(s-1)p < 0$, questo integrale è convergente.

Sia ora

$$C_*^1(\overline{\Omega}) = \{u \in C^1(\overline{\Omega}) \mid \|u\|_{s,p} < \infty\};$$

Definizione 1.29. Lo spazio di Sobolev $H^{s,p}(\Omega)$, di ordine frazionario $s \in]0, 1[$, è la chiusura di $C_*^1(\overline{\Omega})$ rispetto alla norma $\|\cdot\|_{s,p} + \|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$.

Definizione 1.30. Se $s > 0$, detta $m = [s]$ e supposto $s > [s]$, si definisce

$$H^{s,p}(\Omega) = \{u \in H^{m,p}(\Omega) \mid D^\alpha u \in H^{s,p}(\Omega) \text{ per ogni } \alpha \in \mathbb{N}^n, \text{ con } |\alpha| = m\}.$$

É chiaro che se $0 < s < s'$ allora $H^{s',p}(\Omega) \subseteq H^{s,p}(\Omega)$.

Inoltre se $s < m < s'$, con $m \in \mathbb{N}$ allora $H^{s',p}(\Omega) \subseteq H^{m,p}(\Omega) \subseteq H^{s,p}(\Omega)$.

A noi interessa anche definire lo spazio di Sobolev frazionario $H^{s,p}(\Gamma)$, quando Γ è la frontiera di un aperto limitato Ω di classe C^1 . A questo scopo, essendo Γ una varietà $(n-1)$ -dimensionale di classe C^1 , si considera la seminorma

$$\|u\|_{s,p}^p = \int_\Gamma \int_\Gamma \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n-1+sp}} d\sigma_x d\sigma_y,$$

ove $d\sigma$ è la misura $(n-1)$ -dimensionale su Γ .

La seminorma $\|u\|_{s,p}$ è certamente finita se $u \in C^1(\overline{\Omega})$. Possiamo quindi definire

Definizione 1.31. Lo spazio $H^{s,p}(\Gamma)$, ove Γ è la frontiera di un aperto limitato di classe C^1 , è la chiusura di $C^1(\overline{\Omega})$ rispetto alla norma $\|\cdot\|_{s,p} + \|\cdot\|_{L^p(\Gamma)}$.

Tutto ciò premesso possiamo enunciare un importante risultato (la cui dimostrazione è rimandata a J.L. Lions, E. Magenes [7]):

Teorema 1.32. Se Ω è un aperto limitato tale che Γ è di classe C^1 , allora si ha:

$$\gamma_0(H^{1,p}(\Omega)) = H^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma).$$

É possibile dare una nozione ancora più debole di traccia.

Definizione 1.33. Sia $p \in]1, \infty[$ e sia p' l'esponente coniugato di p ($\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$). Se Ω è un aperto di \mathbb{R}^n con frontiera Γ di classe C^1 e se $s \in]0, 1[$, lo spazio di Sobolev di indice negativo $-s$, $H^{-s,p}(\Gamma)$, è il duale dello spazio $H^{s,p'}(\Gamma)$.

Dunque $\psi \in H^{-s,p}(\Gamma)$ se e solo se esiste $C > 0$ tale che

$$|\langle \psi, u \rangle| \leq C(\|u\|_{s,p'} + \|u\|_{L^p(\Gamma)}), \text{ per ogni } u \in H^{s,p'}(\Omega).$$

Il teorema 1.32 ha un'importante estensione:

Teorema 1.34. Sia Ω un aperto limitato di classe C^1 . Se $p \neq 2$ l'operatore di traccia $\gamma_0 : H^{1,p}(\Omega) \rightarrow H^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma)$ ha una estensione unica ad un operatore lineare, continuo e surgettivo da $L^p(\Omega)$ in $H^{-\frac{1}{p},p}(\Gamma)$.

Per la dimostrazione rimandiamo ancora una volta a J.L. Lions, E. Magenes [7].

Osservazione 1.35. Da questo teorema segue in particolare che se $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in H^{1,p}(\Omega)$ allora l'integrale sul bordo $\int_{\Gamma} uv dx$ è ben definito nel senso della dualità fra $H^{-\frac{1}{p},p}(\Gamma)$ e $H^{\frac{1}{p},p'}(\Gamma)$:

$$\int_{\Gamma} uv dx := \langle \gamma_0 u, \gamma_0 v \rangle_{H^{-\frac{1}{p},p}(\Gamma), H^{\frac{1}{p},p'}(\Gamma)}$$

e esiste $c > 0$ tale che valga

$$\left| \int_{\Gamma} uv dx \right| \leq \|\gamma_0 u\|_{H^{-\frac{1}{p},p}(\Gamma)} \|\gamma_0 v\|_{H^{\frac{1}{p},p'}(\Gamma)} \leq c \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{H^{1,p}(\Omega)}.$$

1.2.4 Convergenza debole

Definizione 1.36. Sia B uno spazio di Banach e sia B^* il suo duale. Data una successione $\{x_n\} \subseteq B$, dico che essa **converge debolmente** ad x ($x_n \rightharpoonup x$) se per ogni $F \in B^*$ vale

$$F(x_n) \rightarrow F(x), \text{ per } n \rightarrow \infty$$

Negli spazi di Hilbert questa definizione si traduce in termini di prodotto scalare:

Definizione 1.37. Sia $\{x_n\}$ una successione in uno spazio di Hilbert H . Diciamo che $\{x_n\}$ converge debolmente a x_0 se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (y, x_n)_H = (y, x_0)_H, \text{ per ogni } y \in H.$$

Un'interessante proprietà è:

Proposizione 1.38. Sia H uno spazio di Hilbert, sia $\{u_m\} \subseteq H$ una successione limitata. Allora esiste $\{u_{n_k}\} \subseteq \{u_m\}$ ed esiste $u \in H$ tali che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (u_{n_k}, x)_H = (u, x)_H, \text{ per ogni } x \in H.$$

Capitolo 2

Regolarità della soluzione

2.1 Soluzione in $H^{1,2}$

Andiamo a dimostrare l'esistenza e l'unicità della soluzione $u \in H^{1,2}(\Omega)$ del problema

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega, \text{ con } f \in L^2(\Omega) \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.1)$$

che chiameremo 'soluzione variazionale'.

Dobbiamo cercare un funzione $u \in H^{1,2}(\Omega)$ tale che valga

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} f \phi dx \quad (2.2)$$

per ogni $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, o osservando che $C_0^\infty(\Omega)$ è denso in $H_0^{1,2}(\Omega)$, questo equivale a dire per ogni $\phi \in H_0^{1,2}(\Omega)$. Per fare ciò utilizziamo dei risultati classici di analisi funzionale. Prima di tutto:

Teorema 2.1. (di Poincaré) *Sia $p \geq 1$, sia Ω un aperto limitato. Allora*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq (\text{diam}(\Omega)) \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \text{ per ogni } u \in H_0^{1,p}(\Omega).$$

Dimostrazione. Poichè $H^{1,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}$, possiamo supporre $u \in C_0^\infty(\Omega)$ e prolungarla a 0 fuori da Ω .

Siano $a, b \in \mathbb{R}$ e $i \in \{1, \dots, n\}$ tali che $\Omega \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid a < x_i < b\}$. Allora, fissato $x \in \Omega$, sia $\bar{x} \in \partial\Omega$ tale che $\bar{x}_j = x_j$, per ogni $j \neq i$. Si ha

$$|u(x)|^p = |u(x) - u(\bar{x})|^p = \left| \int_{\bar{x}_i}^{x_i} D_i u(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n) dt \right|^p \leq$$

(Hölder)

$$\leq |x_i - \bar{x}_i|^p \int_{\bar{x}_i}^{x_i} |D_i u(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n)|^p dt \leq$$

$$\leq (b-a)^{p-1} \int_a^b |D_i u(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n)|^p dt.$$

Integrando su Ω e ponendo $d\hat{x}_i = dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_n$,

$$\int_{\Omega} |u|^p dx \leq (b-a)^{p-1} \int_{\Omega} \int_a^b |D_i u(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n)|^p dt dx_1 \dots dx_n =$$

(essendo $u = 0$ su Ω^c)

$$= (b-a)^{p-1} \prod_{i \neq j} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_a^b \left[\int_a^b |D_i u(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n)|^p dt \right] dx_i \right) d\hat{x}_i =$$

$$= (b-a)^{p-1} \int_a^b \left[\prod_{j \neq i} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_a^b |D_i u(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n)|^p dt d\hat{x}_i \right] dx_i =$$

$$= (b-a)^p \|D_i u\|_{L^p(\Omega)} \leq (b-a)^p \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^p.$$

□

Osservazione 2.2. Si ha

$$\|u\|_{H^{1,2}(\Omega)}^2 = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

se $u \in H_0^{1,2}(\Omega)$. Notiamo però che vale, grazie al teorema di Poincaré,

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|u\|_{H^{1,2}(\Omega)}^2 = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \quad (2.3)$$

$$\leq (\text{diam}(\Omega))^2 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 = [1 + (\text{diam}(\Omega))^2] \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Ma allora possiamo affermare che $u \mapsto \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ è una norma equivalente, su $H_0^{1,2}(\Omega)$, alla norma di $H^{1,2}(\Omega)$.

Proposizione 2.3. Sia $A(u, \phi)$ l'applicazione che manda (u, ϕ) nel primo membro di (2.2) e $F(\phi)$ quella che manda ϕ nel secondo membro. Allora A è una forma bilineare continua su $H_0^{1,2}(\Omega) \times H_0^{1,2}(\Omega)$, mentre F è una funzione lineare e continua su $H_0^{1,2}(\Omega)$. Inoltre A è coerciva, cioè esiste $\alpha > 0$ tale che $A(u, u) \geq \alpha \|u\|_{H^{1,2}(\Omega)}^2$, per ogni $u \in H_0^{1,2}(\Omega)$.

Dimostrazione. La verifica della bilinearità di A e della linearità di F è immediata; vediamo la continuità di F , usando la disuguaglianza di Hölder, si ha:

$$|F(\phi)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\phi\|_{L^2(\Omega)}.$$

La forma bilineare A è continua: infatti risulta

$$|A(u, \phi)| \leq M \|u\|_{H^{1,2}(\Omega)} \|\phi\|_{H^{1,2}(\Omega)}.$$

Inoltre, ovviamente risulta:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} = |\nabla u|^2 \text{ in } \Omega,$$

e dunque, grazie all'osservazione 2.2

$$A(u, u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \geq \alpha \|u\|_{H^{1,2}(\Omega)}^2,$$

ove $\alpha = \frac{1}{1+(\text{diam}(\Omega))^2}$

□

Osserviamo che $H_0^{1,2}(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert, con il prodotto scalare

$$(u, v) = \int_{\Omega} uv dx + \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx.$$

La ricerca di un'unica soluzione di (2.2) si traduce nel seguente problema astratto: siano dati uno spazio di Hilbert H , un funzionale F lineare e continuo ed una forma bilineare $A(u, \phi)$ continua e coerciva:

$$|A(u, \phi)| \leq M \|u\|_H \|\phi\|_H \text{ per ogni } u, \phi \in H,$$

$$A(u, u) \geq \alpha \|u\|_H^2 \text{ per ogni } u \in H,$$

si deve trovare un unico elemento $u \in H$ tale che

$$A(u, \phi) = F(\phi) \text{ per ogni } \phi \in H.$$

Se la forma bilineare A è simmetrica (come nel nostro caso $A = \Delta$) ci basta applicare il teorema di Riesz (di cui omettiamo la dimostrazione):

Teorema 2.4. (di Riesz) Sia H uno spazio di Hilbert. Per ogni $F \in H^*$ esiste un unico $z \in H$ tale che

$$F(x) = (x, z)_H \text{ per ogni } x \in H$$

e anche

$$\|F\|_{H^*} = \sup_{v \neq 0} \frac{|F(v)|}{\|v\|_H} = \|z\|_H.$$

Quindi possiamo enunciare e dimostrare il seguente risultato:

Teorema 2.5. Siano H uno spazio di Hilbert reale, $F \in H^*$ ed $A : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineare continua, coerciva e simmetrica. Allora esiste un unico $u \in H$ tale che

$$F(\phi) = A(u, \phi) \text{ per ogni } \phi \in H$$

e

$$\|u\|_H \leq \frac{1}{\alpha} \|F\|_{H^*}.$$

Dimostrazione. La forma bilineare $A(u, v)$ definisce in H un prodotto scalare e una norma

$$\|u\| = \sqrt{A(u, u)}$$

equivalente a quella di partenza:

$$\alpha \|u\|_H^2 \leq \|u\|^2 \leq M \|u\|_H^2.$$

Se si dota H di tale prodotto scalare, F è ancora continuo: per ipotesi $F \in H^*$ e quindi si ha $|F(\phi)| \leq \|F\|_{H^*} \|\phi\|_H$; grazie alla coercività di A si deduce $\|\phi\|_H \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \|\phi\|$ e quindi $|F(\phi)| \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \|F\|_{H^*} \|\phi\|$, inoltre

$$\|F\|_* = \sup_{v \neq 0} \frac{|F(v)|}{\|v\|} \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \|F\|_{H^*}.$$

La tesi segue dal teorema di Riesz:

$$\|u\|_H \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \|F\| = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \|F\|_* \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \|F\|_{H^*}.$$

□

Il tutto applicato al nostro caso ci porta al teorema:

Teorema 2.6. *Il problema*

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega, \text{ con } f \in L^2(\Omega) \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

con Ω aperto e limitato di \mathbb{R}^n , ha un'unica soluzione $u \in H_0^{1,2}(\Omega)$ e si ha

$$\|u\|_{H^{1,2}(\Omega)} \leq [1 + (\text{diam}(\Omega))^2] \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

Per completezza diciamo che se la forma bilineare A non è simmetrica, cosa che accade quando si ha a che fare con operatori ellittici diversi da Δ , dobbiamo sfruttare il teorema di Lax-Milgram (di cui non riportiamo la dimostrazione)

Teorema 2.7. *(di Lax-Milgram)* Sia H uno spazio di Hilbert reale, sia $F \in H^*$ un funzionale lineare e continuo ed $A : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineare continua e coerciva. Allora esiste un unico $u \in H$ tale che

$$F(\phi) = A(u, \phi) \text{ per ogni } \phi \in H$$

e

$$\|u\|_H \leq \frac{1}{\alpha} \|F\|_{H^*}.$$

2.2 Soluzione in $H^{2,2}$

Stabilito l'importante teorema 2.6, che garantisce l'esistenza e l'unicità in $H^{1,2}(\Omega)$ della soluzione variazionale, vorremmo di più e cioè che la soluzione del problema (2.1) sia tale che $u \in H^{2,2}(\Omega)$.

Procederemo per passi successivi. Innanzitutto analizzeremo il caso in cui Ω sia un aperto di classe C^2 .

Poi passeremo al caso di aperti di \mathbb{R}^2 con bordo poligonale. Se il poligono è convesso, vedremo che la soluzione variazionale sta in $H^{2,2}(\Omega)$.

Infine arriveremo al teorema portante di questa tesi, che mostrerà che nel caso di un poligono non convesso, la soluzione variazionale u del problema (2.1) non è in $H^{2,2}(\Omega)$, ma che tuttavia una soluzione in tale spazio esiste unica ed è data da $u - \sum c_j S_j$, dove le S_j saranno opportune funzioni 'singolari' associate a ciascuno degli angoli non convessi del poligono.

2.2.1 Ω con bordo C^2

Cominciamo ad affrontare il problema (2.1) nel caso di un aperto Ω di classe C^2 .

Teorema 2.8. *Se Ω è di classe C^2 , allora la soluzione unica $u \in H_0^{1,2}(\Omega)$ del problema (2.1) è tale che $u \in H^{2,2}(\Omega)$ e vale*

$$\|u\|_{H^{2,2}(\Omega)} \leq c \|f\|_{L^2(\Omega)} \text{ con } c = c(\text{diam}(\Omega)).$$

Dimostrazione. La dimostrazione di questo teorema sarà illustrata più avanti, dopo quella del teorema 2.14. Il motivo è che in entrambi si utilizza la tecnica dei rapporti incrementali, la quale nel caso del teorema 2.14 risulta meno complicata e verrà sviluppata per intero. \square

2.2.2 Ω convesso

Teorema 2.9. *Sia Ω aperto limitato e convesso. Per ogni funzione $f \in L^2(\Omega)$ esiste ed è unica $u \in H^{2,2}(\Omega)$ soluzione del problema 2.1.*

Dimostrazione. Per iniziare utilizzeremo un lemma geometrico:

Lemma 2.10. *Se Ω è un aperto limitato e convesso, per ogni $\epsilon > 0$ esiste un aperto $\Omega' \subset \Omega$, con $\partial\Omega'$ di classe C^2 , tale che*

$$d(x, \partial\Omega') < \epsilon \text{ per ogni } x \in \partial\Omega.$$

Dimostrazione del lemma. Lasciata all'intuizione. \square

Sia allora, per ogni $m \in \mathbb{N}^+$, Ω_m aperto di classe C^2 , contenuto in Ω , tale che $d(x, \partial\Omega_m) < \frac{1}{m}$ per ogni $x \in \partial\Omega$. Sia $u_m \in H^{2,2}(\Omega)$ l'unica soluzione di

$$\begin{cases} \Delta u_m = f & \text{in } \Omega_m, \text{ con } f \in L^2(\Omega) \\ u_m = 0 & \text{su } \partial\Omega_m \end{cases}$$

Tale u_m esiste (teorema 2.8) e verifica

$$\|u_m\|_{H^2(\Omega_m)} \leq c\|f\|_{L^2(\Omega_m)} \leq c\|f\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall m \in \mathbb{N}^+,$$

dove c è una costante dipendente da $\text{diam}(\Omega_m) \leq \text{diam}(\Omega)$, quindi indipendente da m .

Perciò $\{u_m\}$ è limitata in $H^{2,2}(\Omega)$; siccome $u_m \in H_0^{1,2}(\Omega_m)$, il suo prolungamento a 0 fuori di Ω_m sta in $H^{1,2}(\mathbb{R}^n)$.

Allora passando a sottosuccessioni si ha, essendo l'inclusione $H^{1,2} \hookrightarrow L^2$ compatta:

$$\begin{aligned} u_m &\rightharpoonup U, \text{ in } L^2(\mathbb{R}^n) \\ Du_m &\rightharpoonup DU, \text{ in } L^2(\mathbb{R}^n) \\ D_i D_j u_m &\rightharpoonup v_{ij}, \text{ in } L^2(\mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

(convergenza debole garantita dalla proposizione 1.38).

Sia allora $u = U|_{\Omega}$ (che sta in $H_0^{1,2}(\Omega)$ perché è limite delle u_m che sono nulle in $\partial\Omega$) e proviamo che u risolve il problema. Se $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, si ha $\phi \in C_0^\infty(\Omega_m)$ per m grande; quindi

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f\phi dx &= \int_{\Omega_m} \Delta u_m \phi dx = - \int_{\Omega_m} (\nabla u_m, \nabla \phi) dx = \\ &= - \int_{\Omega} (\nabla u_m, \nabla \phi) dx \rightarrow - \int_{\Omega} (\nabla u, \nabla \phi) dx, \end{aligned}$$

quindi $u \in H_0^{1,2}(\Omega)$ e $\Delta u = f$ in Ω . Ma $u \in H^{2,2}(\Omega)$ perché:

$$\int_{\Omega} u D_i D_j \phi dx = \lim_m \int_{\Omega} u_m D_i D_j \phi dx = \lim_m \int_{\Omega} D_i D_j u_m \phi dx = \int_{\Omega} v_{ij} \phi dx,$$

dunque u ha derivata debole $D_i D_j u = v_{ij} \in L^2(\mathbb{R}^2) \subseteq L^2(\Omega)$. \square

Osservazione 2.11. Il teorema 2.9 vale in particolare quando Ω è un poligono convesso.

2.2.3 Ω poligono non convesso

Iniziamo con due lemmi preliminari.

Lemma 2.12. *Siano A, B, C aperti con $A \subset\subset B \subset\subset C$. Sia $u : C \rightarrow \mathbb{R}$ misurabile. Poniamo $\tau_{i,h}(u)(x) = \frac{u(x+he^i) - u(x)}{h}$, $x \in B$, $i \in \{1, \dots, n\}$, $h \in (0, \text{dist}(\bar{B}, C^c))$. Se*

$$\|\tau_{i,h}(u)\|_{L^2(B)} \leq K,$$

per $i = 1, \dots, n$ e $0 < |h| < \text{dist}(\bar{B}, C^c)$, allora $u \in H^{1,2}(A)$ e

$$\left(\int_A |D_i u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq K,$$

per $i = 1, \dots, n$.

Dimostrazione. Sia $\{h_n\} \subseteq (0, \text{dist}(\bar{B}, C^c))$ una successione infinitesima. Poiché $\|\tau_{i,h_n}(u)\|_{L^2(B)} \leq K$ esiste una sottosuccessione, che chiamiamo ancora $\{h_n\}$, tale che

$$\tau_{i,h_n}(u) \rightharpoonup v \in L^2(B)$$

da cui

$$\int_B \tau_{i,h_n}(u) g dx \rightarrow \int_B v g dx, \text{ per ogni } g \in L^2(B).$$

In particolare

$$\int_B \tau_{i,h_n}(u) \phi dx \rightarrow \int_B v \phi dx, \text{ per ogni } \phi \in C_0^\infty(B).$$

D'altra parte, essendo $\phi \in C_0^\infty(B)$, per $|h|$ sufficientemente piccolo si ha:

$$\begin{aligned} \int_B \tau_{i,h_n}(u) \phi dx &= \int_B \frac{u(x + h e^i) - u(x)}{h} \phi dx = \\ &= \int_B u(y) \frac{\phi(y - h e^i) - \phi(y)}{h} dy = - \int_B u(y) \tau_{i,(-h_n)}(\phi) dy \rightarrow - \int_B u D_i \phi dx. \end{aligned}$$

Perciò

$$- \int_B u D_i \phi dx = \int_B v \phi dx, \text{ per ogni } \phi \in C_0^\infty(\Omega)$$

dunque esiste $D_i u \in L^p$ e $D_i u = -v$. Inoltre per il lemma di Fatou

$$\|D_i u\|_{L^p(\Omega)}^p \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|\tau_{i,h_n}(u)\|_{L^p(\Omega)}^p \leq K^p$$

□

Lemma 2.13. *Siano A, B due aperti tali che $A \subset\subset B$. Sia $0 < |h| < \text{dist}(A, \bar{B}^c)$. Se $u \in H^{1,2}(B)$, allora*

$$\|\tau_{i,h}(u)\|_{L^2(A)} \leq \|Du\|_{L^2(B)}.$$

Dimostrazione. Ricopriamo A con R_1, \dots, R_p rettangoli adiacenti, tutti contenuti in B . Consideriamo uno di essi, $R = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$. Si ha:

$$\begin{aligned} \int_{a_i}^{b_i} |\tau_{i,h}(u)|^2 dx_i &= \frac{1}{h^2} \int_{a_i}^{b_i} \left[\int_{x_i}^{x_i+h} D_i u(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n) dt \right]^2 dx_i \leq \\ &\leq \frac{1}{h^2} \int_{a_i}^{b_i} \left(\int_{x_i}^{x_i+h} |D_i u(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n)|^2 dt h \right)^2 h dx_i = \end{aligned}$$

(ponendo $y = t - x_i$, con x_i fissato)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{h} \int_{a_i}^{b_i} \left(\int_0^h |D_i u(x_1, \dots, x_{i-1}, y + x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)|^2 dy \right)^2 dx_i = \\ &= \frac{1}{h} \int_0^h \int_{a_i}^{b_i} |D_i u(x_1, \dots, x_{i-1}, y + x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)|^2 dx_i dy = \end{aligned}$$

(sostituendo $t = y + x_i$, con y fissato)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{h} \int_0^h \int_{a_i}^{b_i} |D_i u(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n)|^2 dt dy \leq \\ &\leq \frac{1}{h} \int_0^h \|D_i u\|_{L^2(a_i, b_i)}^2 dy = \|D_i u\|_{L^2(a_i, b_i)}^2. \end{aligned}$$

Integrando, poi nelle altre variabili, otteniamo la tesi. \square

Nel caso di un poligono non necessariamente convesso il teorema 2.9 vale nella seguente forma più debole:

Teorema 2.14. *Sia Ω un aperto limitato di \mathbb{R}^2 , con bordo poligonale di vertici V_1, \dots, V_m ; siano $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$ i lati di $\partial\Omega$ e siano $\omega_1, \dots, \omega_m \in]0, 2\pi[$ gli angoli compresi. Sia δ sufficientemente piccolo in modo tale che $B(V_i, \delta)$ intersechi solo Γ_i e Γ_{i+1} . Sia $V = \bigcup_{i=1}^m B(V_i, \delta)$. Allora se $u \in H^{1,2}(\Omega)$ è la soluzione del problema*

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega, \text{ con } f \in L^2(\Omega) \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

si ha $u \in H^{2,2}(\Omega \setminus \bar{V})$.

Dimostrazione. In questa dimostrazione faremo uso della tecnica dei rapporti incrementali. Per dimostrare la tesi basta provare che:

- (a) se B_r è un disco, tale che $B_r \subset\subset \Omega \setminus \bar{V}$, allora $u \in H^{2,2}(B_r)$
- (b) se Σ_r è un semidisco centrato in un punto di $\partial\Omega$, tale che $\Sigma_r \subseteq \overline{\Omega \setminus \bar{V}}$, allora $u \in H^{2,2}(\Sigma_r)$.

(a) Sia B_R tale che $B_r \subset\subset B_R \subset\subset \Omega \setminus \bar{V}$. Sia $\rho \in (r, R)$ e sia $\theta \in C_0^\infty(\Omega)$, con $0 \leq \theta \leq 1$, e tale che $\theta = 1$ su B_r e $\theta = 0$ su B_ρ^c . Consideriamo $\tau_{i,h}(\theta u)$ su B_R . Poiché u risolve

$$-\int_{B_R} (\nabla u, \nabla \phi) dx = \int_{B_R} f \phi dx \text{ per ogni } \phi \in H_0^{1,2}(B_R)$$

si ha allora:

$$\begin{aligned} & \left| \int_{B_R} (\nabla \tau_{i,h}(\theta u), \nabla \phi) dx \right| \leq \\ & \leq \left| \int_{B_R} [(\nabla \tau_{i,h}(\theta u), \nabla \phi) + (\nabla(\theta u), \nabla \tau_{i,-h}(\phi))] dx \right| + \\ & + \left| \int_{B_R} [(\nabla(\theta u), \nabla \tau_{i,-h}(\phi)) - (\nabla u, \nabla(\theta \tau_{i,-h}(\phi)))] dx \right| + \\ & + \left| \int_{B_R} (\nabla u, \nabla(\theta \tau_{i,-h}(\phi))) dx \right| = \\ & = I + II + III \end{aligned}$$

Dobbiamo quindi studiare I, II, III .

Iniziamo con III . Poiché $\theta \tau_{i,-h}(\phi) \in H_0^{1,2}(B_r)$, dal lemma 2.13 segue

$$\begin{aligned} III &= \left| \int_{B_R} f \theta \tau_{i,h}(\phi) dx \right| \leq \|f\|_{L^2(B_R)} \|\theta \tau_{i,h}(\phi)\|_{L^2(B_r)} \leq \\ & \leq c \|f\|_{L^2(B_R)} \|\nabla \phi\|_{L^2(B_R)}. \end{aligned}$$

Poi,

$$\begin{aligned} II &= \left| \int_{B_R} \sum_{j=1}^2 [D_j(\theta u) D_j \tau_{i,-h}(\phi) - D_j u D_j(\theta \tau_{i,-h}(\phi))] dx dy \right| = \\ &= \left| \int_{B_R} \sum_{j=1}^2 [(u D_j \theta + \theta D_j u) D_j \tau_{i,-h}(\phi) - D_j u (D_j \theta \tau_{i,-h}(\phi) + \theta D_j \tau_{i,-h}(\phi))] dx dy \right| = \\ & \quad \text{(integrando per parti il primissimo addendo e ricordando che } \theta \text{ e } \nabla \theta \text{ sono} \\ & \quad \text{nulli su } \partial B_R) \\ &= \left| \int_{\partial B_R} \sum_{j=1}^2 [(u D_j \theta + \theta D_j u) D_j \tau_{i,-h}(\phi) - D_j u (D_j \theta \tau_{i,-h}(\phi) + \theta D_j \tau_{i,-h}(\phi))] dx dy \right| = \\ &= \int_{B_R} \sum_{j=1}^2 [-(D_j u D_j \theta + u D_j^2 \theta) \tau_{i,-h}(\phi) + \theta D_j u D_j \tau_{i,-h}(\phi) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -D_j u D_j \theta \tau_{i,-h}(\phi) - \theta D_j u D_j \tau_{i,-h}(\phi) \Big] dx dy = \\
& = \int_{B_\rho} [-2(\nabla u, \nabla \theta) \tau_{i,-h}(\phi) - u \Delta \theta \tau_{i,-h}(\phi)] dx dy \leq \\
& \leq c(R, \rho) \left[\|\nabla u\|_{L^2(B_\rho)} \|\tau_{i,-h}(\phi)\|_{L^2(B_\rho)} + \|u\|_{L^2(B_\rho)} \|\tau_{i,-h}(\phi)\|_{L^2(B_\rho)} \right] \leq \\
& \leq c(R, \rho) \|u\|_{H^{1,2}(B_R)} \|\nabla \phi\|_{L^2(B_R)}.
\end{aligned}$$

Infine

$$\begin{aligned}
I & = \left| \int_{B_R} \sum_{j=1}^2 [D_j \tau_{i,h}(\theta u) D_j \phi + D_j(\theta u) D_j \tau_{i,-h}(\phi)] dx \right| = \\
& = \left| \int_{B_R} \sum_{j=1}^2 [D_j \tau_{i,h}(\theta u) D_j \phi + D_j(\theta u) \tau_{i,-h}(D_j \phi)] dx \right| = \\
& = \left| \int_{B_R} \sum_{j=1}^2 [D_j \tau_{i,h}(\theta u) D_j \phi - D_j \tau_{i,h}(\theta u) D_j \phi] dx \right| = 0
\end{aligned}$$

Dunque

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{B_R} (\nabla \tau_{i,h}(\theta u), \nabla \phi) dx \right| \leq \\
& \leq c(R, \rho) [\|u\|_{H^{1,2}(B_R)} + \|f\|_{L^2(B_R)}] \|\nabla \phi\|_{L^2(B_R)}.
\end{aligned}$$

D'altra parte, scelto $\phi = \tau_{i,h}(\theta u) \in H_0^{1,2}(B_R)$, per h sufficientemente piccolo,

$$\begin{aligned}
& \|\nabla \tau_{i,h}(\theta u)\|_{L^2(B_R)}^2 = \left| \int_{B_R} (\nabla \tau_{i,h}(\theta u), \nabla \tau_{i,h}(\theta u)) dx \right| \leq \\
& \leq c(R, \rho) [\|u\|_{H^{1,2}(B_R)} + \|f\|_{L^2(B_R)}] \|\nabla \tau_{i,h}(\theta u)\|_{L^2(B_R)}
\end{aligned}$$

e quindi

$$\|\nabla \tau_{i,h}(\theta u)\|_{L^2(B_R)} \leq c(R, \rho) [\|u\|_{H^{1,2}(B_R)} + \|f\|_{L^2(B_R)}],$$

ovvero

$$\|\tau_{i,h} \nabla(\theta u)\|_{L^2(B_R)} \leq c(R, \rho) [\|u\|_{H^{1,2}(B_R)} + \|f\|_{L^2(B_R)}].$$

A questo punto il lemma 2.12 ci dice che $\theta u \in H^{2,2}(B_\rho)$ e

$$\|\nabla^2(\theta u)\|_{L^2(B_\rho)} \leq c(R, \rho) [\|u\|_{H^{1,2}(B_R)} + \|f\|_{L^2(B_R)}]$$

e poiché $\theta = 1$ su B_r ,

$$\|\nabla^2 u\|_{L^2(B_r)} \leq c(R, \rho) \left[\|u\|_{L^2(B_R)} + \|f\|_{H^{1,2}(B_R)} \right].$$

Ciò prova (a).

(b) Sia Σ_R tale che $\Sigma_r \subset \Sigma_R \subset \overline{\Omega \setminus \bar{V}}$. Fissiamo $\rho \in (r, R)$. Con una rototraslazione, possiamo supporre che la parte piatta di Σ_R sia lungo l'asse x e che il centro sia in 0. Come in (a), si può stimare $\tau_{1,h}(\theta u)$, poiché l'incremento è tangente all'asse x . Essendo $u = 0$ su $\{y = 0\} \cap \Sigma_R$, vale $\theta u \in H_0^{1,2}(\Sigma_R)$ e quindi si ripete tutto, trovando

$$\|D_1 \nabla u\|_{L^2(\Sigma_r)} \leq c \left[\|u\|_{H^{1,2}(\Sigma_R)} + \|f\|_{L^2(\Sigma_R)} \right].$$

Rimane da stimare $\|D_2^2 u\|_{L^2(\Sigma_r)}$. Vale

$$- \int_{\Sigma_R} D_2 u D_2 \phi dx = \int_{\Sigma_R} [f \phi + D_1 u D_1 \phi] dx \text{ per ogni } \phi \in H_0^{1,2}(\Sigma_R).$$

In particolare per ogni $\phi \in H_0^{1,2}(\Sigma_\rho)$ vale, integrando per parti l'ultimo termine

$$- \int_{\Sigma_\rho} D_2 u D_2 \phi dx = \int_{\Sigma_\rho} [f - D_1^2 u] \phi dx.$$

Per definizione di derivata debole, esiste $D_2^2 u = f - D_1^2 u \in L^2(\Sigma_\rho)$, in particolare

$$\begin{aligned} \|D_2^2 u\|_{L^2(\Sigma_\rho)} &\leq \|f\|_{L^2(\Sigma_\rho)} + \|D_1^2 u\|_{L^2(\Sigma_\rho)} \leq \\ &\leq c \left[\|u\|_{H^{1,2}(\Sigma_R)} + \|f\|_{L^2(\Sigma_R)} \right]. \end{aligned}$$

Ciò prova che

$$\|\nabla^2 u\|_{L^2(\Sigma_\rho)} \leq c \left[\|u\|_{H^{1,2}(\Sigma_R)} + \|f\|_{L^2(\Sigma_R)} \right].$$

□

Per capire meglio cosa accade intorno agli spigoli di un poligono non convesso, ci sarà utile il seguente

Teorema 2.15. *Sia Ω un aperto limitato di \mathbb{R}^2 , con bordo Γ dato da un poligono. Supponiamo che 0 sia un vertice di Γ . Sia V un intorno di 0 tale che*

$$V \cap \bar{\Omega} \subseteq \{(r \cos \theta, r \sin \theta) \mid 0 \leq r \leq h, 0 \leq \theta \leq \omega\}$$

con $0 < \omega < 2\pi$. Prendiamo inoltre una funzione v che sia liscia in $\bar{\Omega} \setminus \{0\}$ e che coincida con $r^\alpha \phi(\theta)$ in $V \cap \bar{\Omega}$, dove $\phi \in C^\infty([0, b])$, ove α è un numero reale. Allora si ha:

$$\begin{cases} v \in H^{s,p}(\Omega) & \text{se } \alpha > s - \frac{2}{p} \\ v \notin H^{s,p}(\Omega) & \text{se } \alpha \leq s - \frac{2}{p} \end{cases}$$

Questo è il teorema generale, per i nostri scopi ci interessa dimostrare solo il caso in cui $s = 1$, $p = 2$. Quindi andiamo a provare che $v \in H^{1,2}(\Omega)$ se $\alpha > 0$.

Dimostrazione. Poniamo $u(r, \theta) = v(r \cos \theta, r \sin \theta)$. Per ipotesi risulta $u(r, \theta) = r^\alpha \phi(\theta)$ in $V \cap \bar{\Omega}$. Ovviamente si ha, per la regola di derivazione di funzioni composte:

$$\begin{aligned} u_r &= v_x \cos \theta + v_y \sin \theta \\ u_\theta &= -v_x r \sin \theta + v_y r \cos \theta. \end{aligned}$$

Osserviamo che $(ru_r)^2 + u_\theta^2 = r^2(v_x^2 + v_y^2)$, quindi $|\nabla v|^2 = \frac{1}{r^2}(r^2u_r^2 + u_\theta^2) = u_r^2 + \frac{1}{r^2}u_\theta^2$.

Nel nostro caso $u(r, \theta) = r^\alpha \phi(\theta)$, si ha che

$$\begin{aligned} u_r &= \alpha r^{\alpha-1} \phi(\theta) \\ u_\theta &= r^\alpha \phi'(\theta). \end{aligned}$$

Quindi vale $u_r^2 + \frac{1}{r^2}u_\theta^2 = r^{2\alpha-2}[\alpha^2(\phi(\theta))^2 + (\phi'(\theta))^2]$. Ponendo per semplicità $\Sigma = V \cap \bar{\Omega}$, si ottiene

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} |\nabla v|^2 dx dy &= \int_0^h \int_0^\omega r^{2\alpha-2} r dr [\alpha^2(\phi(\theta))^2 + (\phi'(\theta))^2] d\theta = \\ &= \int_0^h r^{2\alpha-1} dr \int_0^\omega [\alpha^2(\phi(\theta))^2 + (\phi'(\theta))^2] d\theta. \end{aligned}$$

Poiché ϕ è regolare, questa è chiaramente una quantità finita se e solo se $2\alpha - 1 > -1$, cioè se e solo se $\alpha > 0$. Sappiamo che se $A \subset B$ allora $W^{k,p}(B) \subset W^{k,p}(A)$, nel nostro caso $A = \Sigma$ e $B = \Omega$. Si ha quindi la tesi. \square

Ci occorre ora un risultato di analisi funzionale.

Teorema 2.16. *Siano E, X spazi di Banach con $E \hookrightarrow X$ e inclusione compatta. Sia $A \in L(E, X)$ tale che esista $c > 0$ per cui vale*

$$\|x\|_E \leq [\|Ax\|_X + \|x\|_X].$$

Allora A ha nucleo finito-dimensionale e immagine chiusa.

Dimostrazione. Utilizziamo il seguente lemma:

Lemma 2.17. *Sia E uno spazio di Banach, sia M un sottospazio chiuso di E , con $M \neq E$. Allora per ogni $\epsilon > 0$ esiste $x_\epsilon \in E \setminus M$ tale che*

$$\|x_\epsilon\|_E = 1, \quad \|x - x_\epsilon\|_E > 1 - \epsilon, \quad \text{per ogni } x \in M.$$

Osservazione 2.18. Se E è uno spazio di Hilbert si può prendere $x_0 \in M^\perp$, con $\|x_0\|_E = 1$ e si trova $\|x - x_0\|_E \geq 1$ per ogni $x \in M$.

Dimostrazione del lemma. Esiste $y \notin M$. Detta $d = \text{dist}(y, M) > 0$, esiste $\bar{x} \in M$ tale che $\|y - \bar{x}\|_E > \frac{d}{1-\epsilon}$.

Allora posto $x_\epsilon = \frac{y - \bar{x}}{\|y - \bar{x}\|_E}$, si ha $\|x_\epsilon\|_E = 1$ e per ogni $x \in M$ risulta

$$\|y - x_\epsilon\|_E = \left\| x - \frac{y - \bar{x}}{\|y - \bar{x}\|_E} \right\|_E = \frac{\|x - \|y - \bar{x}\|_E + \bar{x} - y\|_E}{\|y - \bar{x}\|_E} \geq \frac{d}{\frac{d}{1-\epsilon}} = 1 - \epsilon$$

in quanto $x\|y - \bar{x}\|_E + \bar{x} \in M$. \square

Ciò premesso, proviamo che $\dim \ker A < \infty$. Se fosse $\dim \ker A = \infty$, utilizzando il lemma 2.17 potremmo costruire induttivamente

$$x_1 \in \ker A, \|x_1\|_E = 1$$

$$x_2 \in \ker A, \|x_2 - x_1\|_E > \frac{1}{2}, \|x_1\|_E = 1$$

$$x_{n+1} \in \ker A, \|x_{n+1} - x_j\|_E > \frac{1}{2} \forall j = 1, \dots, n, \|x_{n+1}\|_E = 1.$$

La successione $\{x_n\}$ è limitata, dunque compatta in X . Quindi esiste $\{x_{n_k}\} \subseteq \{x_n\}$ tale che $x_{n_k} \rightarrow x$ in X . La stima valida per ipotesi, applicata a $x_{n_k} - x_{n_h} \in \ker A$, ci dice $\{x_{n_k}\}$ è di Cauchy in E , ma questo è assurdo perché per costruzione $\|x_{n_k} - x_{n_h}\|_E > \frac{1}{2}$ per $k > h$.

Dunque proviamo che $R(A)$ è chiuso. Sia $\{y_n\} \subseteq R(A)$ tale che $y_n \rightarrow y$ in X . Dobbiamo mostrare che $y \in R(A)$. Se $y = 0$ ciò è banale perché $y = 0 = A(0)$. Sia dunque $y \neq 0$. Esiste $\{x_n\} \subseteq E$ tale che $y_n = Ax_n$.

Se $\{x_n\}$ è limitata, allora esiste $\{x_{n_k}\} \subseteq \{x_n\}$ tale che $x_{n_k} \rightarrow x$ in X , quindi per la stima $\{x_{n_k}\}$ è di Cauchy in E e pertanto $x_{n_k} \rightarrow x$ in E , da cui $y_n = Ax_n \rightarrow Ax$. Perciò $y = Ax \in R(A)$.

Se $\{x_n\}$ non è limitata, allora esiste $\{x_{n_k}\} \subseteq \{x_n\}$ tale che $\|x_{n_k}\|_E \rightarrow \infty$. Poiché $Ax_{n_k} \rightarrow y \neq 0$, definitivamente $x_{n_k} \notin \ker A$. Posto $d_k = d(x_{n_k}, \ker A)$, sia $z_k \in \ker A$ tale che

$$d_k \leq \|x_{n_k} - z_k\|_E < 2d_k.$$

Sia $\xi_k = x_{n_k} - z_k$; allora $A\xi_k = Ax_{n_k} = y_{n_k} \rightarrow y$. La successione $\{\xi_k\}$ è limitata, infatti in caso contrario avremmo (per una sottosuccessione che continuiamo a chiamare $\{\xi_k\}$) $\|\xi_k\|_E \rightarrow \infty$, quindi $\frac{A\xi_k}{\|\xi_k\|_E} \rightarrow 0$, e $\frac{\xi_k}{\|\xi_k\|_E} \rightarrow z$ in X , da cui $Az = 0$ e $\frac{\xi_k}{\|\xi_k\|_E} \rightarrow z$ in E . Scelto $k \geq k_\epsilon$ in modo che

$$\left\| \frac{\xi_k}{\|\xi_k\|_E} - z \right\|_E < \frac{1}{3},$$

si troverebbe

$$\frac{1}{3} > \left\| \frac{\xi_k}{\|\xi_k\|_E} - z \right\|_E = \frac{\|\xi_k - z\|\|\xi_k\|_E}{\|\xi_k\|_E} = \frac{\|x_{n_k} - z_k + z\|\|\xi_k\|_E}{\|\xi_k\|_E} \geq \frac{d_k}{2d_k} = \frac{1}{2},$$

il che è assurdo. Dunque $\{\xi_n\}$ è limitata. Ma allora l'argomento già fatto dice che $\xi_k \rightarrow z$ in X , quindi $\xi_k \rightarrow z$ in E , quindi $A\xi_k \rightarrow Az = y \in R(A)$. \square

Noi applicheremo questo risultato ad $A = \Delta$ considerato come un operatore da $E = \{u \in H^{2,2}(\Omega) \mid u = 0 \text{ su } \Gamma\}$ a $X = L^2(\Omega)$. Il teorema, a patto di verificarne le ipotesi, mostra che lo spazio delle soluzioni $u \in H^{2,2}(\Omega)$ del nostro problema con $f = 0$ è finito-dimensionale; inoltre il sottospazio di tutte le $f \in L^2(\Omega)$, per le quali il problema ammette una soluzione $u \in H^{2,2}(\Omega)$, è chiuso in $L^2(\Omega)$. Che le ipotesi del teorema 2.16 siano verificate è garantito dal seguente importante risultato:

Teorema 2.19. *Sia $u \in H^{2,2}(\Omega)$ tale che $u = 0$ su Γ , ove Ω è un poligono e $\Gamma = \partial\Omega$. Allora esiste $c > 0$ indipendente da u , tale che*

$$\|u\|_{H^{2,2}(\Omega)} \leq c \left[\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \right].$$

Dimostrazione. Indichiamo con Γ_j , $1 \leq j \leq N$, i lati del poligono Γ e con V_j i vertici, intendendo che V_{j-1} e V_j sono i vertici di Γ_j e $V_0 = V_N$. Ci servono due lemmi:

Lemma 2.20. *Sia $z \in H^{2,2}(\Omega)$ con $z = 0$ su Γ_j . Allora*

$$\nabla z \cdot \tau_i = 0 \text{ su } \Gamma_j,$$

ove τ_i è il versore tangente a Γ_j .

Dimostrazione del lemma. È sufficiente fare la derivata direzionale di z rispetto a τ_i . \square

Lemma 2.21. *Poniamo per $s = 1, 2$*

$$G^s(\Omega) = \{(v, w) \in H^{s,2}(\Omega) \times H^{s,2}(\Omega) \mid v\tau_{1i} + w\tau_{2i} = 0 \text{ su } \Gamma_i, 1 \leq i \leq N\},$$

ove τ_i è il versore tangente a Γ_i . Allora vale

$$\int_{\Omega} D_x v D_y w \, dx dy = \int_{\Omega} D_y v D_x w \, dx dy \text{ per ogni } (v, w) \in G^1(\Omega).$$

Dimostrazione del lemma. Supponiamo dapprima $(v, w) \in G^2(\Omega)$. Allora

$$\int_{\Omega} D_x v D_y w \, dx dy = \int_{\Gamma} D_x(v D_y w) d\sigma - \int_{\Omega} v D_x D_y w \, dx dy$$

e

$$\int_{\Omega} D_y v D_x w \, dx dy = \int_{\Gamma} D_y(v D_x w) d\sigma - \int_{\Omega} v D_y D_x w \, dx dy.$$

Per provare la tesi basta dunque far vedere che

$$\int_{\Gamma} [D_x(v D_y w) - D_y(v D_x w)] d\sigma = 0.$$

Ma, detto $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ il versore normale esterno a Γ ,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} [D_x(v D_y w) - D_y(v D_x w)] d\sigma &= \int_{\Gamma} v(D_y w \nu_1 - D_x w \nu_2) d\sigma = \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{\Gamma_i} v(D_y w \nu_{1i} - D_x w \nu_{2i}) d\sigma = \end{aligned}$$

(poiché $\tau_{1i} = -\nu_{2i}$ e $\tau_{2i} = \nu_{1i}$)

$$= \sum_{i=1}^N \int_{\Gamma_i} v(D_y w \tau_{2i} + D_x w \tau_{1i}) d\sigma = \sum_{i=1}^N \int_{\Gamma_i} v(\nabla w \cdot \tau_i) d\sigma.$$

Ora notiamo che, per ipotesi,

$$\tau_{1i}v(x) + \tau_{2i}w(x) = 0, \quad x \in \Gamma_i,$$

e in particolare

$$\begin{cases} \tau_{1i}v(V_i) + \tau_{2i}w(V_i) = 0 \\ \tau_{1(i+1)}v(V_i) + \tau_{2(i+1)}w(V_i) = 0 \end{cases}$$

e poiché $\det \begin{pmatrix} \tau_{1i} & \tau_{2i} \\ \tau_{1(i+1)} & \tau_{2(i+1)} \end{pmatrix} \neq 0$, ciò implica che $v(V_i) = w(V_i) = 0$ per $i = 1, \dots, N$.

Ciò premesso, su Γ_i si ha

$$\begin{cases} v = 0 \text{ se } \tau_{2i} = 0 \\ w = -\frac{\tau_{1i}}{\tau_{2i}}v \text{ se } \tau_{2i} \neq 0 \end{cases}$$

da cui nel secondo caso

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_i} v(\nabla w \cdot \tau_i) d\sigma &= -\frac{\tau_{1i}}{\tau_{2i}} \int_{\Gamma_i} v(\nabla v \cdot \tau_i) d\sigma = \\ &= \frac{\tau_{1i}}{\tau_{2i}} \left(\frac{1}{2} |v(V_i)|^2 - \frac{1}{2} |v(V_{i-1})|^2 \right) = 0 \end{aligned}$$

ed anche nel primo caso, poiché $v = 0$ su Γ_i .

Ciò prova il lemma per $(v, w) \in G^2(\Omega)$.

Poiché però la tesi non dipende dalle norme $H^{2,2}(\Omega)$, ma solo dalle norme $H^{1,2}(\Omega)$ di (v, w) , un argomento standard di densità permette di estendere il risultato alle $(v, w) \in G^1(\Omega)$. Per maggiori dettagli si veda P. Grisvard [5], lemma 4.3.1.3. \square

Proviamo ora il teorema. Sia $u \in H^{2,2}(\Omega)$, allora

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx dy &= \int_{\Omega} |D_x^2 u + D_y^2 u|^2 dx dy = \\ &= \int_{\Omega} |D_x^2 u|^2 dx dy + \int_{\Omega} |D_y^2 u|^2 dx dy + 2 \int_{\Omega} D_x^2 u D_y^2 u dx dy. \end{aligned}$$

Applichiamo il lemma 2.21 a $v = D_x u$ e a $w = D_y u$, possiamo farlo perché essendo $u = 0$ su Γ si ha $v\tau_{1i} + w\tau_{2i} = 0$ su Γ_i , grazie al lemma 2.20. Allora

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} D_x^2 u D_y^2 u dx dy &= \int_{\Omega} D_x v D_y w dx dy = \\ &= \int_{\Omega} D_y v D_x w dx dy = \int_{\Omega} |D_x D_y u|^2 dx dy. \end{aligned}$$

Perciò

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^{2,2}(\Omega)}^2 &= \|D_x^2 u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|D_y^2 u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|D_x D_y u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u\|_{H^{1,2}(\Omega)}^2 \leq \\ &\leq \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u\|_{H^{1,2}(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

e per il teorema di Poincaré 2.1

$$\|u\|_{H^{2,2}(\Omega)} \leq \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} + c(1 + (\text{diam}(\Omega))^2) \|u\|_{L^2(\Omega)}.$$

□

D'ora in avanti indicheremo con N_2 il sottospazio di tutte le funzioni $v \in L_2(\Omega)$ tali che $\int_{\Omega} f v dx dy = 0$, per ogni $f \in L_2(\Omega)$ per le quali esiste $u \in H^{2,2}(\Omega)$ che soddisfa il problema (2.1). In altre parole $N_2 = R(\Delta)^\perp$, ove

$$R(\Delta) = \{\Delta u \mid u \in H^{2,2}(\Omega), u = 0 \text{ su } \Gamma\}.$$

Osservazione 2.22. Se $v \in N_2$, allora si ha $\Delta v = 0$ su Ω nel senso che

$$\int_{\Omega} v \Delta \phi dx = 0, \text{ per ogni } \phi \in C_0^\infty$$

ed inoltre $v = 0$ su Γ , nel senso delle tracce descritto nel teorema 1.34. Infatti $v \in L^2(\Omega) \subseteq L^p(\Omega)$, per ogni $p \in]1, 2]$, e dunque $\gamma_0 v \in H^{-\frac{1}{p}, p}(\Gamma)$, per ogni $p \in]1, 2[$ e $\int_{\Gamma} v \phi dx = 0$, per ogni $\phi \in H^{\frac{1}{p}, p'}$.

Denoteremo con M_2 lo spazio delle soluzioni di questo problema, in altre parole

$$M_2 = \{u \in L^2(\Omega) \mid \Delta u = 0 \in H^{-2,2}(\Omega), \gamma_0 u = 0 \in H^{-\frac{1}{2}, 2}\}.$$

2.2.4 Soluzioni singolari

Il risultato che segue serve a introdurre una classe di soluzioni singolari definite intorno ai vertici V_j del poligono Ω .

Teorema 2.23. *Sia $v(r, \theta)$ una funzione definita su $\Sigma_j = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq \rho, 0 \leq \theta \leq \omega_j\}$, tale che:*

- (i) $r \mapsto v(r, \theta) \in C^\infty(]0, \rho[)$ per ogni $\theta \in]0, \omega_j[$,
- (ii) $v \in L^2(\Sigma_j)$,
- (iii) esiste la derivata seconda $v_{\theta\theta}$ ed è tale che $v_{rr} + \frac{1}{r}v_r + \frac{1}{r^2}v_{\theta\theta} = 0$ in Σ_j ,
- (iv) $v = rv_r = 0$ per $\theta = 0$ e $\theta = \omega_j$.

Allora

$$v(r, \theta) = \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z} \\ 0 \neq m > \frac{-\omega_j}{\pi}}} \frac{c_m}{\sqrt{\omega_j}} \frac{r^{\frac{m\pi}{\omega_j}}}{\frac{m\pi}{\omega_j}} \sin \frac{m\pi}{\omega_j} \theta$$

ed esiste $L \geq 0$ tale che $|c_m| \leq L\rho^{-\frac{m\pi}{\omega_j}}$, per $0 \neq m > \frac{-\omega_j}{\pi}$.

In particolare, se $\omega_j < \pi$ si ha

$$v(r, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_m}{\sqrt{\omega_j}} \frac{r^{\frac{m\pi}{\omega_j}}}{\frac{m\pi}{\omega_j}} \sin \frac{m\pi}{\omega_j} \theta.$$

Dimostrazione. Poniamo $w_1 = rv_r$, $w_2 = -v_\theta$ e $\underline{w} = (w_1, w_2)$. Nello spazio $L^2(0, \omega_j) \times L^2(0, \omega_j)$ consideriamo l'operatore differenziale:

$$\begin{cases} \Lambda(z_1, z_2) = (z'_1, z'_2) & \text{per ogni } z_1, z_2 \in D(\Lambda) \\ D(\Lambda) = \{(z_1, z_2) \in H^1(0, \omega_j) \times H^1(0, \omega_j) \mid z_1(\omega_j) = z_1(0) = 0\} \end{cases}$$

Da (ii) segue che $r \frac{\partial}{\partial r} \underline{w} = \Lambda \underline{w}$: infatti

$$\begin{aligned} r \frac{\partial}{\partial r} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} &= r \frac{\partial}{\partial r} \begin{pmatrix} rv_r \\ -v_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rv_r + r^2 v_{rr} \\ -rv_{r\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_{\theta\theta} \\ -rv_{\theta r} \end{pmatrix} = \\ &= \Lambda \begin{pmatrix} rv_r \\ -v_\theta \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Per sviluppare in serie \underline{w} , cerchiamo gli autovalori e gli autovettori di Λ .

$$\Lambda \underline{z} = \lambda \underline{z} \Leftrightarrow \begin{cases} z'_2 = \lambda z_1 \\ -z'_1 = \lambda z_2 \\ z_1(0) = z_1(\omega_j) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z''_2 = -\lambda^2 z_2 \\ z''_1 = -\lambda^2 z_1 \\ z_1(0) = z_1(\omega_j) = 0 \end{cases}$$

da cui $\lambda^2 = \frac{m^2\pi^2}{\omega_j^2}$, ossia $\lambda_m = \frac{m\pi}{\omega_j}$ ($m \in \mathbb{Z}$), e l'autovettore corrispondente, già normalizzato, è

$$\underline{\phi}_{jm}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\omega_j}} \left(\sin \frac{m\pi}{\omega_j} \theta, -\cos \frac{m\pi}{\omega_j} \theta \right).$$

Questo sistema ortonormale è ovviamente completo in $L^2(0, \omega_j) \times L^2(0, \omega_j)$. Quindi, scrivendo $\underline{w}(r, \theta) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} w_m(r) \underline{\phi}_{jm}(\theta)$, il coefficiente di Fourier $w_m(r) = \int_0^{\omega_j} (\underline{w}(r, \theta), \underline{\phi}_{jm}(\theta)) d\theta$ verificherà, sostituendo nell'equazione $r \frac{\partial}{\partial r} \underline{w} = \Lambda \underline{w}$:

$$r w'_m(r) = \frac{m\pi}{\omega_j} w_m(r), \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Dunque

$$w_m(r) = c_m r^{\frac{m\pi}{\omega_j}},$$

ed in particolare

$$|c_m| \leq r^{-\frac{m\pi}{\omega_j}} |w_m(r)| \leq L r^{\frac{m\pi}{\omega_j}}, \quad L \geq 0 \text{ opportuna,}$$

in quanto i coefficienti di Fourier sono infinitesimi per $m \rightarrow \infty$. Se v è regolare, si ha $\underline{w} \in D(\Lambda)$, quindi le serie di Fourier

$$r \frac{\partial v}{\partial r}(r, \theta) = \frac{1}{\sqrt{\omega_j}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m r^{\frac{m\pi}{\omega_j}} \sin \frac{m\pi}{\omega_j} \theta$$

$$r \frac{\partial v}{\partial \theta}(r, \theta) = \frac{1}{\sqrt{\omega_j}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m r^{\frac{m\pi}{\omega_j}} \cos \frac{m\pi}{\omega_j} \theta$$

convergono in $L^2(0, \omega_j)$ e in particolare deve essere $c_m = 0$ per $\frac{m\pi}{\omega_j} \leq -1$, cioè per $m \leq -\frac{\omega_j}{\pi}$ (se $\omega_j < \pi$ significa per ogni $m \leq -1$, se $\pi < \omega_j < 2\pi$ significa per ogni $m \leq -2$).

Allora le serie convergono uniformemente, perché salvo al più in un addendo le potenze di r sono positive e $r \in]0, \rho[$, con ρ sufficientemente piccolo.

Consideriamo la prima, riscritta come

$$\frac{\partial v}{\partial r}(r, \theta) = \frac{1}{\sqrt{\omega_j}} \sum_{m > -\frac{\omega_j}{\pi}} c_m r^{\frac{m\pi}{\omega_j} - 1} \sin \frac{m\pi}{\omega_j} \theta$$

nella quale l'addendo con $m = 0$ è nullo. Integrando termine a termine in $]0, r[$ si ha:

$$v(r, \theta) = \frac{1}{\sqrt{\omega_j}} \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z} \\ 0 \neq m > -\frac{\omega_j}{\pi}}} c_m \frac{r^{\frac{m\pi}{\omega_j}}}{\frac{m\pi}{\omega_j}} \sin \frac{m\pi}{\omega_j} \theta,$$

e ciò prova la tesi. \square

Ora introduciamo delle funzioni cut-off η_j sugli spigoli. Le funzioni η_j sono funzioni regolari tali che $0 \leq \eta_j \leq 1$, che valgono 1 in un intorno $B(V_j, \delta)$ e sono nulle su $B(V_j, 2\delta)^c$, dove $\delta > 0$ è scelto in modo che i dischi $\overline{B(V_j, 2\delta)}$ siano tutti disgiunti.

Lemma 2.24. *Per ogni vertice V_j e tale che $\omega_j \in]\pi, 2\pi[$ esiste una funzione $\sigma_j \in M_2$ tale che:*

$$\sigma_j - \eta_j u_j \in H^{1,2}(\Omega),$$

$$\text{dove } u_j(r, \theta) = r^{-\frac{\pi}{\omega_j}} \frac{\sqrt{\omega_j}}{\pi} \sin \frac{\pi}{\omega_j} \theta$$

Dimostrazione. La funzione $\eta_j u_j$ è nulla per $\theta = 0$ e $\theta = \omega_j$; possiamo pensarla definita su tutto $\overline{\Omega}$, dato che η_j è nulla fuori di $B(V_j, \delta)$. Inoltre

$$\Delta(\eta_j u_j) = u_j \Delta \eta_j + (\nabla \eta_j, \nabla u_j) + \eta_j \Delta u_j;$$

Il terzo addendo è nullo perché $\Delta u_j = 0$. Poiché $-\frac{\pi}{\omega_j} \in]-1, 0[$, il primo addendo è in $L^2(\Sigma_j)$, mentre il secondo è in $L^2(\Sigma_j)$ in quanto $\nabla \eta_j = 0$ in un intorno di V_j (ove u_j è singolare). Dunque $f_j \equiv \Delta(\eta_j u_j) \in L^2(\Omega)$. Quindi esiste $v_j \in H_0^{1,2}(\Omega)$, soluzione variazionale di

$$\begin{cases} \Delta v_j = -f_j & \text{in } \Omega \\ v_j = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

e dunque $\sigma_j := v_j + \eta_j u_j$ soddisfa $\Delta \sigma_j = -f_j + f_j = 0$ in Ω e $\sigma_j = 0$ in $\partial\Omega$, ossia $\sigma_j \in M_2$. Inoltre si ha

$$\sigma_j - \eta_j u_j = v_j \in H^{1,2}(\Omega).$$

□

Osservazione 2.25. Il supporto di σ_j è contenuto in $\overline{\Omega \cap D(V_j, 2\delta)}$ perché così è per v_j e $\eta_j u_j$.

Teorema 2.26. *Sia V_j un vertice tale che $\omega_j \in]\pi, 2\pi[$ e sia $v \in M_2$. Poiché $\Delta v = 0$ in Ω e $v = 0$ su Γ , la funzione v è regolare in Ω e la sua restrizione a $\Sigma_j = \Omega \cap B(V_j, \rho)$ verifica le ipotesi del teorema 2.23. Si ha dunque*

$$v(r, \theta) = -c_{-1j} \frac{r^{-\frac{\pi}{\omega_j}}}{\frac{\pi}{\sqrt{\omega_j}}} \sin \frac{\pi\theta}{\omega_j} + \sum_{m=1}^{\infty} c_{mj} \frac{r^{\frac{\pi}{\omega_j}}}{\frac{\pi}{\sqrt{\omega_j}}} \sin \frac{\pi\theta}{\omega_j},$$

con $|c_{mj}| \leq L\rho^{-\frac{m\pi}{\omega_j}}$.

Dimostrazione. Applicando alla funzione $u_j = -\frac{r^{-\frac{\pi}{\omega_j}}}{\frac{\pi}{\sqrt{\omega_j}}} \sin \frac{\pi\theta}{\omega_j}$ il lemma 2.24, esiste $\sigma_j \in M_2$ tale che

$$v_j = c_j \sigma_j - \eta_j \in H^{1,2}(\Omega),$$

(ove $c_j = c_{-1j}$) e quindi possiamo scrivere in Σ_j

$$v(r, \theta) = c_j \sigma_j - v_j + \sum_{m=1}^{\infty} c_{mj} \frac{r^{\frac{\pi}{\omega_j}}}{\sqrt{\omega_j}} \sin \frac{\pi \theta}{\omega_j}.$$

Proviamo che

$$w(r, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} c_{mj} \frac{r^{\frac{\pi}{\omega_j}}}{\sqrt{\omega_j}} \sin \frac{\pi \theta}{\omega_j} \in H^{1,2}(\Sigma_j).$$

Si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial r} &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_{mj}}{\sqrt{\omega_j}} r^{\frac{m\pi}{\omega_j}-1} \sin \frac{m\pi}{\omega_j} \theta \\ \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_{mj}}{\sqrt{\omega_j}} r^{\frac{m\pi}{\omega_j}-1} \cos \frac{m\pi}{\omega_j} \theta, \end{aligned}$$

quindi

$$|\nabla w| = \sqrt{\left| \frac{\partial w}{\partial r} \right|^2 + \frac{1}{r^2} \left| \frac{\partial w}{\partial \theta} \right|^2} \leq c \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|c_j|}{\sqrt{\omega_j}} r^{\frac{m\pi}{\omega_j}-1},$$

e ricordando che $|c_{mj}| \leq L \rho^{-\frac{m\pi}{\omega_j}}$, si ottiene

$$\begin{aligned} \int_0^{\omega_j} \int_0^{\rho} |\nabla w|^2 r dr d\theta &\leq c \sqrt{\omega_j} \sum_{m=1}^{\infty} |c_{mj}| \int_0^{\rho} r^{\frac{2m\pi}{\omega_j}-1} dr \leq \\ &\leq cL \sqrt{\omega_j} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\rho^{-\frac{m\pi}{\omega_j}} \rho^{\frac{2m\pi}{\omega_j}}}{\frac{2m\pi}{\omega_j}} \leq C < \infty. \end{aligned}$$

Perciò

$$v - c_j \sigma_j \in H^{1,2}(\Sigma_j)$$

e questo vale per ogni vertice V_j tale che $\omega_j \in]\pi, 2\pi[$. Allora la v verifica

$$v - \sum_{j \in J} c_j \sigma_j \in H^{1,2}(\Omega)$$

(in quanto lontano dai vertici v , essendo armonica, è regolare). Ma

$$\begin{cases} \Delta(v - \sum_{j \in J} c_j \sigma_j) = 0 & \text{in } \Omega \\ v - \sum_{j \in J} c_j \sigma_j = 0 & \text{su } \Gamma \end{cases}$$

e per unicità

$$v = \sum_{j \in J} c_j \sigma_j.$$

Dunque le σ_j generano M_2 .

D'altra parte, esse sono linearmente indipendenti: infatti σ_j ha supporto contenuto in $D(V_j, 2\delta)$ e quindi le σ_j hanno supporti disgiunti. Dunque le σ_j sono una base per M_2 , che dunque ha dimensione pari a $\text{card} J$. \square

Ora ci resta solo da definire le funzioni 'singolari' associate ai vertici di angoli $\omega_j \in]\pi, 2\pi[$.

Siano quindi

$$S_j(r, \theta) = -\eta_j u_j(r, \theta) = -\eta_j \frac{r^{-\frac{\pi}{\omega_j}}}{\sqrt{\omega_j}} \sin \frac{\pi}{\omega_j} \theta.$$

Di seguito alcune proprietà di tali funzioni:

Lemma 2.27. $S_j \in H^{1,2}(\Omega) \setminus H^{2,2}(\Omega)$. Inoltre si ha $\Delta S_j \in C^\infty(\overline{\Omega})$ e $S_j = 0$ su Γ .

La dimostrazione di tale fatto è ovvia: infatti dal lemma precedente segue che ΔS_j è nulla in un intorno V di V_j e d'altra parte u_j e η_j sono C^∞ in $\Omega \setminus V$.

Si ha inoltre:

Lemma 2.28. ΔS_j non è ortogonale a N_2 .

Dimostrazione. Dimostriamolo per assurdo. Assumiamo che ΔS_j sia ortogonale a N_2 ; allora esiste $w_j \in H^{2,2}(\Omega)$ soluzione del problema (2.1), cioè tale che

$$\Delta w_j = \Delta S_j \text{ e } w_j = 0 \text{ su } \Gamma.$$

Quindi $w_j - S_j$ è soluzione del problema omogeneo e appartiene a $H^{1,2}(\Omega)$. Ma per l'unicità della soluzione in $H^{1,2}(\Omega)$, si ha che $S_j = w_j \in H^{2,2}(\Omega)$, in contraddizione con il lemma precedente. \square

Siamo finalmente pronti per il teorema principale di questa tesi:

Teorema 2.29. Sia $f \in L^2(\Omega)$ con Ω poligono non necessariamente convesso. Sia J l'insieme dei vertici relativi agli angoli $\omega_j \in]\pi, 2\pi[$. Allora f ammette un'unica rappresentazione nella forma

$$f = \Delta v - \sum_{j \in J} c_j \Delta S_j,$$

ove $v \in H^{2,2}(\Omega)$, con $v = 0$ su Γ e le c_j sono costanti reali.

Dimostrazione. Le funzioni ΔS_j , per $j \in J$, sono funzioni $C^\infty(\overline{\Omega})$, quindi di $L^2(\Omega)$, fra loro linearmente indipendenti, avendo supporti disgiunti. Non essendo ortogonali a N_2 , esse hanno proiezioni non nulle su N_2 , e il loro numero è pari alla massima cardinalità di N_2 . Proviamo che le $P_{N_2} \Delta S_j$ sono a loro volta indipendenti. Se infatti fosse $\sum_{j \in J} \lambda_j P_{N_2} \Delta S_j = 0$, con i λ_j non tutti nulli, allora $\sum_{j \in J} \lambda_j P_{N_2} \Delta S_j \in R(\Delta)$, ove

$$R(\Delta) = \{\Delta v \mid v \in H^{2,2}(\Omega) \text{ e } v = 0 \text{ su } \Gamma\}.$$

Dunque esiste $u \in H^{2,2}(\Omega)$, nulla su Γ tale che $\sum_{j \in J} \lambda_j P_{N_2} \Delta S_j = \Delta u$. Ma allora $w = \sum_{j \in J} \lambda_j S_j - u \in H^{1,2}(\Omega)$ e verifica $\Delta w = 0$ in Ω , $w = 0$ su Γ , da cui per unicità $w = 0$ ossia $\sum_{j \in J} \lambda_j S_j = u \in H^{2,2}(\Omega)$ il che implicherebbe $S_j \in H^{2,2}(\Omega)$ per la separatezza dei supporti. Di conseguenza ogni $f \in L^2(\Omega)$ si rappresenta in modo unico come

$$f = \Delta u + \sum_{j \in J} c_j P_{N_2}(\Delta S_j) = \Delta u - \sum_{j \in J} c_j P_{R(\Delta)}(\Delta S_j) + \sum_{j \in J} c_j \Delta S_j,$$

e posto $v = u - \sum_{j \in J} c_j P_{R(\Delta)}(\Delta S_j) \in R(\Delta)$, si ha univocamente

$$f = \Delta v + \sum_{j \in J} c_j \Delta S_j,$$

con $v \in H^{2,2}(\Omega)$ e $v = 0$ su Γ . \square

Corollario 2.30. *Sia $f \in L^2(\Omega)$, Ω poligono non necessariamente convesso. Sia J l'insieme dei vertici relativi agli angoli $\omega_j \in]\pi, 2\pi[$. Se $u \in H_0^{1,2}(\Omega)$ è la soluzione variazionale di*

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega, \text{ con } f \in L^2(\Omega) \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

allora esistono unici c_j , $j \in J$, tali che

$$u - \sum_{j \in J} c_j S_j \in H^{2,2}(\Omega).$$

Dimostrazione. Siano v e c_j come nel teorema 2.29: $v \in H^{2,2}(\Omega)$, $v = 0$ su Γ e $f = \Delta v - \sum_{j \in J} c_j \Delta S_j$. Consideriamo $w := u - v - \sum_{j \in J} c_j S_j$. Si ha $w \in H^{1,2}(\Omega)$, $\Delta w = 0$, $w = 0$ su Γ . Quindi, per unicità della soluzione in $H_0^{1,2}(\Omega)$, si ha $w \equiv 0$. Quindi $u - \sum_{j \in J} c_j S_j \equiv v \in H^{2,2}(\Omega)$. \square

In definitiva che né u né le S_j stanno in $H^{2,2}(\Omega)$, però le loro singolarità, concentrate intorno ai vertici V_j ($j \in J$) si eliminano e la loro differenza sta in $H^{2,2}(\Omega)$.

Ringraziamenti

In primo luogo ringrazio il prof. Acquistapace per la pazienza, la disponibilità, la precisione che mi ha riservato e per la tranquillità con cui mi ha fatto affrontare questa tesi.

Ringrazio i miei genitori e i miei fratelli per non aver perso la fiducia in me. Ringrazio i miei bimbi perché riescono a rendere tutto più bello, sempre.

Ringrazio Biagio

Ringrazio Amedeo perché tutti i matematici dovrebbero avere un amico fisico, perché tutti dovrebbero avere un amico così. Sono molto fortunata.

Ringrazio Katrina perché è la mia roccia. Senza le sue considerazioni razionali e sagge, dette con estrema leggerezza, sarei andata poco lontano.

Ringrazio Elena perché so che mi vuole proprio bene. È fondamentale avere una stella giù, nel cuore.

Ringrazio Isotta perché una \oplus non la si trova spesso. Una così speciale poi.

Ringrazio Cecilia perché è una delle poche persone che mi capisce sempre. È facile stare insieme.

Ringrazio Danny perché si può parlare di stupidaggini e di cose serissime con la stessa serenità. È sempre un piacere.

Ringrazio Armanda perché più di tutti mi insegna che non c'è un solo modo di pensare.

Ringrazio Leonardo perché senza di lui avrei perso molto spesso le speranze. Crede in me.

Ringrazio Fabio perché è sempre stato un esempio di come le cose si possano fare molto bene e con semplicità.

Ringrazio Pietro per il suo proteggerci sempre tutti.

Ringrazio Veronica per questa follia. Un peccato non conoscersi subito.

Ringrazio Silvia, Leonardo, Alessandra, Irene per i sorrisi e le piacevoli pause che ci concediamo.

Bibliografia

- [1] P. ACQUISTAPACE: *Appunti di analisi funzionale*, pagina web: <http://www.dm.unipi.it/acquistp> (2011)
- [2] P. ACQUISTAPACE: *Introduzione alla teoria delle equazioni alle derivate parziali*, pagina web: <http://www.dm.unipi.it/acquistp> (2012)
- [3] R.A. ADAMS: *Sobolev spaces*, Pure and Applied Mathematics series, vol. 140, Academic Press (2003)
- [4] E. GIUSTI: *Equazioni ellittiche del secondo ordine*, Pitagora editrice (1978)
- [5] P. GRISVARD: *Elliptic problems in nonsmooth domains*, Pitman (1985)
- [6] A. IACOPETTI: *Il problema di Dirichlet per equazioni ellittiche del secondo ordine*, pagina web: <http://www.dm.unipi.it/acquistp/iacopetti.pdf> (2005)
- [7] J.L. LIONS, E. MAGENES: *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, vol. 1 Dunod (1968)