Elementi di Analisi Matematica

Prove scritte dal 2012

Prova scritta del 4 giugno 2012

Esercizio 1 Si determini, al variare del parametro $\lambda > 0$, il comportamento per $n \to \infty$ della successione

$$\begin{cases} a_0 = \lambda \\ a_{n+1} = p\, a_n + \dfrac{1}{2a_n}\,, \quad n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

nei tre casi seguenti:

$$\text{(i) } p = 1, \qquad \text{(ii) } p = \frac{1}{2}\,, \qquad \text{(iii) } p = \frac{7}{9}\,.$$

Esercizio 2 Descrivere qualitativamente il grafico della funzione così definita:

$$f(x) = \int_1^x \frac{e^t - 1}{[t^2(t-3)]^{1/3}}\, dt.$$

Esercizio 3 Analizzare qualitativamente i grafici delle soluzioni dell'equazione differenziale

$$y' = y^3 - y - \sin y.$$

Risoluzione

Esercizio 1 (i) Sia $p = 1$. La successione è dunque

$$\begin{cases} a_0 = \lambda \\ a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{2a_n}\,, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Poiché $\lambda > 0$, si vede immediatamente che $a_n > 0$ per ogni n e quindi a_n è crescente. Pertanto essa ha limite e dalla relazione ricorrente l'unico limite possibile è $L = +\infty$. Pertanto

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty.$$

(ii) Sia $p = \frac{1}{2}$. La successione è dunque

$$\begin{cases} a_0 = \lambda \\ a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\, a_n + \dfrac{1}{2a_n}\,, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

La legge di ricorrenza $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2x}$ incontra la funzione identità $y = x$ nel punto $x = 1$, che è anche il punto di minimo di f. Quindi se $\lambda = 1$ allora $a_n = 1$ per ogni n. Se $0 < \lambda < 1$ si ha $a_1 = f(\lambda) > 1$ e $1 < a_2 = f(a_1) < a_1$; per induzione si ottiene $1 < a_{n+1} < a_n$ per ogni $n \geq 1$, e dunque a_n tende al punto fisso di f, che è 1. Infine se $\lambda > 1$ si ha come prima $1 < a_1 = f(\lambda)$ e induttivamente $1 < a_{n+1} < a_n$ per ogni n; nuovamente, otteniamo allora $a_n \to 1$. Pertanto

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$

(iii) Sia $p = \frac{7}{9}$. La successione è dunque

$$\begin{cases} a_0 = \lambda \\ a_{n+1} = \dfrac{7}{9}\, a_n + \dfrac{1}{2a_n}\,, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

La legge di ricorrenza $f(x) = \frac{7x}{9} + \frac{1}{2x}$ incontra la funzione identità $y = x$ nel punto $x = \frac{3}{2}$ ed ha minimo nel punto $x = \frac{3}{\sqrt{14}} \in \left]0, \frac{3}{2}\right[$, con $f(\frac{3}{\sqrt{14}}) = \frac{\sqrt{14}}{3}$. Inoltre risulta

$$f(x) > \frac{3}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 0 < x < \frac{3}{7} \ \text{ oppure } \ x > \frac{3}{2}.$$

Allora, se $0 < \lambda < \frac{3}{7}$, oppure $\lambda > \frac{3}{2}$, si ha $a_1 = f(\lambda) > \frac{3}{2}$, e induttivamente $\frac{3}{2} < a_{n+1} < a_n$; dunque a_n è decrescente e quindi converge al punto fisso di f, che è $\frac{3}{2}$. Se invece $\frac{3}{7} \leq \lambda \leq \frac{3}{2}$, allora $a_0 < f(\lambda) = a_1 < \frac{3}{2}$, e induttivamente $a_n < a_{n+1} < \frac{3}{2}$; dunque a_n è crescente e quindi converge al punto fisso di f, che è $\frac{3}{2}$. Pertanto

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{3}{2}.$$

Esercizio 2 La funzione integranda presenta due singolarità: nell'origine, dove però la singolarità $t^{2/3}$ a denominatore è cancellata dal termine $e^t - 1$ a numeratore, e nel punto $t = 3$, dove il fattore $(t-3)^{1/3}$ non pregiudica la sommabilitàdell'integrale. Pertanto la funzione f è definita su $\mathbb{R}$ ed è continua. Essa è anche di classe C^1 in $\mathbb{R} \setminus \{3\}$. Risulta

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \int_1^{\infty} \frac{e^t - 1}{[t^2(t-3)]^{1/3}}\, dt = +\infty,$$

a causa della presenza dell'esponenziale, mentre

$$\exists \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\int_{-\infty}^{1} \frac{e^t - 1}{[t^2(t-3)]^{1/3}}\, dt = -\infty$$

poiché il numeratore resta limitato ma il denominatore si comporta come t. In nessuno dei due limiti c'è asintoto. In particolare, naturalmente, $f(1) = 0$. La derivata prima di f è ovviamente

$$f'(x) = \frac{e^x - 1}{[x^2(x-3)]^{1/3}}, \quad x \neq 3,$$

e risulta $f' > 0$ per $x > 3$ e per $x < 0$, mentre $f' < 0$ in $]0, 3[$. Quindi $x = 0$ è un punto di massimo relativo, con

$$f(0) = \int_1^0 \frac{e^t - 1}{[t^2(t-3)]^{1/3}}\, dt = \int_0^1 \frac{e^t - 1}{[t^2(3-t)]^{1/3}}\, dt > 0.$$

Nel punto $x = 3$, in cui $f(3) = -\int_1^3 \frac{e^t-1}{[t^2(3-t)]^{1/3}}\, dt < 0$, la funzione f presenta una cuspide, in quanto

$$\lim_{x \to 3^+} f'(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to 3^-} f'(x) = -\infty.$$

In definitiva, f cresce in $]-\infty, 0]$ da $-\infty$ a $f(0) > 0$; poi decresce in $[0, 3]$ fino a $f(3) < 0$, per poi risalire in $[3, \infty[$ fra $f(3)$ e $+\infty$.
Con qualche calcolo si vede poi che

$$f''(x) = \frac{e^x(x^2 - 4x + 2) + x - 2}{x^{5/3}(x-3)^{4/3}}, \qquad x \notin \{0, 3\};$$

In particolare f è concava in tutto l'intervallo $[0, 3]$, anche se la verifica è tutt'altro che facile: un modo per verificarlo è quello di considerare il numeratore $h(x) = e^x(x^2 - 4x + 2) + x - 2$, e di provare che esso è negativo in $[0, 3]$; a questo scopo basta osservare che tale funzione è concava in $[0, 2]$

e convessa in $[2,3]$, con $h(0)=0$, $h'(0)=-1$, $h(2)=-2e^2$, $h(3)=1-e^3$. Sulla semiretta $[3,\infty[$ la funzione f è dapprima concava, poi però deve diventare convessa perché la derivata contiene il termine con e^x, il quale all'infinito diventa preponderante. Nella semiretta $]-\infty,0]$ la funzione f arriva al secondo estremo concava, ma in precedenza era convessa perché a $-\infty$ l'integrando si comporta come t e quindi f ha un andamento come $-\ln x$. Vi sono dunque almeno due punti di flesso, uno in $]-\infty,0[$ e l'altro in $]3,+\infty[$.

Esercizio 3 La funzione a secondo membro rispetta le ipotesi del teorema di esistenza e unicità, per cui per ogni punto del piano passa una e una sola curva integrale e quindi tali curve integrali non possono mai intersecarsi. Cerchiamo anzitutto le soluzioni costanti: vi è chiaramente $y=0$, ma ce n'è un'altra: infatti le funzioni $g(y)=y^3-y$ e $h(y)=\sin y$ si incontrano, oltre che in $y=0$, anche in un unico altro punto $y_0\in]\frac{\pi}{2},\pi[$. Inoltre, se $y(x)$ è soluzione, anche $-y(-x)$ è soluzione; dunque è sufficiente analizzare cosa succede nel semipiano $x\geq 0$. Notiamo che, essendo l'equazione autonoma, se $y(x)$ è soluzione anche $y(x+c)$ lo è, per ogni $c\in\mathbb{R}$.

Essendo $y^3-y-\sin y<0$ se e solo se $0<y<y_0$, posto $b=y(0)$ si deduce che se $b>y_0$ oppure $b<0$ le soluzioni sono crescenti, mentre se $0<b<y_0$ le soluzioni sono decrescenti.

Cerchiamo di determinare la curva dei flessi: si ha

$$y''=(3y^2-1-\cos y)(y^3-y-\sin y);$$

il primo fattore ha due soli zeri simmetrici $\pm y_1$, con $y_1\in]0,\frac{\pi}{2}[$, e si ha $3y^2-1-\cos y<0$ se e solo se $-y_1<y<y_1$. Perciò si ha la situazione seguente.

- Se $b>y_0$, la soluzione y è crescente e convessa; in particolare essa tende a $+\infty$. Dunque, vi è un $K>0$ tale che $y(K)$ esiste e si ha $y(K)^3-y(K)-\sin y(K)>\frac{1}{2}\,y(K)^3$; allora, per confronto con l'equazione $y'=\frac{1}{2}\,y^3$, si ricava che y ha un asintoto verticale.

- Se $y_1<b<y_0$, la soluzione è decrescente, dapprima concava; poi, quando scende oltre la quota $y=y_1$, essa diventa convessa e tende all'asintoto orizzontale $y=0$ (tale asintoto non può essere a quota positiva, altrimenti y' non potrebbe tendere a 0).

- Se $0<b\leq y_1$, la soluzione è decrescente e convessa, e tende all'asintoto orizzontale $y=0$.

- Se $-y_1 \leq y < 0$, la soluzione è crescente e concava, e tende all'asintoto orizzontale $y = 0$.
- Se $b < -y_1$, la soluzione è crescente, dapprima convessa; poi, quando sale oltre la quota $y = -y_1$, essa diventa concava e tende all'asintoto orizzontale $y = 0$.

Prova scritta del 4 luglio 2012

Esercizio 1 Si determini, al variare del parametro $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, il comportamento della serie
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\ln|x||^{3n}}{1 + x^{2n} + |\ln|x||^{3n}}.$$

Esercizio 2 (a) Descrivere qualitativamente il grafico della funzione così definita:
$$f(x) = \int_x^1 \arctan \frac{1}{t^m}\, dt,$$
ove m è un intero positivo fissato.
(b) Calcolare esplicitamente $f(x)$ nel caso $m = 1$.
Esercizio 3 Analizzare qualitativamente i grafici delle soluzioni dei problemi di Cauchy
$$\begin{cases} y' = y^2 - xy \\ y(0) = a, \end{cases}$$
al variare di $a \in \mathbb{R}$.

Risoluzione

Esercizio 1 La dipendenza da x è pari, quindi basta vedere cosa succede per $x > 0$, ossia considerare la serie
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\ln x|^{3n}}{1 + x^{2n} + |\ln x|^{3n}}, \qquad x > 0.$$

La serie è a termini positivi. Si ha
$$|\ln x|^{3n} < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad |\ln x| < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{e} < x < e,$$

mentre ovviamente

$$x^{2n} < 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 0 < x < 1.$$

Pertanto se $0 < x < 1/e$ il termine generale della serie tende a 1, mentre se $x = 1/e$ esso tende a $1/2$: in entrambi i casi la serie diverge. Se invece $1/e < x < 1$, il termine generale è infinitesimo e la serie converge per confronto con la serie geometrica $\Sigma |\ln x|^{3n}$.
Se $1 \leq x < e$, vale il discorso precedente: il termine generale è infinitesimo e la serie converge, ancora per confronto con la serie geometrica $\Sigma |\ln x|^{3n}$. Se $x = e$, la serie converge per confronto asintotico con la serie Σe^{-2n}. Infine, se $x > e$, occorre analizzare se nel denominatore x^{2n} è un infinito di ordine superiore rispetto a $|\ln x|^{3n}$, o se accade il contrario: ciò equivale a stabilire se x^2 è maggiore di $(\ln x)^3$ o se è vero l'opposto. Consideriamo dunque la funzione

$$g(x) = \frac{(\ln x)^3}{x^2}, \qquad x \geq e.$$

Si ha

$$g(e) = e^{-2} < 1, \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0,$$

ed inoltre con facili conti si trova che

$$g'(x) = \frac{(\ln x)^2}{x^3}\,(3 - 2\ln x) \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \ln x \leq \frac{3}{2}\,.$$

Dunque g ha massimo nel punto $x = e^{3/2}$, ove si ha

$$g(e^{3/2}) = \left(\frac{3}{2e}\right)^3 < 1.$$

Pertanto $g(x) < 1$ per ogni $x > e$, ossia

$$(\ln x)^3 < x^2 \qquad \forall x \geq e.$$

Ne segue che per $x > e$ la serie è convergente, per confronto con $\Sigma\left(\frac{(\ln x)^3}{x^2}\right)^n$.

Esercizio 2 (a) Poiché la funzione $\arctan\frac{1}{t^m}$ è limitata su $\mathbb{R}$ e discontinua nel solo punto $t = 0$, la funzione f è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$. Naturalmente, $f(1) = 0$; inoltre, per $t \to \pm\infty$ l'integrando è asintotico a $1/t^m$; quindi

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\int_1^{\infty} \arctan\frac{1}{t^m}\,dt = \begin{cases} \in \mathbb{R} & \text{se } m > 1 \\ = -\infty & \text{se } m = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \int_{-\infty}^{1} \arctan\frac{1}{t^m}\,dt = \begin{cases} \in \mathbb{R} & \text{se } m > 1 \\ = -\infty & \text{se } m = 1 \end{cases}$$

Analizziamo la derivata f'. Si ha

$$f'(x) = -\arctan\frac{1}{x^m} \qquad \forall x \neq 0;$$

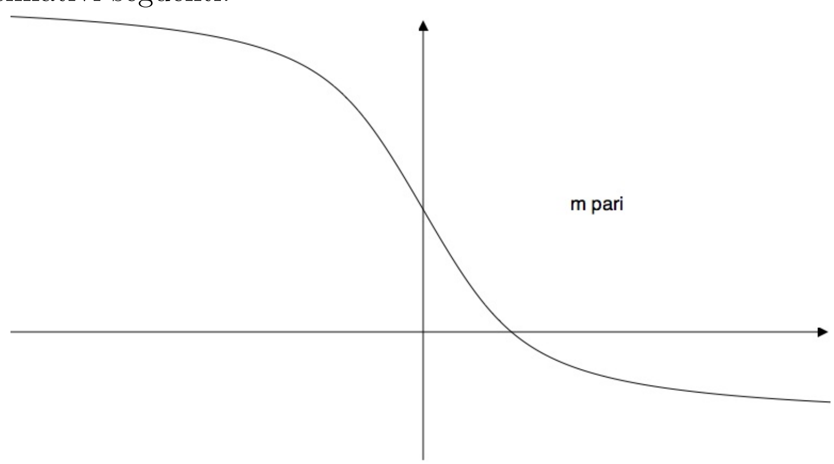
per $x = 0$, la derivata $f'(0)$ esiste se e solo se m è pari, con $f'(0) = \frac{\pi}{2}$, mentre quando m è dispari si ha

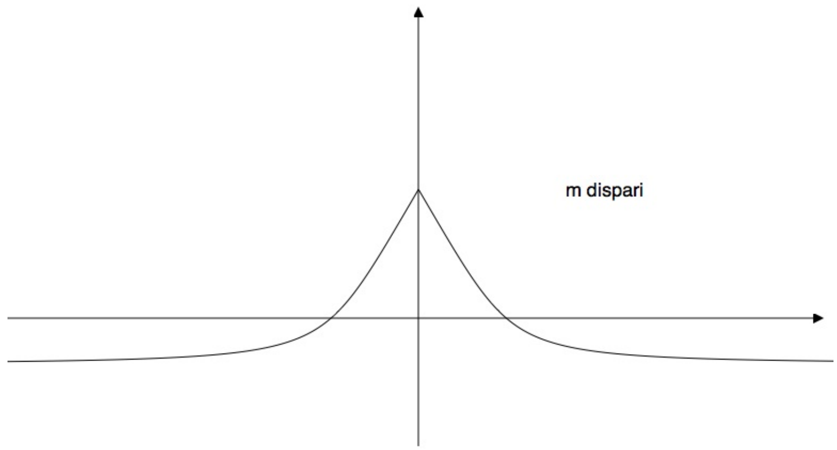
$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Dunque per m dispari il punto 0 è angoloso. In ogni caso, vale $f(0) = \int_0^1 \arctan\frac{1}{t^m}\,dt$.
In particolare, $f' < 0$ in $\mathbb{R}$ quando m è pari, mentre $f'(x) > 0$ se e solo se $x < 0$ quando m è dispari. La derivata seconda è

$$f''(x) = \frac{m}{x^{m+1}}\,\frac{x^{2m}}{x^{2m}+1} \qquad \forall x \neq 0,$$

e dunque f è convessa in entrambe le semirette $]-\infty, 0]$ e $[0, \infty[$ (ma non in $\mathbb{R}$) quando m è dispari, mentre è convessa in $[0, \infty[$ e concava in $]-\infty, 0]$ quando m è pari. Dalle informazioni ottenute possiamo delineare i grafici approssimativi seguenti.





(b) Vediamo cosa succede per $m = 1$: integrando per parti si ha:

$$\begin{aligned}
\int_x^1 \arctan\frac{1}{t}\,dt &= \left[t\,\arctan\frac{1}{t}\right]_x^1 - \int_x^1 t\,\frac{1}{1+\frac{1}{t^2}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt = \\
&= \left[t\,\arctan\frac{1}{t}\right]_x^1 + \int_x^1 \frac{t}{1+t^2}\,dt = \\
&= \left[t\,\arctan\frac{1}{t} + \frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]_x^1 = \\
&= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2 - x\,\arctan\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\ln(1+x^2).
\end{aligned}$$

Osserviamo che la relazione $\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$, valida per $x > 0$, potrebbe qui essere fonte di errore, dato che la formula deve valere per ogni $x \in \mathbb{R}$. Per utilizzarla occorre tener presente che per $x < 0$ vale invece $\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$.

Esercizio 3 Anzitutto osserviamo che $y = 0$ è soluzione. Inoltre, se $y(x)$ è una soluzione, anche $v(x) = -y(-x)$ lo è, in quanto

$$v'(x) = y'(-x) = y^2(-x) - (-x)y(-x) = v^2(x) - x\,v(x).$$

Inoltre è immediato verificare che

$$y' > 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad y > x.$$

Si ha poi

$$y'' = 2yy' - y - xy' = (2y-x)(y^2-xy) - y = y(2y^2 - 3xy + x^2 - 1).$$

Ne segue, per $y > 0$,

$$y'' > 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad y < \frac{3x - \sqrt{x^2+8}}{4} \text{ oppure } y > \frac{3x + \sqrt{x^2+8}}{4}\,.$$

La curva dei flessi $y = \frac{3x+\sqrt{x^2+8}}{4}$ taglia l'asse x nel punto $x = -1$, e l'asse y nel punto $y = 1/\sqrt{2}$. Quindi se $0 < a < 1/\sqrt{2}$ la soluzione parte concava e crescente, attraversa la bisettrice dove ha un massimo, e poi decresce, prima concava e poi, dopo aver attraversato la seconda curva dei flessi $y = \frac{3x-\sqrt{x^2+8}}{4}$, convessa. Per $x \to +\infty$, essa ha necessariamente un asintoto orizzontale $y = \lambda$. Ma dall'equazione differenziale segue subito che λ non può essere diverso da 0, altrimenti y' divergerebbe. Quindi per $0 < a < 1/\sqrt{2}$ le soluzioni tendono a 0 per $x \to +\infty$.
Per $x < 0$, tali soluzioni sono dapprima concave, poi attraversano la prima curva dei flessi, diventano convesse e tendono all'asintoto orizzontale $y = 0$ anche per $x \to -\infty$. Lo stesso comportamento si ha quando $a = 1/\sqrt{2}$ e per valori di a poco superiori ad $a = 1/\sqrt{2}$: le soluzioni partono convesse e crescenti ma la loro pendenza è bassa, quindi raggiungono la prima curva dei flessi, e da lì in poi si comportano come le soluzioni precedenti; per $x < 0$ esse restano convesse e scendono verso l'asintoto $y = 0$ per $x \to -\infty$.
Invece se a è grande il comportamento è differente. Supponiamo $a^2 > 2$: allora la retta tangente al grafico della soluzione in $x = 0$ è $y = a + a^2x$, e la soluzione, essendo convessa, verifica $y > a + a^2x > 2x$. Ne segue

$$y' = y^2 - xy > y^2 - \frac{y^2}{2} = \frac{y^2}{2},$$

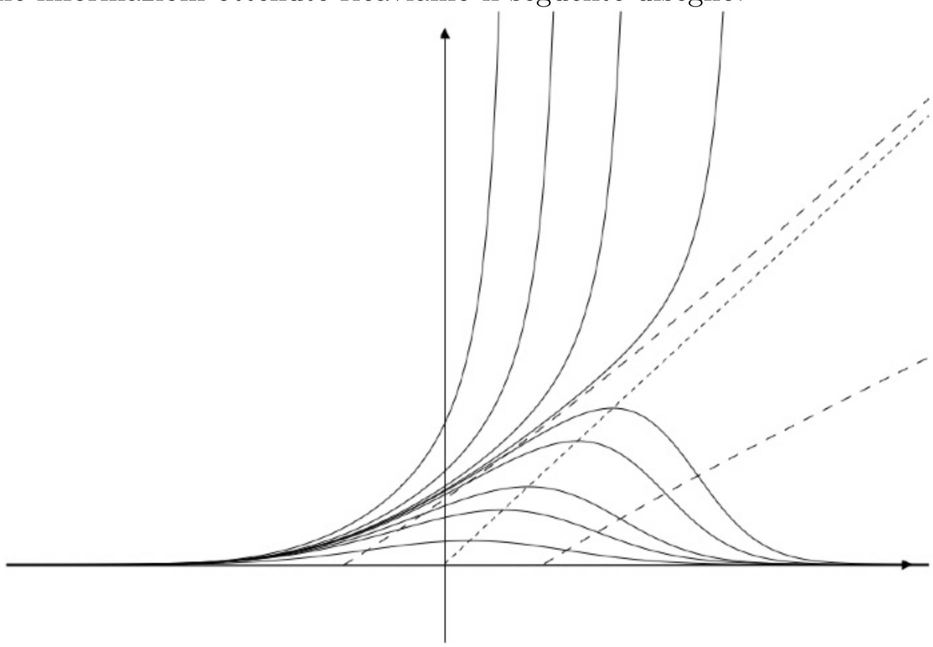
quindi $\frac{y'}{y^2} > \frac{1}{2}$, e integrando i due membri si ottiene facilmente

$$y > \frac{1}{\frac{1}{a} - \frac{x}{2}}\,.$$

Ne deriva che $y(x)$ ha un asintoto verticale se a è sufficientemente grande.
Vi sarà allora una soluzione particolare, che separa le soluzioni convesse con asintoto verticale da quelle che invece attraversano la prima linea dei flessi, finendo per avvicinarsi all'asintoto orizzontale $y = 0$ per $x \to +\infty$. Tale soluzione particolare è quella con valore iniziale

$$\alpha = \inf\{a > 0 : \ y(x) \text{ ha asintoto verticale}\}.$$

Tale soluzione è convessa, perché estremo inferiore di funzioni convesse, ed è definita per ogni $x > 0$ perché le ascisse degli asintoti verticali si spostano verso $+\infty$. Dunque tale soluzione si avvicina indefinitamente per $x \to +\infty$ alla curva dei flessi $y = \frac{3x+\sqrt{x^2+8}}{4}$. Il comportamento per $x \to -\infty$ è invece sempre uguale a quello degli altri casi.
Dalle informazioni ottenute ricaviamo il seguente disegno:



Si osservi che l'equazione proposta è una equazione di Bernoulli di parametro $\alpha = 2$, dunque risolubile esplicitamente ponendo $u = y^{-1}$. Si trova

$$u' = -\frac{y'}{y^2} = -\frac{y^2 - xy}{y^2} = -1 + xu.$$

Per $u(0) = 1/a$ si ha facilmente

$$u(x) = e^{x^2/2}\left(\frac{1}{a} - \int_0^x e^{-t^2/2}\,dt\right),$$

e dunque

$$y(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\frac{1}{a} - \int_0^x e^{-t^2/2}\,dt}.$$

Non è immediato riconoscere che queste funzioni hanno i grafici descritti sopra; tuttavia questa espressione rende evidente quale sia il dato iniziale corrispondente alla soluzione "separatrice": esso è

$$\alpha = \frac{1}{\int_0^\infty e^{-t^2/2}\,dt}.$$

Prova scritta del 10 settembre 2012

Esercizio 1 Sia $\{a_n\}$ la successione definita da

$$\begin{cases} a_0 = \lambda \\ a_{n+1} = \frac{a_n^2+5}{6}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

(i) Stabilire il comportamento della successione al variare di $\lambda > 0$.

(ii) Detto

$$A = \left\{ \lambda > 0;\ \exists \lim_{n\to\infty} a_n = L_\lambda \in \mathbb{R} \right\},$$

si determini, al variare di $\lambda \in A$, il comportamento della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - L_\lambda).$$

Esercizio 2 Per $\alpha > 0$ siano

$$g_\alpha(x) = x^\alpha, \quad g(x) = \ln x, \qquad x > 0.$$

(i) Determinare per quali valori di α i grafici di g_α e g non si incontrano, o si incontrano in un solo punto, o si incontrano in due punti di ascisse c_α, d_α con $d_\alpha > c_\alpha > 0$.

(ii) Calcolare, se esistono,

$$\lim_{\alpha\to 0^+} c_\alpha, \qquad \lim_{\alpha\to 0^+} d_\alpha.$$

Esercizio 3 Si consideri la funzione

$$F(x) = \int_3^x \sin^2 t\, \ln(t-2)\, dt.$$

(i) Si tracci il grafico di F.

(ii) Si calcoli, se esiste,

$$\lim_{x\to 3} \frac{F(x)}{(x-3)^2}.$$

Risoluzione

Esercizio 1 (i) Sia $a_0 = \lambda > 0$. Si ha allora $a_1 = \frac{\lambda^2+5}{6}$ e

$$a_1 = \frac{\lambda^2 + 5}{6} > \lambda \iff \lambda^2 - 6\lambda + 5 > 0 \iff 0 < \lambda < 1 \ \lor \ \lambda > 5.$$

La funzione $f(\lambda) = \frac{\lambda^2+5}{6}$ è continua e crescente in $]0, \infty[$; inoltre si verifica facilmente che i suoi punti fissi sono 1 e 5, con $f(\,]0, 1[\,) \subseteq]0, 1[$ e $f(\,]1, 5[\,) =]1, 5[$. Dunque otteniamo che la successione $\{a_n\}$ è crescente se $0 < \lambda < 1$ oppure $\lambda > 5$, mentre $\{a_n\}$ è decrescente se $1 < \lambda < 5$; per $\lambda = 1$ e $\lambda = 5$ la successione è costante. In particolare, la successione $\{a_n\}$ converge a 1 per $\lambda \in]0, 5[$, converge a 5 per $\lambda = 5$ e diverge a $+\infty$ per $\lambda > 5$.
(ii) Risulta $A =]0, 5]$. Per $\lambda = 5$ si ha $L_\lambda = 5$ e la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n - 5)$ è la serie nulla. Per $0 < \lambda < 5$ si ha $L_\lambda = 1$: se $\lambda = 1$ si ha nuovamente la serie nulla, se $0 < \lambda < 1$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n - 1)$ è a termini negativi ed infine se $1 < \lambda < 5$ essa è a termini positivi. In entrambi i casi, applicando il criterio del rapporto si ha

$$\frac{|a_{n+1} - 1|}{|a_n - 1|} = \frac{a_{n+1} - 1}{a_n - 1} = \frac{\frac{a_n^2+5}{6} - 1}{a_n - 1} = \frac{a_n^2 - 1}{6(a_n - 1)} = \frac{a_n + 1}{6},$$

da cui

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1} - 1|}{|a_n - 1|} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n + 1}{6} = \frac{1}{3} < 1.$$

Ne segue che la serie converge assolutamente per ogni $\lambda \in A$.
Esercizio 2 (i) Consideriamo la funzione

$$f_\alpha(x) = \frac{g(x)}{g_\alpha(x)} = x^{-\alpha} \ln x, \qquad x > 0.$$

Chiaramente ci interessa scoprire in quali punti essa vale 1, perché tali punti sono le ascisse dei punti d'incontro dei grafici di g_α e g. Risulta intanto $f_\alpha(x) < 0$ per $0 < x < 1$, e questi valori non ci interessano. Nella semiretta $[1, \infty[$ la funzione f_α è non negativa, con $f(1) = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} f_\alpha(x) = 0$. Cerchiamo il massimo di $f_\alpha(x)$: calcolando la derivata si trova

$$f'_\alpha(x) = -\alpha \ln x + 1 \geq 0 \iff \ln x \leq \frac{1}{\alpha} \iff x \leq e^{1/\alpha}.$$

Il massimo di f_α è dunque

$$\max f_\alpha = f_\alpha\left(e^{1/\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha e}$$

ed è raggiunto solo in quel punto poiché, come già detto, f_α cresce in $\left[1, e^{1/\alpha}\right]$ e decresce in $\left[e^{1/\alpha}, \infty\right[$.
Si ottiene dunque

$$\max f_\alpha \begin{cases} > 1 & \text{se } \alpha < 1/e, \\ = 1 & \text{se } \alpha = 1/e, \\ < 1 & \text{se } \alpha > 1/e. \end{cases}$$

Ne segue che per $\alpha > \frac{1}{e}$ i grafici di g_α e g non si intersecano; per $\alpha = \frac{1}{e}$ i grafici di g_α e g si intersecano nel solo punto di ascissa $x = e^e$ ed ordinata $y = e$; infine per $0 < \alpha < \frac{1}{e}$ i grafici di g_α e g si intersecano in due soli punti $(c_\alpha, 1)$ e $(d_\alpha, 1)$, con $1 < c_\alpha < d_\alpha$ (ricordiamo che $f_\alpha(x) = 1$ se e solo se $g_\alpha(x) = g(x)$).
(ii) Poiché per $0 < \beta < \alpha$ si ha $f_\beta > f_\alpha$, si vede subito che risulta $c_\beta < c_\alpha < e^e < d_\alpha < d_\beta$. Dunque le funzioni c_α e d_α sono monotone e pertanto esse hanno limiti L e M per $\alpha \to 0^+$.
Calcoliamo i due limiti. Dato che $c_\alpha < e^e$, dalla relazione $c_\alpha^{-\alpha} \ln c_\alpha = 1$ segue che

$$\ln c_\alpha = c_\alpha^\alpha < e^{e\alpha} \to 1 \quad \text{per } \alpha \to 0^+;$$

ne segue $c_\alpha \to e$, cioè $L = e$. Analogamente, dato che $e^e < d_\alpha$, dalla relazione $d_\alpha^{-\alpha} \ln d_\alpha = 1$ segue che

$$d_\alpha = (\ln d_\alpha)^{1/\alpha} > (\ln e^e)^{1/\alpha} = e^{1/\alpha} \to +\infty \quad \text{per } \alpha \to 0^+;$$

dunque $M = +\infty$.
Esercizio 3 L'integrando è una funzione continua in $]2, \infty[$, quindi il dominio della funzione F contiene $]2, \infty[$. Inoltre

$$\lim_{x \to 2^+} F(x) = \int_3^2 \sin^2 t \, \ln(t-2)\, dt = \int_2^3 \sin^2 t \, |\ln(t-2)|\, dt \in \mathbb{R},$$

in quanto $\sin^2 t \leq 1$ e $\ln(t-2)$ è sommabile in $[2, 3]$; quindi F è definita su $[2, \infty[$. Si ha invece

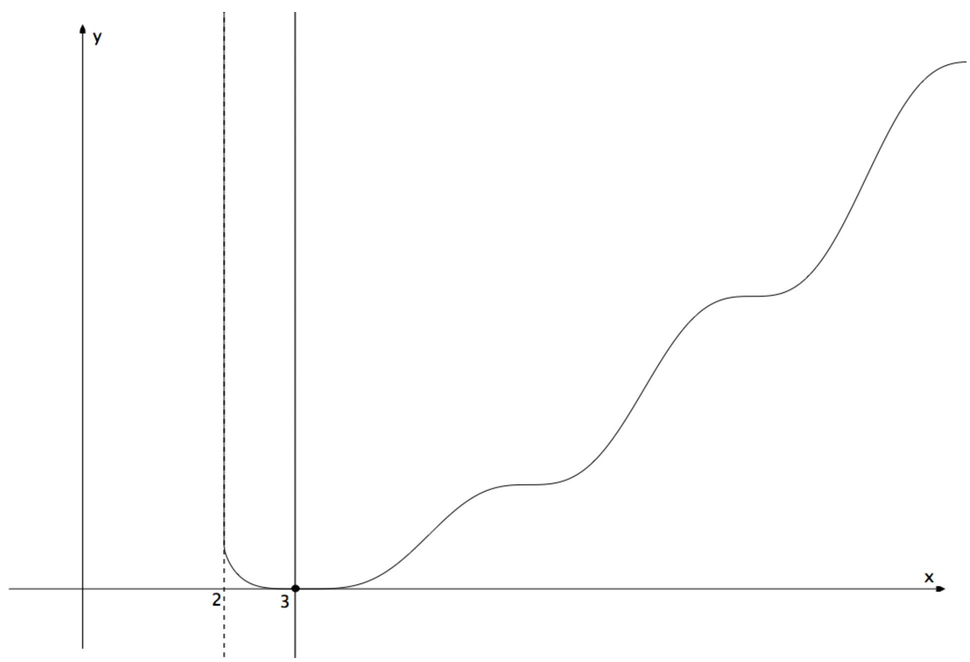
$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = \int_3^\infty \sin^2 t \, \ln(t-2)\, dt = +\infty :$$

infatti, l'integrando è positivo e risulta

$$\begin{aligned}\int_3^{\infty} \sin^2 t \, \ln(t-2)\, dt &\geq \sum_{n=2}^{\infty} \int_{n\pi+\pi/6}^{(n+1)\pi-\pi/6} \sin^2 t \, \ln(t-2)\, dt \geq \\ &\geq \sum_{n=2}^{\infty} \int_{n\pi+\pi/6}^{(n+1)\pi-\pi/6} \frac{1}{2} \ln(n\pi+\pi/6-2)\, dt = \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\pi}{3} \ln(n\pi+\pi/6-2) = +\infty.\end{aligned}$$

La funzione F è derivabile in $]2,\infty[$ e

$$F'(x) = \sin^2 x \, \ln(x-2) \begin{cases} < 0 & \text{in }]2,3[\\ > 0 & \text{in }]3,\infty[\,. \end{cases}$$



La derivata F' si annulla in $x=3$ e negli infiniti altri punti $x = n\pi$, $n \in \mathbb{N}^+$. Inoltre

$$\lim_{x\to 2^+} F'(x) = -\infty,$$

mentre $F'(x)$ non ha limite per $x \to +\infty$, dato che

$$F'(n\pi) = 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}^+, \quad F'(n\pi+\pi/2) = \ln(n\pi+\pi/2-2) \to \infty \text{ per } n \to \infty.$$

Quindi la F è decrescente in $]2,3]$ e crescente in $[3,\infty[$, con infiniti punti di flesso a tangente orizzontale.

Prova scritta del 14 gennaio 2013

Esercizio 1 Fissato $\lambda > 0$, si definisca la successione (a_n) nel modo seguente:

$$\begin{cases} a_0 = \lambda \\ a_{n+1} = \frac{\lambda}{(n+1)^2} + \frac{a_n}{\lambda}\,, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

(i) Descrivere il comportamento di (a_n) al variare di $\lambda \in]0,1]$;

(ii) (facoltativo) analizzare il comportamento di (a_n) nel caso $\lambda > 1$.

Esercizio 2 Si consideri l'equazione

$$\arcsin x = (\cos x)^n.$$

(i) Si dimostri che tale equazione ha una e una sola soluzione $x_n \in]0,1[$;

(ii) si provi che

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

Esercizio 3 Sia data la funzione

$$G(x) = \int_1^x \frac{|t-2|\ln t}{t-1} \arcsin\frac{1}{t}\, dt.$$

Si individui il dominio di G e si tracci un grafico approssimativo di G, determinando in particolare il suo comportamento negli estremi del dominio e mostrando che vi è almeno un punto di flesso per G nell'intervallo $]2,\infty[$.

Risoluzione

Esercizio 1 (i) Anzitutto osserviamo che risulta $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, come si verifica immediatamente per induzione. Ora, se $\lambda \in [0,1]$, si ha anche

$$a_{n+1} = \frac{\lambda}{(n+1)^2} + \frac{a_n}{\lambda} > \frac{a_n}{\lambda} \geq a_n;$$

dunque la successione (a_n) è crescente e pertanto ha limite $L \in]0, \infty]$. Passando al limite nella relazione ricorrente troviamo subito

$$L = \frac{L}{\lambda}\,,$$

e dunque se $\lambda \in]0, 1[$ si ricava immediatamente $L = \infty$.
Se invece $\lambda = 1$, non si riesce con l'argomento precedente a determinare L. Tuttavia, per $\lambda = 1$ si ha

$$a_0 = 1, \qquad a_{n+1} = a_n + \frac{1}{(n+1)^2} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

quindi si trova facilmente

$$a_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^2} \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

pertanto nel caso $\lambda = 1$ la successione (a_n) è convergente e

$$L = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

(ii) Sia $\lambda > 1$. In questo caso la monotonia di (a_n) non è garantita. Osserviamo però che

$$a_{n+1} - \frac{a_n}{\lambda} = \frac{\lambda}{(n+1)^2} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dunque possiamo scrivere

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= a_{n+1} - \frac{a_n}{\lambda} + \frac{a_n}{\lambda} - \frac{a_{n-1}}{\lambda^2} + \cdots + \frac{a_1}{\lambda^n} - \frac{a_0}{\lambda^{n+1}} + \frac{a_0}{\lambda^{n+1}} = \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{a_{k+1}}{\lambda^{n-k}} - \frac{a_k}{\lambda^{n-k+1}} \right) + \frac{a_0}{\lambda^{n+1}} = \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^{1+k-n}}{(k+1)^2} + \frac{a_0}{\lambda^{n+1}}.
\end{aligned}$$

Perciò abbiamo una formula esplicita per a_n:

$$a_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^{2+k-n}}{(k+1)^2} + \frac{a_0}{\lambda^{n-1}} = \lambda \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^{-(n-1-k)}}{(k+1)^2} + \frac{a_0}{\lambda^{n-1}}.$$

Osserviamo ora che nell'ultimo membro, essendo $\lambda > 1$, il secondo addendo è infinitesimo. Per quanto riguarda il primo, notiamo che esso, a meno di un fattore costante λ, è il termine generale di indice $n-1$ del prodotto di Cauchy delle due serie

$$\sum_{h=0}^{\infty} \lambda^{-h}, \qquad \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{(h+1)^2},$$

le quali sono entrambe a termini positivi e convergenti: dunque la serie prodotto è convergente e pertanto il suo termine generale è infinitesimo. Ne segue che quando $\lambda > 1$ la successione (a_n) è infinitesima.

Esercizio 2 (i) Poniamo

$$g_n(x) = \arcsin x - (\cos x)^n, \qquad x \in [-1, 1].$$

Questa funzione è negativa in $[-1, 0]$ e positiva in $x = 1$, quindi può annullarsi solo in $]0, 1[$, ed anzi si deve annullare almeno una volta per il teorema dei valori intermedi. Dato che inoltre g_n è crescente, essendo differenza di una funzione strettamente crescente e di una decrescente, il punto x_n in cui si annulla esiste ed è unico.

(ii) Utilizzando il fatto che $(\cos x)^n > (\cos x)^{n+1}$ per ogni $x \in]0, 1[$, abbiamo

$$g_{n+1}(x_n) = \arcsin x_n - (\cos x_n)^{n+1} > \arcsin x_n - (\cos x_n)^n = g_n(x_n) = 0;$$

poiché g_{n+1} è crescente e $g_{n+1}(x_{n+1}) = 0$, si deduce che $x_n < x_{n+1}$. Pertanto x_n è monotona decrescente e dunque ha limite $\ell \in [0, 1[$. Ma se fosse $\ell > 0$, avremmo per continuità

$$\lim_{n\to\infty} \arcsin x_n = \arcsin \ell > 0$$

e, per la relazione $0 < \cos x_n < \cos \ell < 1$,

$$\lim_{n\to\infty} (\cos x_n)^n = 0;$$

dunque

$$0 = \lim_{n\to\infty} (\arcsin x_n - (\cos x_n)^n > 0,$$

il che è assurdo. Si conclude perciò che $\ell = 0$.

Esercizio 3 L'integrando è una funzione continua e non negativa in $]1, \infty[$, e non è ben definita in nessun insieme più grande: quindi la funzione G è definita per lo meno in $]1,\infty[$. Ma poiché $\lim_{t\to 1^+}\frac{\ln t}{t-1}=1$, l'integrando è continuo anche nel punto $t=1$. Ne segue che G è definita in $[1,\infty[$, con $G(1)=0$. Inoltre, in un intorno di $+\infty$ l'integrando si comporta come $\frac{\ln t}{t}$, quindi $\lim_{x\to+\infty}G(x)=+\infty$. La funzione G è crescente, con derivata

$$G'(x)=\frac{|x-2|\ln x}{x-1}\arcsin\frac{1}{x}\quad\forall x\in[1,\infty[\,.$$

Si può osservare che $G'(1)=\frac{\pi}{2}$, e che $\lim_{x\to+\infty}G'(x)=0$. La G' si annulla per $x=2$, unico punto in cui la derivata seconda non esiste. Dato che G' è continua e non negativa in $[2,\infty[$, e che è nulla agli estremi, essa deve avere un massimo positivo in un punto $\overline{x}\in]2,\infty[$; tale punto è di flesso per G in quanto, almeno in un intorno di $\overline{x}$, la G' cresce a sinistra di $\overline{x}$ e decresce a destra.

Prova scritta del 15 febbraio 2013

Esercizio 1 Descrivere, al variare del parametro $\alpha>0$, il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\ln(3^{n^\alpha}+n^{3\alpha}+\alpha^{3n})}.$$

Esercizio 2

(i) Tracciare un grafico approssimativo della funzione

$$g(x)=\frac{x^2}{x+1},\qquad x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}.$$

(ii) Posto

$$f(y)=\sup\left\{x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}:\frac{x^2}{x+1}<y\right\},\qquad y\in\mathbb{R},$$

si provi che f è costante in $]-\infty,0]$.

(iii) Si mostri che f è continua in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

(iv) Si determini, se esiste,

$$\lim_{y\to 0^+}f(y).$$

Esercizio 3 Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^t e^{\frac{x^2}{2}}\,dx\cdot\int_t^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx.$$

Esercizio 4 Analizzare qualitativamente i grafici delle soluzioni dell'equazione differenziale

$$y' = y^3 - y - \sin y.$$

Risoluzione

Esercizio 1 La serie è a termini positivi. Poiché

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{3\alpha}}{3^{n^\alpha}} = 0, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^{3n}}{3^{n^\alpha}} = 0 \qquad \forall\alpha > 0,$$

per confronto asintotico il comportamento della serie data è uguale a quello della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\ln(3^{n^\alpha})},$$

ossia

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^\alpha}.$$

Quest'ultima serie è sicuramente divergente, per confronto con la serie armonica, qualunque sia $\alpha\in\,]0,1]$. Invece se $\alpha>1$ questa serie converge: infatti, scelto $\varepsilon\in\,]0,\alpha-1[$, esiste $M>0$ tale che

$$\ln n \le Mn^\varepsilon \qquad \forall n\ge 1,$$

e pertanto, essendo $\alpha-\varepsilon>1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^\alpha} \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{M}{n^{\alpha-\varepsilon}} < \infty.$$

Si conclude che la serie proposta diverge per $0<\alpha\le 1$ e converge per $\alpha>1$.
Esercizio 2 (i) La funzione g ha l'asintoto verticale $x=-1$ e risulta

$$\lim_{x\to-1^+} g(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-1^-} g(x) = -\infty.$$

Si ha inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty.$$

Calcoliamo la derivata prima. Con calcoli immediati si trova

$$g'(x) = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2},$$

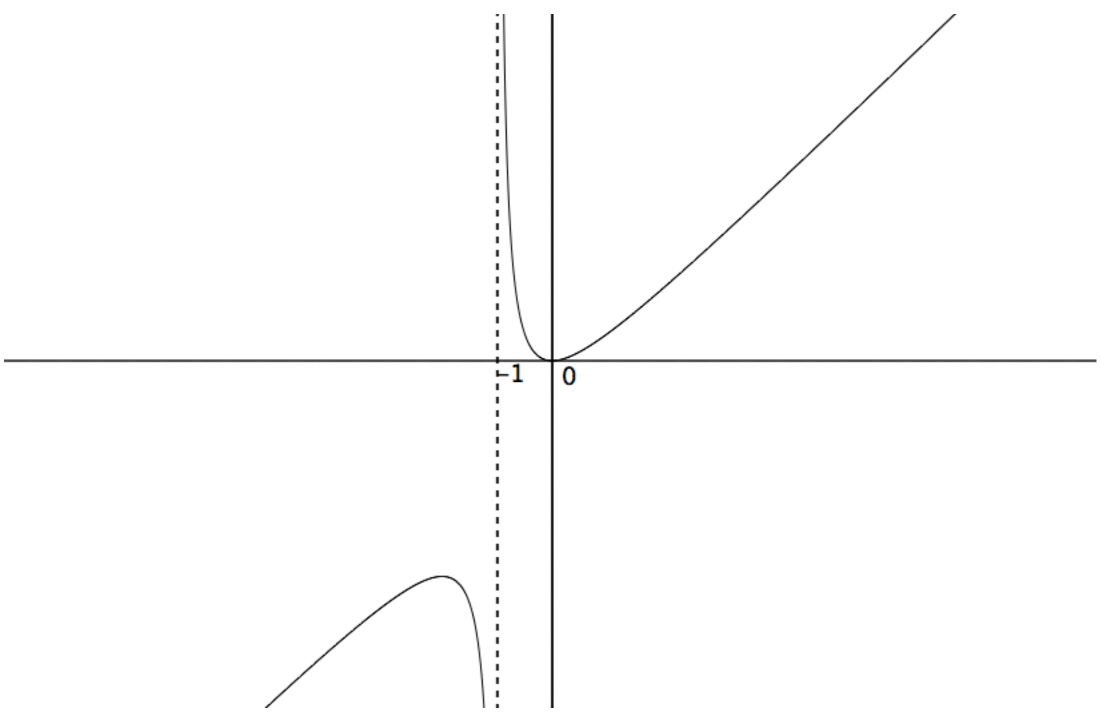
e dunque si ricava

$$g'(x) \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \geq 0 \quad \text{oppure} \quad x \leq -2.$$

Se ne deduce che il punto 0 è di minimo relativo, con $g(0) = 0$, mentre il pu to -2 è di massimo relativo, con $g(-2) = -4$.
Il calcolo della derivata seconda è abbastanza agevole, e con facili calcoli si ha

$$g''(x) = \frac{2}{(x+1)^3}.$$

Ne segue che g è convessa in $]-1, +\infty[$ ed è concava in $]-\infty, -1[$.
Da queste informazioni si desume che il grafico di g è quello sottostante.



(ii) Poniamo per comodità

$$E_y = \left\{ x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} : \frac{x^2}{x+1} < y \right\}.$$

Se $y \leq 0$, l'insieme E_y è incluso nella semiretta $]-\infty, -1[$, in quanto $g(x) \geq 0$ per $x > -1$. In particolare, essendo $g(x) \to -\infty$ per $x \to -1^-$, si avrà sicuramente $g(x) < y$ per ogni x sufficientemente vicino a -1. Quindi

$$f(y) = \sup E_y = -1 \qquad \forall y \leq 0.$$

(iii) Chiaramente f è continua sulla semiretta $]-\infty, 0[$ ove è costante. Sia ora $y > 0$: l'insieme E_y è costituito dalla semiretta $]-\infty, -1[$ e dall'intervallo in cui risulta

$$x > -1, \quad \frac{x^2}{x+1} < y;$$

questa doppia disequazione equivale a

$$x > -1, \quad \frac{y - \sqrt{y^2 + 4y}}{2} < x < \frac{y + \sqrt{y^2 + 4y}}{2}.$$

Ne segue

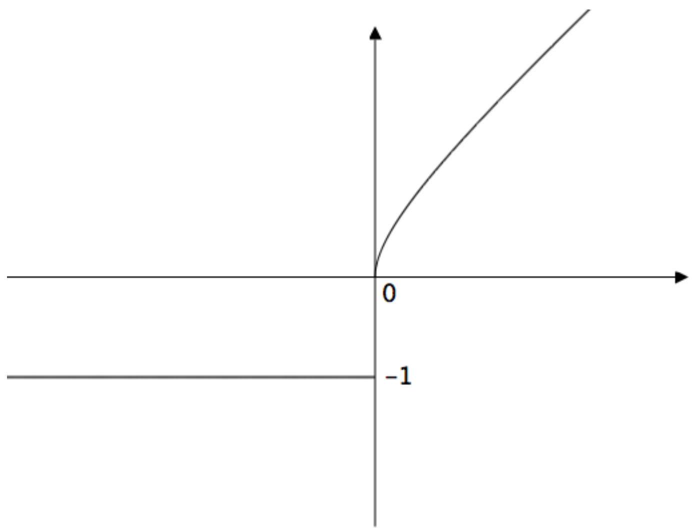
$$f(y) = \sup E_y = \frac{y + \sqrt{y^2 + 4y}}{2} \qquad \forall y > 0,$$

e la funzione $y \mapsto \frac{y+\sqrt{y^2+4y}}{2}$ è ovviamente continua.

(iv) Utilizzando l'espressione di f sopra indicata, si trova immediatamente

$$\lim_{y \to 0^+} f(y) = 0.$$

In particolare, f è discontinua nel punto 0.



Esercizio 3 Poiché $x \mapsto e^{\frac{x^2}{2}}$ non è sommabile in $[0, +\infty[$ mentre $x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$ lo è, il limite da calcolare è una forma indeterminata $\infty \cdot 0$. Possiamo trasformarlo nella forma $\frac{\infty}{\infty}$ scrivendo

$$\int_0^t e^{\frac{x^2}{2}}\,dx \cdot \int_t^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \frac{\displaystyle\int_0^t e^{\frac{x^2}{2}}\,dx}{\frac{1}{\int_t^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx}},$$

e ora il teorema di de L'Hôpital è applicabile. Perciò il limite proposto esiste, nell'ipotesi che esista quest'altro:

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{e^{\frac{t^2}{2}}}{\frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\left(\int_t^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx\right)^2}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\left(\int_t^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx\right)^2}{e^{-t^2}};$$

questo limite, a sua volta, esiste nell'ipotesi che esista il seguente:

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{-2\,e^{-\frac{t^2}{2}}\int_t^\infty e^{\frac{x^2}{2}}\,dx}{-2t\,e^{-t^2}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\int_t^\infty e^{\frac{x^2}{2}}\,dx}{t\,e^{-\frac{t^2}{2}}}.$$

Nuovamente, quest'ultimo limite esiste se esiste

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{-e^{\frac{t^2}{2}}}{e^{-\frac{t^2}{2}}(1-t^2)} = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t^2-1},$$

e dato che l'ultimo limite scritto esiste e vale 0, si conclude che anche il limite proposto vale 0.

Esercizio 4 La funzione a secondo membro rispetta le ipotesi del teorema di esistenza e unicità: pertanto per ogni punto del piano passa una e una sola curva integrale e in particolare tali curve integrali non possono mai intersecarsi. Inoltre, se $x \mapsto y(x)$ è soluzione, anche $x \mapsto -y(x)$ è soluzione; dunque è sufficiente analizzare cosa succede nel semipiano $y \geq 0$. Notiamo anche che, essendo l'equazione autonoma, se $x \mapsto y(x)$ è soluzione anche $x \mapsto y(x+c)$ lo è, per ogni $c \in \mathbb{R}$. Cerchiamo anzitutto le soluzioni costanti (nel semipiano superiore): vi è chiaramente $y = 0$, ma ce n'è un'altra: infatti le funzioni $g(y) = y^3 - y$ e $h(y) = \sin y$ si incontrano, oltre che in $y = 0$, anche in un unico altro punto $y_0 \in]0, \pi[$.

Essendo $y^3 - y - \sin y < 0$ se e solo se $0 < y < y_0$, posto $b = y(0)$ si deduce che se $b > y_0$ le soluzioni sono crescenti, mentre se $0 < b < y_0$ le soluzioni sono decrescenti.

Cerchiamo di determinare la curva dei flessi: si ha

$$y'' = (3y^2 - 1 - \cos y)(y^3 - y - \sin y);$$

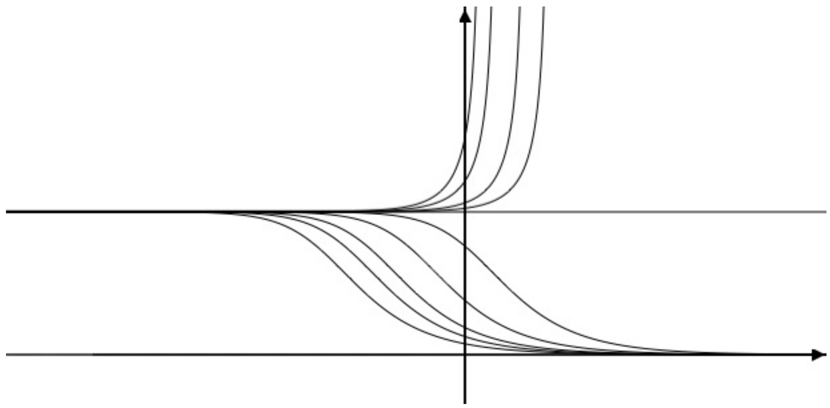
il primo fattore (nel semipiano superiore) ha un solo zero y_1, con $y_1 \in]0, 1[$, e si ha $3y^2 - 1 - \cos y < 0$ se e solo se $0 < y < y_1$. Perciò si ha la situazione seguente.

- Se $b > y_0$, la soluzione y è crescente e convessa; in particolare essa ha l'asintoto orizzontale $y = y_0$ per $x \to -\infty$ (tale asintoto non può essere a quota maggiore di y_0, altrimenti y' non potrebbe tendere a 0), e tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$. Dunque, vi è un $K > 0$ tale che $y(K)$ esiste e si ha $y(K)^3 - y(K) - \sin y(K) > \frac{1}{2} y(K)^3$; allora, per confronto con l'equazione $y' = \frac{1}{2} y^3$, si ricava che y ha un asintoto verticale.

- Se $y_1 < b < y_0$, la soluzione è decrescente, ed è concava per $x < 0$; quando $x > 0$ essa diventa convessa nel momento in cui scende oltre la quota $y = y_1$. Si ha l'asintoto orizzontale $y = y_0$ per $x \to -\infty$ e l'asintoto orizzontale $y = 0$ per $x \to +\infty$.

- Se $0 < b \leq y_1$, la soluzione è decrescente; per $x < 0$ essa è concava finché non scende sotto la quota $y = y_1$, allorché diventa convessa. Per $x > 0$ essa resta convessa. Vi sono i due asintoti orizzontali $y = y_0$ per $x \to +\infty$ e $y = 0$ per $x \to +\infty$.

Da questa discussione ricaviamo la seguente descrizione qualitativa delle soluzioni:



Prova scritta del 20 giugno 2013

Esercizio 1 Stabilire per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{1}{(\ln n)^2} \left(\frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n} \right) \right]^{\lambda}$$

è convergente.

Esercizio 2 Siano a, b, c, d numeri reali positivi. Si consideri la successione definita per induzione ponendo:

$$x_0 = a; \qquad x_{n+1} = (x_n^{-b} + c^{-b})^{-1/b}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(a) Si provi che $x_n \to 0$.

(b) Si scriva un'espressione esplicita per x_n in termini dei parametri a, b, c, e se ne deduca uno sviluppo asintotico della forma

$$x_n = \frac{k}{n^p} \left(1 + \mathrm{o}(1)\right), \quad n \to \infty,$$

con opportune costanti positive k e p dipendenti da a, b, c.

(c) (facoltativo) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione verificante lo sviluppo

$$f(x) = x - d\, x^{b+1} + \mathrm{o}(x^{b+1}) \quad \text{per } x \to 0.$$

Si provi che per ogni $a > 0$ in un opportuno intorno di 0 la successione definita da

$$x_0 = a; \qquad x_{n+1} = f(x_n), \quad n \in \mathbb{N},$$

ammette uno sviluppo della forma

$$x_n = \frac{1}{n^p}\left(1 + \mathrm{o}(1)\right), \qquad n \to \infty,$$

con certe costanti positive k e p dipendenti da b e d.

Esercizio 3 Sia $u : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1, strettamente positiva e crescente.

(a) Si provi che

$$0 \le \int_a^b \frac{1}{u(x)}\,dx - \int_a^b \frac{1}{u(x) + u'(x)}\,dx \le \frac{1}{u(a)} - \frac{1}{u(b)}, \quad 0 \le a < b < \infty.$$

(b) Se ne deduca che

$$\int_0^\infty \frac{1}{u(x)}\,dx < \infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \int_0^\infty \frac{1}{u(x) + u'(x)}\,dx < \infty.$$

Risoluzione

Esercizio 1 La serie è a termini positivi. Ricordando che

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \mathrm{o}(x^4) \quad \text{ per } x \to 0,$$

otteniamo la stima

$$\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n} = \frac{1}{6n^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^4}\right) \quad \text{ per } n \to \infty;$$

perciò la serie data, in virtù del criterio del confronto asintotico, ha lo stesso comportamento della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{2\lambda}\, n^{3\lambda}};$$

dato che per $\lambda = \frac{1}{3}$ questa si riduce alla serie divergente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{2/3}}$, per confronto la serie data diverge per ogni $\lambda \le \frac{1}{3}$, mentre, per confronto asintotico con la serie armonica generalizzata di parametro 3λ, essa converge per ogni $\lambda > \frac{1}{3}$.

Esercizio 2 (a) La funzione $g(x) = (x^{-b} + c^{-b})^{-1/b}$ da $]0, \infty[$ in $]0, \infty[$ si estende ad un omeomorfismo crescente $G_{b,c} : [0, \infty[\to [0, c[$, dato da

$$G_{b,c}(x) = \frac{x}{\left[1 + \left(\frac{x}{c}\right)^b\right]^{1/b}},$$

il quale verifica $G_{b,c}(x) < x$ per ogni $x > 0$. Osserviamo che risulta $x_n = G^n_{b,c}(a)$, ove $G^n_{b,c} = G_{b,c} \circ \cdots \circ G_{b,c}$ (iterata n-sima). Si vede facilmente che x_n è una successione decrescente e positiva: infatti $x_0 > 0$ e $x_{n+1} = G_{b,c}(x_n) > 0$, ed inoltre $x_{n+1} = G_{b,c}(x_n) < x_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Perciò $\{x_n\}$ ha un limite $L \ge 0$, che verifica $L = G_{b,c}(L)$: ne segue subito $L = 0$.

(b) Dalla definizione segue che $x_{n+1}^{-b} = x_n^{-b} + c^{-b}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$; da qui, con una facilissima induzione, si ricava che $x_n^{-b} = x_0^{-b} + nc^{-b}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Ne deriva, per $n \to \infty$,

$$x_n = \left[nc^{-b}\left(1 + \frac{a^{-b}c^b}{n}\right)\right]^{-1/b} = \frac{c}{n^{1/b}}\left(1 + \frac{a^{-b}c^b}{n}\right)^{-1/b} = \frac{c}{n^{1/b}}\left(1 + \mathrm{o}(1)\right),$$

che è lo sviluppo cercato.

(c) Utilizzando lo sviluppo di Taylor

$$\frac{1}{(1+t)^{1/b}} = 1 - \frac{1}{b}\,t + \mathrm{o}(t) \qquad \text{per } t \to 0,$$

otteniamo che $G_{b,c}$ ammette lo sviluppo per $x \to 0$

$$G_{b,c}(x) = \frac{x}{\left[1 + \left(\frac{x}{c}\right)^b\right]^{1/b}} = x\left(1 - \frac{c^{-b}}{b}\,x^b + \mathrm{o}(x^b)\right) = x - \frac{c^{-b}}{b}\,x^{b+1} + \mathrm{o}(x^{b+1}).$$

La funzione f dell'ipotesi corrisponde a $G_{b,\overline{c}}$ con $\overline{c} = (bd)^{-1/b}$: infatti

$$G_{b,\overline{c}}(x) = x - dx^{b+1} + \mathrm{o}(x^{b+1}) = f(x) + \mathrm{o}(x^{b+1}).$$

Perciò, fissati c_1 e c_2 con $0 < c_1 < \overline{c} < c_2$, si ricava per ogni x in un opportuno intervallo $[0, \varepsilon]$

$$G_{b,c_1}(x) \le f(x) \le G_{b,c_2}(x).$$

Iterando, e tenendo conto della monotonia di G_{b,c_1} e G_{b,c_2}, si ha anche

$$G^n_{b,c_1}(x) \le f^n(x) \le G^n_{b,c_2}(x) \qquad \forall n \in \mathbb{N}^+.$$

Essendo $x_n = f^n(a)$, utilizzando lo sviluppo del punto (b) si conclude che

$$\frac{c_1}{n^{1/b}}\,(1+\mathrm{o}(1)) \le x_n \le \frac{c_2}{n^{1/b}}\,(1+\mathrm{o}(1)) \quad \text{per } n \to \infty,$$

da cui per l'arbitrarietà di c_1 e c_2

$$x_n = \frac{\overline{c}}{n^{1/b}}\,(1+\mathrm{o}(1)) \quad \text{per } n \to \infty;$$

ne segue la tesi con $k = \overline{c} = (bd)^{-1/b}$ e $p = -1/b$.

Esercizio 3 (a) Essendo u di classe C^1 con $u' \ge 0$ e $u > 0$, gli integrali di $1/u$ e $1/(u+u')$ hanno senso e chiaramente $1/u \ge 1/(u+u')$, da cui

$$0 \le \int_a^b \frac{1}{u(x)}\,dx - \int_a^b \frac{1}{u(x)+u'(x)}\,dx.$$

D'altra parte

$$\frac{1}{u(x)} - \frac{1}{u(x)+u'(x)} = \frac{u'(x)}{u(x)[u(x)+u'(x)]} \le \frac{u'(x)}{u(x)^2}\,;$$

quindi

$$\int_a^b \frac{1}{u(x)}\,dx - \int_a^b \frac{1}{u(x)+u'(x)}\,dx \le \int_a^b \frac{u'(x)}{u(x)^2}\,dx = -\left[\frac{1}{u(x)}\right]_a^b = \frac{1}{u(a)} - \frac{1}{u(b)}\,.$$

(b) È chiaro che se $1/u$ ha integrale finito in $[0,\infty[$, allora

$$\int_0^\infty \frac{1}{u(x)+u'(x)}\,dx \le \int_0^\infty \frac{1}{u(x)}\,dx < \infty.$$

Viceversa, supponiamo che $1/(u+u')$ abbia integrale finito in $[0,\infty[$; allora utilizzando il risultato della parte (a) con $a = 0$ otteniamo

$$\int_0^b \frac{1}{u(x)}\,dx \le \int_0^\infty \frac{1}{u(x)+u'(x)}\,dx + \frac{1}{u(0)}\,.$$

Ne segue, ricordando che $u > 0$ e quindi $b \mapsto \int_0^b \frac{1}{u(x)}\,dx$ è crescente,

$$\int_0^\infty \frac{1}{u(x)}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{1}{u(x)}\,dx \le \int_0^\infty \frac{1}{u(x)+u'(x)}\,dx + \frac{1}{u(0)} < \infty.$$

Prova scritta del 15 luglio 2013

Esercizio 1 Si consideri la somma parziale della serie armonica generalizzata, dipendente dal parametro $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$S(n) := \sum_{1 \le k \le n} \frac{1}{k^\lambda}.$$

Per $0 < a \le b$ assegnati, si studi la quantità $S(bn) - S(an)$ per $n \to +\infty$. Precisamente:

(a) si metta in relazione $S(bn) - S(an)$ con una opportuna somma di Riemann della funzione $f(x) := x^{-\lambda}$, $x > 0$;

(b) si trovino delle costanti $c > 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, dipendenti da a, b, λ, per le quali valga la stima asintotica:

$$S(bn) - S(an) = c\, n^\alpha \,(1 + \mathrm{o}(1)) \qquad \text{per } n \to +\infty.$$

Esercizio 2 Siano a, b, c numeri positivi con $a < b < c$. Si provi che:

(a) l'equazione

$$a^x + b^x = c^x$$

ha una e una sola soluzione reale $\overline{x}$;

(b) risulta

$$0 < \overline{x} < \frac{\ln 2}{\ln c - \ln b}\,.$$

Esercizio 3 Siano $f, g :]a, b[\to \mathbb{R}$ funzioni non costanti e derivabili. Supponiamo che:

(a) f e g non abbiano zeri comuni in $]a, b[$;

(b) si abbia $f'g - fg' = 0$ in $]a, b[$.

Si mostri che g non si annulla in $]a, b[$, e che f/g è costante in $]a, b[$.

Risoluzione

Esercizio 1 Supponiamo, per fissare le idee, $\lambda > 0$. Consideriamo la suddivisione dell'intervallo $[a, b]$ seguente:

$$\sigma_n := \{a\} \cup \{k/n : an < k < bn\} \cup \{b\}$$

allora si ha

$$S(bn) - S(an) = \sum_{an<k\leq bn} \frac{1}{k^\lambda} = n^{1-\lambda} \sum_{a<k/n\leq b} \frac{1}{n}\Big(\frac{k}{n}\Big)^{-\lambda} = n^{1-\lambda}\, s(f, \sigma_n).$$

D'altra parte si ha

$$\int_a^b x^{-\lambda}\, dx - s(f, \sigma_n) < S(f, \sigma_n) - s(f, \sigma_n) \leq \frac{1}{n}(a^{-\lambda} - b^{-\lambda}),$$

da cui

$$s(f, \sigma_n) = \int_a^b x^{-\lambda}\, dx\, (1 + O(1/n)) = \int_a^b x^{-\lambda}\, dx\, (1 + o(1)) \quad \text{per } n \to \infty;$$

pertanto

$$S(bn) - S(an) = n^{1-\lambda}\, s(f, \sigma_n) = n^{1-\lambda} \int_a^b x^{-\lambda}\, dx\, (1 + o(1)) \quad \text{per } n \to \infty.$$

Quindi si ha la tesi con $\alpha := 1 - \lambda$ e con

$$c := \begin{cases} \dfrac{b^{1-\lambda} - a^{1-\lambda}}{1-\lambda} & \text{se } \lambda \neq 1 \\ \ln \dfrac{b}{a} & \text{se } \lambda = 1. \end{cases}$$

In modo analogo si tratta il caso $\lambda < 0$, con l'unica differenza che in tal caso si ha $S(bn) - S(an) = n^{1-\lambda}\, S(f, \sigma_n)$.

Esercizio 2 (a) Riscriviamo l'equazione data nella forma

$$g(x) := 1 + \Big(\frac{a}{b}\Big)^x = \Big(\frac{c}{b}\Big)^x =: h(x).$$

Dato che $\frac{a}{b} < 1 < \frac{c}{b}$, la funzione g è continua e strettamente decrescente, con

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0,$$

mentre la funzione h è continua e strettamente crescente, con

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty.$$

Per il teorema dei valori intermedi, applicato alla funzione continua e strettamente monotona $g - h$, vi è un unico $\overline{x} \in \mathbb{R}$ tale che $g(\overline{x}) = h(\overline{x})$.
(b) Dato che $g(0) = 2 > 1 = h(0)$, deve essere $\overline{x} > 0$. Dato che $2 = g(0) > g(\overline{x}) = h(\overline{x})$, deve essere

$$\left(\frac{c}{b}\right)^{\overline{x}} < 2,$$

ossia

$$\overline{x} < \frac{\ln 2}{\ln \frac{c}{b}}.$$

Esercizio 3 Dall'ipotesi **(b)** segue che f/g assume valore costante in ogni componente connessa dell'aperto $A = \{x \in]a,b[: g(x) \neq 0\}$. D'altra parte, sia $]p,q[$ una di tali componenti connesse (diversa da $]a,b[$, altrimenti non ci sarebbe niente da dimostrare); se f/g assume valore γ in tale intervallo, si ha, supposto ad esempio $a < p$:

$$\lim_{x\to p^+} g(x) = 0, \qquad \lim_{x\to p^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \gamma,$$

e questo implica che

$$\lim_{x\to p^+} f(x) = 0,$$

altrimenti avremmo $f(p) \neq 0$, $g(p) = 0$ e dunque $f(x)/g(x)$ divergerebbe per $x \to p^+$. Ma allora $f(p) = g(p) = 0$, contraddicendo l'ipotesi **(a)**: ne segue che $p = a$. In modo del tutto analogo si trova un assurdo supponendo $q < b$. Ne deriva che l'aperto A coincide con tutto $]a,b[$, ossia g non si annulla in $]a,b[$ e dunque f/g è costante nell'intero intervallo $]a,b[$.

Prova scritta del 18 settembre 2013

Esercizio 1 **(i)** Sia $\{a_n\}$ una successione reale tale che

$$\exists \lim_{n\to\infty} a_n = L, \quad \text{con } L \in [-\infty, +\infty];$$

si provi che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i = L.$$

(ii) Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni reali tali che

$$\exists \lim_{n\to\infty} a_n = L, \quad \exists \lim_{n\to\infty} b_n = M, \quad \text{con } L, M \in]-\infty, +\infty[\,;$$

si provi che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i b_{n-i+1} = LM.$$

Esercizio 2 Sia $f : [1, \infty[\to \mathbb{R}$ una funzione uniformemente continua; si provi che

$$\sup_{x\geq 1} \frac{|f(x)|}{x} < \infty.$$

È vero il viceversa?

Esercizio 3 Si calcoli, se esiste, l'integrale improprio

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2(x^2-1)^{1/2}}\, dx.$$

Risoluzione

Esercizio 1 (i) Supponiamo dapprima $L \in \mathbb{R}$. Sia $\varepsilon > 0$: per ipotesi, esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che

$$|a_n - L| < \varepsilon \qquad \forall n > \nu.$$

Ora possiamo scrivere per ogni $n > \nu$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\nu} a_i + \frac{1}{n} \sum_{i=\nu+1}^{n} a_i\,.$$

Il primo addendo a secondo membro è infinitesimo per $n \to \infty$, poiché

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\nu} a_i \right| \leq \frac{M}{n}, \quad \text{ove } M = \max_{1\leq i\leq \nu} |a_i|;$$

per il secondo addendo invece si ha

$$\frac{n-\nu}{n}(L-\varepsilon) < \frac{1}{n} \sum_{i=\nu+1}^{n} a_i < \frac{n-\nu}{n}(L+\varepsilon) \quad \forall n > \nu,$$

da cui, grazie al fatto che $\frac{n-\nu}{n} \to 1$ per $n \to \infty$, per n sufficientemente grande risulta

$$L - 2\varepsilon < \frac{1}{n} \sum_{i=\nu+1}^{n} a_i < L + 2\varepsilon.$$

Ciò prova la tesi nel caso $L \in \mathbb{R}$.
Se $L = +\infty$, dato $M > 0$ e scelto $\nu \in \mathbb{N}$ tale che

$$a_n > M \qquad \forall n > \nu,$$

il primo termine sopra scritto si stima allo stesso modo, mentre per il secondo si ha ancor più semplicemente

$$\frac{n-\nu}{n} M < \frac{1}{n} \sum_{i=\nu+1}^{n} a_i \quad \forall n > \nu,$$

da cui la tesi come prima. Il caso $L = -\infty$ è del tutto simile.
(ii) Fissato $\varepsilon > 0$, scegliamo $\nu \in \mathbb{N}$ tale che

$$|a_n - L| < \varepsilon, \quad |b_n - M| < \varepsilon \qquad \forall n > \nu.$$

Non sembra semplice procedere come nel caso precedente. Allora scriviamo

$$\begin{aligned} &\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i b_{n-i+1} - LM = \\ &\quad = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (a_i - L) b_{n-i+1} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} L(b_{n-i+1} - M) = \\ &\quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (a_i - L) b_{n-i+1} + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} L(b_j - M). \end{aligned}$$

Osserviamo ora che le successioni a_n e b_n, essendo convergenti, sono entrambe limitate in modulo da una costante $K > 0$. Allora, decomponendo le due sommatorie, come si è fatto in (i), sommando fra 1 e ν e fra $\nu+1$ e n, si ha

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i b_{n-i+1} - LM\right| \le \\
&\quad \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\nu}(a_i - L)b_{n-i+1} + \frac{1}{n}\sum_{i=\nu+1}^{n}(a_i - L)b_{n-i+1} + \\
&\qquad + \sum_{j=1}^{\nu} L(b_j - M) + \sum_{j=\nu+1}^{n} L(b_j - M) \le \\
&\quad \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\nu} |a_i - L| K + \frac{n-\nu}{n}\,\varepsilon\, K + \sum_{j=1}^{\nu} L|b_j - M| + \frac{n-\nu}{n}\, L\,\varepsilon \le \\
&\quad \le \frac{\nu}{n}(K+L)K + \frac{n-\nu}{n}\,\varepsilon\, K + \frac{\nu}{n}(K+M)L + \frac{n-\nu}{n}\, L\,\varepsilon \le \\
&\quad \le \frac{\nu}{n} C_1 + \frac{n-\nu}{n}\, C_2\,\varepsilon.
\end{aligned}
$$

Ne segue, per n sufficientemente grande e per un'opportuna costante $C > 0$

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i b_{n-i+1} - LM\right| < C\varepsilon,$$

che è la tesi.

Esercizio 2 Per ipotesi, scelto $\varepsilon = 1$, esiste $\delta > 0$ tale che

$$|f(x) - f(y)| \le 1 \quad \forall x, y \ge 1 \text{ con } |x - y| \le \delta.$$

Poniamo per comodità

$$K = \sup_{1 \le x \le 1+\delta} |f(x)|.$$

Se $x > 1$, esiste un unico $n \in \mathbb{N}$, dipendente ovviamente da x, tale che $1 + n\delta \le x < 1 + (n+1)\delta$: precisamente, n è la parte intera di $\frac{x-1}{\delta}$. Si ha allora, per ogni $x > 1$, scelto tale n,

$$
\begin{aligned}
|f(x)| &= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\big(f(x-k\delta) - f(x-(k+1)\delta)\big) + f(x-n\delta)\right| \le \\
&\le \sum_{k=0}^{n-1} |f(x-k\delta) - f(x-(k+1)\delta)| + |f(x-n\delta)| \le \\
&\le n + K \le \frac{x-1}{\delta} + K < \frac{x}{\delta} + K,
\end{aligned}
$$

otteniamo
$$\frac{|f(x)|}{x} \le \frac{1}{\delta} + \frac{K}{x} \le \frac{1}{\delta} + K \qquad \forall x \ge 1.$$
Il viceversa è falso: vi sono funzioni continue, ma non uniformemente continue, per le quali vale la relazione
$$\sup_{x\ge 1} \frac{|f(x)|}{x} < \infty :$$
ad esempio, $f(x) = \sin(x^2)$ è continua e verifica certamente tale condizione, e tuttavia essa non è uniformemente continua in $[1, \infty[$. Infatti, posto
$$x_k = \sqrt{2k\pi + \frac{3}{2}}, \quad y_k = \sqrt{2k\pi + \frac{1}{2}},$$
si ha
$$x_k - y_k = \frac{1}{\sqrt{2k\pi + \frac{3}{2}} + \sqrt{2k\pi + \frac{1}{2}}} \to 0 \quad \text{per } k \to +\infty,$$
ma
$$|f(x_k) - f(y_k)| = 2 \quad \forall k \in \mathbb{N}^+.$$

Esercizio 3 L'integrale esiste finito, perché in un intorno di 1 l'integrando si comporta come $c/\sqrt{x-1}$, mentre all'infinito il suo andamento è del tipo c/x^3. Per calcolarlo conviene cambiare variabile, ponendo $x = \cosh t$; si ha allora $dx = \sinh t\, dt$ e dunque, essendo $\cosh^2 t - 1 = \sinh^2 t$, si trova
$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2(x^2-1)^{1/2}}\, dx = \int_0^\infty \frac{1}{\cosh^2 t}\, dt = \left[\frac{\sinh t}{\cosh t}\right]_0^\infty = 1.$$

Prova scritta del 28 gennaio 2014

Esercizio 1 Scrivere in forma trigonometrica il numero complesso
$$\left(\frac{-2-\sqrt{15}+2i\sqrt{3}-i\sqrt{5}}{4+i2\sqrt{5}}\right)^{2014}.$$

Esercizio 2 Stabilire se l'integrale
$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-2t}+1}{e^t-1}\, dt$$

è convergente; in tal caso calcolarne il valore.
Esercizio 3 Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} e^{-2x^2} - \cos(2x) + x^4 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Stabilire se l'origine sia un punto di massimo o di minimo locale per f, o nessuno dei due.

Risoluzione

Esercizio 1 Poniamo

$$z = \left(\frac{-2 - \sqrt{15} + 2i\sqrt{3} - i\sqrt{5}}{4 + i2\sqrt{5}} \right)^{2014} .$$

Moltiplicando a numeratore e denominatore per $(4 - i2\sqrt{5})$, si ottiene

$$\begin{aligned} z &= \frac{(4 - i2\sqrt{5})\big[-(2+\sqrt{15}) + i(2\sqrt{3} - \sqrt{5})\big]}{(4 - i2\sqrt{5})(4 + i2\sqrt{5})} = \\ &= \frac{1}{36}(4 - i2\sqrt{5})\big[-(2+\sqrt{15}) + i(2\sqrt{3} - \sqrt{5})\big] = \\ &= \frac{1}{36}\big[-4(2+\sqrt{15}) + 2\sqrt{5}(2\sqrt{3} - \sqrt{5})\big] + \\ &\qquad + \frac{1}{36}i\big[2\sqrt{5}(2+\sqrt{15}) + 4(2\sqrt{3} - \sqrt{5})\big] = \\ &= \frac{1}{36}\big(-8 - 4\sqrt{15} + 4\sqrt{15} - 10\big) + \frac{1}{36}i\big(4\sqrt{5} + 10\sqrt{3} + 8\sqrt{3} - 4\sqrt{5}\big) = \\ &= \frac{1}{36}\left(-18 + 18\sqrt{3}i\right) = -\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2} . \end{aligned}$$

Essendo

$$z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = e^{i\,\frac{2\pi}{3}}$$

si ha $z^3 = 1$ e finalmente

$$z^{2014} = z^{3\cdot 671+1} = (z^3)^{671} z = z = -\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2} .$$

Esercizio 2 La funzione integranda è continua e positiva sulla semiretta $[1, \infty[$; dunque l'integrale improprio esiste. Inoltre

$$\frac{e^{-2t}+1}{e^t-1} \simeq e^{-t} \qquad \text{per } x \to= \infty,$$

quindi l'integrale improprio è finito per il teorema di confronto. Per calcolarlo, è utile fare il cambiamento di variabile $x = e^{-t}$, che implica $dx = -e^{-t}\,dt$; quindi l'integrale improprio si riduce all'integrale di Riemann di una funzione razionale regolare sull'intervallo $[0, 1/e]$:

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \frac{e^{-2t}+1}{e^t-1}\,dt &= \int_1^{+\infty} \frac{e^{-2t}+1}{1-e^{-t}} e^{-t}\,dt = -\int_{e^{-1}}^0 \frac{x^2+1}{1-x}\,dx = \\
&= \int_0^{e^{-1}} \frac{x^2+1}{1-x}\,dx = \int_0^{e^{-1}} \frac{2-(1-x)(1+x)}{1-x}\,dx = \\
&= \int_0^{e^{-1}} \left(\frac{2}{1-x} - 1 - x \right) dx = \\
&= \left[-2\log(1-x) - x - x^2/2 \right]_0^{e^{-1}} = \\
&= -2\log(1-e^{-1}) - e^{-1} - \frac{1}{2}e^{-2} = \\
&= 2 - 2\log(e-1) - \frac{1}{e} - \frac{1}{2e^2}\,.
\end{aligned}$$

Esercizio 3 Dagli sviluppi di Taylor nel punto 0 dell'esponenziale e del coseno si ha:

$$e^{-2x^2} = 1 - 2x^2 + \frac{(2x^2)^2}{2} + o(x^4) = 1 - 2x^2 + 2x^4 + o(x^4) \quad \text{per } x \to 0,$$

$$\begin{aligned}
\cos(2x) &= 1 - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^4}{4!} + o(x^4) = \\
&= 1 - \frac{4x^2}{2} + \frac{16x^4}{24} + o(x^4) = 1 - 2x^2 + \frac{2x^4}{3} + o(x^4) \quad \text{per } x \to 0.
\end{aligned}$$

Si ha perciò in un intorno di 0, essendo $\sin\frac{1}{x} \geq -1$,

$$\begin{aligned}
f(x) &= e^{-2x^2} - \cos(2x) + x^4 \sin\frac{1}{x} = \\
&= \left(\frac{4}{3} + \sin\frac{1}{x} + o(1) \right) x^4 \geq \left(\frac{1}{3} + o(1) \right) x^4.
\end{aligned}$$

Poiché questa quantità è positiva in un intorno di 0, concludiamo che $x = 0$ è un punto di minimo locale *stretto* per la funzione f.

Prova scritta del 18 febbraio 2014

Esercizio 1 Per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ sia

$$z_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{i}{k}\right).$$

(i) La successione $\{|z_n|\}$ converge in $\mathbb{R}$?

(ii) La successione $\{z_n\}$ converge in $\mathbb{C}$?

Esercizio 2 Sia $f : [0,1] \to [0,1]$ una funzione continua e strettamente decrescente.

(i) Si provi che per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ l'equazione

$$x = f(x)^n$$

ha una ed una sola soluzione $x_n \in]0,1[$.

(ii) Dimostrare che esistono i due limiti

$$\lim_{n\to\infty} x_n\,, \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}\,,$$

e calcolarli.

Esercizio 3 Sia $g : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ una funzione non negativa, decrescente, infinitesima per $x \to +\infty$. Si provi che l'integrale improprio

$$\int_0^\infty g(x) \sin x \, dx$$

esiste finito.

Risoluzione

Esercizio 1 (i) Calcoliamo il modulo $|z_n|$: si ha

$$|z_n| = \prod_{k=1}^{n} \sqrt{1 + \frac{1}{k^2}} = \sqrt{\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k^2}\right)},$$

quindi

$$\exists \lim_{n\to\infty} |z_n| = \sqrt{\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k^2}\right)};$$

questo prodotto infinito è convergente, perché il suo logaritmo è dato dalla serie

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{k^2}\right)$$

la quale converge per confronto con la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

(ii) I numeri $1+\frac{i}{k}$ giacciono tutti nel primo quadrante, quindi si ha

$$\arg\left(1+\frac{i}{k}\right) = \arctan\frac{1}{k} \qquad \forall k = 1, \ldots, n.$$

perciò, se scriviamo

$$z_n = |z_n| e^{i\vartheta_n}$$

allora si ha

$$\vartheta_n = \sum_{k=1}^{n} \arg\left(1+\frac{i}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \arctan\frac{1}{k};$$

Dunque l'angolo ϑ_n, per confronto con la serie armonica, ha limite $+\infty$ per $n \to \infty$: ciò significa che i numeri z_n si trovano lungo una spirale infinita attorno all'origine, la quale per $n \to \infty$ si avvicina indefinitamente alla circonferenza centrata in 0 di raggio pari a

$$\sqrt{\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k^2}\right)}.$$

In definitiva la successione $\{z_n\}$ non converge in $\mathbb{C}$.

Esercizio 2 (i) Per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ la funzione $x \mapsto f(x)^n$ è continua e strettamente decrescente: in particolare, deve essere $f(0) > f(1) \geq 0$ e $f(1) < f(0) \leq 1$. Quindi la funzione $h_n(x) = x - f(x)^n$ è strettamente crescente, con $h_n(0) = -f(0)^n < 0$ e $h_n(1) = 1 - f(1)^n > 0$. Per il teorema di esistenza degli zeri, esiste un punto $x_n \in]0,1[$ tale che $h_n(x_n) = 0$, ed esso è unico per stretta monotonia. Pertanto

$$x = f(x)^n \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = x_n.$$

(ii) Proviamo che la successione $\{x_n\}$ è strettamente decrescente. Anzitutto osserviamo che, essendo $0 < f(x) < 1$ per ogni $x \in]0,1[$, si ha anche $f(x)^n > f(x)^{n+1}$ per ogni $x \in]0,1[$ e per ogni $n \in \mathbb{N}^+$. Dunque $h_n(x) < h_{n+1}(x)$ per ogni $x \in]0,1[$ e per ogni $n \in \mathbb{N}^+$.
Ciò premesso si ha:

$$h_{n+1}(x_n) > h_n(x_n) = 0, \qquad h_{n+1}(x_{n+1}) = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}^+,$$

da cui, per la stretta crescenza di h_{n+1}, deduciamo $x_n > x_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$.
Dunque esiste

$$\overline{x} = \lim_{n\to\infty} x_n \in [0,1[\,.$$

Notiamo ora che si ha $\overline{x} < x_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$; quindi, per stretta crescenza, $h_n(\overline{x}) < h_n(x_n) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, ossia $\overline{x} - f(\overline{x})^n < 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$. Passando al limite per $n \to \infty$ deduciamo allora

$$\overline{x} = \lim_{n\to\infty} f(\overline{x})^n = 0.$$

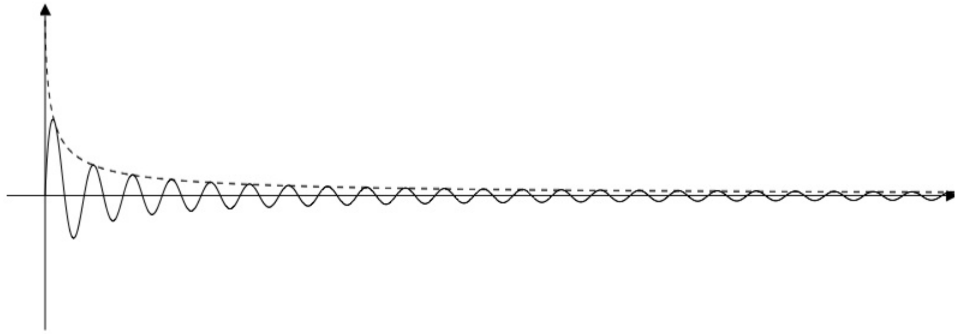
Inoltre, essendo f continua, dalla relazione $x_n = f(x_n)^n$ segue che

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\overline{x}) = f(0).$$

Esercizio 3 Dobbiamo provare che il limite

$$\lim_{c\to\infty} \int_0^c g(x)\, \sin x\, dx$$

esiste finito.



Osserviamo che se $n \in \mathbb{N}^+$ e se y_n è un qualunque valore compreso nell'intervallo $[n\pi, (n+1)\pi]$ allora

$$\left| \int_{n\pi}^{y_n} g(x)\, \sin x \, dx \right| \leq g(n\pi) |\cos n\pi - \cos y_n| \leq 2\, g(n\pi),$$

e dunque

$$\lim_{n \to \infty} \left| \int_{n\pi}^{y_n} g(x)\, \sin x \, dx \right| = 0.$$

Pertanto possiamo limitarci a calcolare il limite

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^{n\pi} g(x)\, \sin x \, dx :$$

infati, se questo esiste finito e vale L, allora, scelto $\overline{n} = \left[\frac{c}{\pi}\right]$, quando $c \to \infty$ si ha anche $\overline{n} \to \infty$ e dunque

$$\int_0^c g(x)\, \sin x \, dx = \int_0^{\overline{n}\pi} g(x)\, \sin x \, dx + \int_{\overline{n}\pi}^c g(x)\, \sin x \, dx \to L + 0 = L.$$

Valutiamo allora l'integrale $\int_0^{n\pi} g(x)\, \sin x \, dx$. Si ha

$$\begin{aligned} \int_0^{n\pi} g(x)\, \sin x \, dx &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} g(x)\, \sin x \, dx = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{\pi} g(t + k\pi) \sin(t + k\pi)\, dt = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \int_0^{\pi} g(t + k\pi)\, \sin t \, dt. \end{aligned}$$

Le quantità $\int_0^{\pi} g(t + k\pi)\, \sin t \, dt$ sono positive e decrescenti: infatti g è non negativa e decrescente, per cui

$$0 \leq \int_0^{\pi} g(t + (k+1)\pi)\, \sin t \, dt \leq \int_0^{\pi} g(t + k\pi)\, \sin t \, dt \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Inoltre, essendo g infinitesima per $x \to +\infty$,

$$\lim_{k \to \infty} \int_0^{\pi} g(t + k\pi)\, \sin t \, dt \leq 2 \lim_{k \to \infty} g(k\pi) = 0.$$

Dunque, in virtù del criterio di Leibniz, possiamo concludere che

$$\begin{aligned}
\exists \lim_{n\to\infty} \int_0^{n\pi} g(x)\, \sin x \, dx \quad &= \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} g(x)\, \sin x \, dx = \\
&= \quad \sum_{k=0}^{\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} g(x)\, \sin x \, dx \ \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

cosicché

$$\int_0^{\infty} g(x)\, \sin x \, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} g(x)\, \sin x \, dx \ \in \mathbb{R}.$$