13

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES. — *Une méthode unifiée pour l'étude des équations linéaires non autonomes, paraboliques dans les espaces de Banach.* Note de **Paolo Acquistapace** et **Brunello Terreni,** présentée par Jacques-Louis Lions.

Pour résoudre le problème de Cauchy abstrait non autonome parabolique, on fait une hypothèse qui autorise un traitement unifié de plusieurs cas où les domaines des opérateurs A (t) varient avec t.

PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS. — A unified method for studying non autonomous linear parabolic equations in Banach spaces.

We consider the non autonomous abstract Cauchy problem of parabolic type. Our assumptions provide a unified treatment which applies to many situations where the domains of the operators may change with t.

0. INTRODUCTION. — Soit E un espace de Banach. On étudie le problème de Cauchy suivant :

$$(0.1)\qquad \begin{cases} u'(t)-\mathrm{A}(t)\,u(t)=f(t), & t\in[0,\mathrm{T}],\\ u(0)=x, & \end{cases}$$

où $\mathrm{T}>0$, $x\in\mathrm{E}$ et $f:[0,\mathrm{T}]\to\mathrm{E}$ est une fonction continue.

On considère le cas parabolique i.e. : pour chaque $t\in[0,\mathrm{T}]$ $\mathrm{A}(t)$ est un opérateur linéaire fermé, générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique $\{e^{\xi\mathrm{A}(t)}\}_{\xi\geqq 0}$ et de domaine $\mathrm{D}_{\mathrm{A}(t)}\subseteq\mathrm{E}$ qui peut varier avec t. Plus précisément on suppose :

HYPOTHÈSE H.1. — *Il existe* $\theta_0\in]\pi/2,\pi[$ *et* $\mathrm{M}>0$ *tels que :*

(i) $\forall t\in[0,\mathrm{T}]$ *l'ensemble résolvant* $\rho(\mathrm{A}(t))\supset\Sigma_{\theta_0}$ *où :*

$$\Sigma_{\theta_0}=\{\mathrm{Z}\in\mathbb{C} : |\arg \mathrm{Z}|\leqq\theta_0\}\cup\{0\};$$

$$\text{(ii)}\qquad \|(\lambda-\mathrm{A}(t))^{-1}\|\leqq\frac{\mathrm{M}}{1+|\lambda|},\qquad \forall\lambda\in\Sigma_{\theta_0},\quad \forall t\in[0,\mathrm{T}].$$

$\mathrm{D}_{\mathrm{A}(t)}$ n'est pas supposé dense dans E et donc le semi-groupe $e^{\xi\mathrm{A}(t)}$ n'est pas nécessairement continu en $\xi=0$.

On cherche des solutions u du problème (0,1) qui sont continûment dérivables sur [0, T]. On démontre existence, unicité et régularité maximales de la solution, lorsque f est régulière et f et x vérifient des conditions de compatibilité.

On fait l'hypothèse suivante :

HYPOTHÈSE H.2. — *Il existe* $\mathrm{B}>0$, $\mathrm{K}\in\mathbb{N}$, $\alpha_1,\ldots,\alpha_{\mathrm{K}}$, $\beta_1,\ldots,\beta_{\mathrm{K}}\in\mathbb{R}$ tels que :

$$\text{(i)}\qquad -1\leqq\beta_j<\alpha_j-1\leqq 1,\qquad j=1\ldots\mathrm{K};$$

$$\text{(ii)}\qquad \begin{cases} \|\mathrm{A}(t)(\lambda-\mathrm{A}(t))^{-1}[\mathrm{A}(t)^{-1}-\mathrm{A}(s)^{-1}]\|_{\mathrm{E}\to\mathrm{E}}\leqq\mathrm{B}\displaystyle\sum_{j=1}^{\mathrm{K}}(t-s)^{\alpha_j}|\lambda|^{\beta_j},\\ \forall\lambda\in\Sigma_{\theta_0},\quad 0\leqq s\leqq t\leqq\mathrm{T}, \end{cases}$$

et on pose :

$$(0.2)\qquad \delta=\min_{1\leqq j\leqq k}(\alpha_j-\beta_j-1).$$

0249-6291/85/03010107 $ 2.00

Remarque 0.1. — La représentation usuelle du semi-groupe $e^{\xi A(t)}$ est donnée par l'intégrale de Dunford :

$$(0.3)\qquad e^{\xi A(t)} = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma e^{\xi\lambda}(\lambda - A(t))^{-1}\,d\lambda,\qquad \xi>0.$$

où $\gamma\subset\Sigma_{\theta_0}$ est une courbe simple joignant $\infty.e^{-i\theta}$ à $\infty.e^{i\theta}$ avec $\theta\in(]\pi/2,\ \theta_0[)$.

DÉFINITION 0.3. — On dit que u : $[0, T]\to E$ est une solution stricte de (0.1) si :

(i) $\begin{cases} u\in C^1([0,T];E)\cap C([0,T];D_{A(.)}) \text{ i. e. } u(t)\in D_{A(t)}, \\ \forall t\in[0,T] \quad \text{et} \quad u,\ u',\ A(.)u(.)\in C([0,T];E);\end{cases}$

(ii) $u' - A(.)u(.) = f$ dans $[0, T]$ et $u(0)=x$.

On utilisera les espaces d'interpolation $D_{A(t)}(\sigma,\infty)$, $\sigma\in]0, 1[$ entre $D_{A(t)}$ et E qui peuvent être définis de la façon suivante :

$$(0.4)\qquad D_{A(t)}(\sigma,\infty) = \{x\in E : \sup_{s>0}\|s^\sigma A(t)(s-A(t))^{-1}x\|_E < +\infty\}.$$

On utilisera aussi l'espace :

$$B(0, T; D_{A(.)}(\sigma,\infty)) := \{u : [0,T]\to E \text{ tels que } u(t)\in D_{A(t)}(\sigma,\infty),\ \forall t\in[0,T] \text{ et } \sup_{[0,T]}\|u(t)\|_{D_{A(t)}(\sigma,\infty)} < +\infty\}.$$

1. CONSIDÉRATIONS HEURISTIQUES. — On donne ici une description heuristique de la méthode qu'on emploie pour trouver une solution de (0.1).

Supposons que u soit une solution stricte de (0.1) avec les données $x\in D_{A(0)}$ et $f\in C([0, T]; E)$ fixons $t\in[0, T]$ et posons :

$$v(s) = e^{(t-s)A(t)}u(s),\qquad s\in[0,T].$$

On a :

$$v'(s) = -A(t)e^{(t-s)A(t)}u(s) + e^{(t-s)A(t)}(A(s)u(s)+f(s))$$

et par conséquent :

$$u(t) - e^{tA(t)}x = \int_0^t A(t)e^{(t-s)A(t)}[A(t)^{-1} - A(s)^{-1}]A(s)u(s)\,ds + \int_0^t e^{(t-s)A(t)}f(s)\,ds.$$

Donc :

$$(1.1)\quad A(t)u(t) - \int_0^t A^2(t)\,e^{(t-s)A(t)}[A(t)^{-1} - A(s)^{-1}]\,A(s)u(s)\,ds = A(t)e^{tA(t)}x + A(t)\int_0^t e^{(t-s)A(t)}f(s)\,ds.$$

L'équation (1.1) est une équation intégrale de type Volterra dont le noyau est :

$$Q(t,s) = A^2(t)e^{(t-s)A(t)}[A(t)^{-1} - A(s)^{-1}],\qquad 0\leqq s<t\leqq T.$$

Comme conséquence de l'hypothèse H.2 et de la représentation (0.3) on a :

$$\|Q(t,s)\|_{E\to E} \leqq \frac{\text{Cte}}{|t-s|^{1-\delta}},\qquad (\delta \text{ défini par } (0.2)).$$

Enfin si on pose :

$$L(f,x)(t) = A(t)e^{tA(t)}x + A(t)e^{(t-s)A(t)}f(s)\,ds$$

et

$$Q(\Phi)(t)=\int_0^t Q(t, s)\Phi(s)\,ds,$$

on obtient :

$$u(t)=A(t)^{-1}[(1-Q)^{-1}L(f, x)](t), \tag{1.3}$$

qui est la formule de représentation pour u.

2. Résultats principaux. — Les résultats principaux sont les suivants :

Théorème 2.1. — *Soit* $\sigma\in]0, \delta]\cap]0, 1[$, $x\in D_{A(0)}$, $f\in C^\sigma([0, T]; E)$ *et supposons que* $A(0)x+f(0)\in\overline{D_{A(0)}}$. *Alors la fonction* u *définie par* (1.3) *est l'unique solution stricte de* (0.1) *et*

$$u'\in C^\sigma([\varepsilon, T]; E)\cap B(\varepsilon, T; D_{A(.)}(\sigma, \infty))$$

(i) *et :*

$$A(.)u(.)\in C^\sigma([\varepsilon, T]; E), \qquad \forall\varepsilon\in]0, T];$$

(ii) *on peut remplacer* ε *par zéro ci-dessus si et seulement si* $A(0)x+f(0)\in D_{A(0)}(\sigma, \infty)$.

Théorème 2.2. — *Soit :*

$$\sigma\in]0, \delta]\cap]0, 1[, \qquad x\in D_{A(0)}, \qquad f\in C([0, T]; E)\cap B(0, T; D_A(\sigma, \infty))$$

et supposons que $A(0)x\in\overline{D_{A(0)}}$. *Alors la fonction* u *définie par* (1.3) *est l'unique solution stricte de* (0,1) *et*

$$u'\in B(\varepsilon, T; D_{A(.)}(\sigma, \infty))$$

(i) *et :*

$$A(.)u(.)\in C^\sigma([\varepsilon, T]; E)\cap B(\varepsilon, T; D_{A(.)}(\sigma, \infty)), \qquad \forall\varepsilon\in]0, T];$$

(ii) *on peut remplacer* ε *par zéro ci-dessus si et seulement si* $A(0)x\in D_{A(0)}(\sigma, \infty)$.

3. Comparaison et commentaires. — On rappelle les principales hypothèses utilisées dans la littérature pour le problème (0.1) dans le cas parabolique.

Dans les cas des domaines constants on a (Tanabe [8], Sobolevskii [7], Acquistapace-Terreni [2], [3]) :

$$\begin{cases} \text{(i) } D_{A(t)}=D_{A(0)},\ \forall t\in[0, T]; \\ \text{(ii) il existe } K>0 \text{ et } \alpha\in]0, 1] \text{ tels que } \|A(t)A(s)^{-1}-I\|_{E\to E}\leqq|t-s|^\alpha. \end{cases} \tag{3.1}$$

Si le domaine peut varier avec t il y a plusieurs situations. Dans certains cas, les domaines varient, mais il y a des espaces intermédiaires entre $D_{A(t)}$ et E qui ne changent pas : plus précisément, Kato [5] suppose que le domaine de la puissance ρ-fractionnaire de $(-A(t))$ est constant :

$$\begin{cases} \text{(i) il existe } \rho\in]0, 1[\text{ tels que } \rho^{-1}\in\mathbb{N} \text{ et } D_{[-(A(t))]^\rho}\equiv D_{[-A(0)]^\rho}; \\ \text{(ii) il existe } K>0 \text{ et } \alpha\in]\rho, 1[\text{ tels que } \|[-A(t)]^\rho[-A(s)]^{-\rho}-I\|_{E\to E}\leqq K|t-s|^\alpha. \end{cases} \tag{3.2}$$

Par ailleurs, Acquistapace-Terreni [4] supposent que :

$$\begin{cases} \text{(i) il existe } \rho\in]0, 1[\text{ tels que } D_{A(t)}(\rho, \infty)\equiv D_{A(0)}(\rho, \infty); \\ \text{(ii) il existe } K>0 \text{ et } \alpha\in]\rho, 1[\text{ tels que} \\ \qquad \|A(t)^{-1}-A(s)^{-1}\|_{E\to D_{A(0)}(\rho, \infty)}\leqq K|t-s|^\alpha. \end{cases} \tag{3.3}$$

Dans le cas des domaines complètement variables, plusieurs hypothèses sont possibles : premièrement on a (Kato-Tanabe [6], Acquistapace-Terreni [1]) :

$$(3.4)\quad \begin{cases} \text{(i) } t \to (\lambda - \mathrm{A}(t))^{-1} \text{ est dérivable } \forall \lambda \in \mathrm{S}_{\theta_0} \text{ et il existe } \mathrm{K}>0 \text{ et } \alpha \in]0, 1[\text{ tels que} \\ \qquad \left\| \dfrac{\partial}{\partial t} (\mathrm{A}(t) - \lambda))^{-1} \right\|_{\mathrm{E} \to \mathrm{E}} \leqq \dfrac{\mathrm{K}}{|\lambda|^{\alpha}}; \qquad \forall \lambda \in \mathrm{S}_{\theta_0}, \quad \forall t \in [0, \mathrm{T}]; \\ \text{(ii) il existe } \mathrm{B}>0 \text{ et } \eta \in]0, 1[\text{ tels que} \\ \qquad \left\| \dfrac{d}{dt} \mathrm{A}(t)^{-1} - \dfrac{d}{ds} \mathrm{A}(s)^{-1} \right\|_{\mathrm{E} \to \mathrm{E}} \leqq \mathrm{B} |t-s|^{\eta}. \end{cases}$$

D'autre part, on peut supposer (Yagi [9]) que :

$$(3.5)\quad \begin{cases} t \to \mathrm{A}(t)^{-1} \text{ est continûment dérivable et il existe } \mathrm{K}>0 \text{ et } \rho \in]0, 1[\text{ tels que} \\ \left\| \mathrm{A}(t)(\lambda - \mathrm{A}(t))^{-1} \dfrac{d}{dt} (\mathrm{A}(t))^{-1} \right\|_{\mathrm{E} \to \mathrm{E}} \leqq \dfrac{\mathrm{K}}{1+|\lambda|^{\rho}}; \qquad \forall \lambda \in \Sigma_{\theta_0}, \quad t \in [0, \mathrm{T}]. \end{cases}$$

On peut grouper l'ensemble de ces hypothèses en deux types :

– le type (A), qui consiste en (3.1), (3.2), (3.3) et (3.5); et

– le type (B), qui consiste en (3.4). On a :

PROPOSITION 3.1. — *Les hypothèses du type* (A) *impliquent l'hypothèse* H.2.

PROPOSITION 3.2. — *Les hypothèses du type* (B) *sont indépendantes de l'hypothèse* H.2.

Remarque 3.3. — On peut remarquer que les hypothèses H.1 et H.2 permettent d'utiliser une méthode unique pour résoudre le problème (0.1) dans toutes les situations (i. e. domaines constants, domaines variables, cas intermédiaires); en particulier, dans le cas où les domaines sont complètement variables, cette méthode permet d'éviter les hypothèses de différentiabilité sur l'opérateur résolvant $(\lambda - \mathrm{A}(t))^{-1}$.

Remise le 29 avril 1985.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] P. ACQUISTAPACE et B. TERRENI, *J. Math. Anal. Appl.*, 99, 1984, p. 9-64.
[2] P. ACQUISTAPACE et B. TERRENI, *Ann. Mat. Pura Appl.* (à paraître).
[3] P. ACQUISTAPACE et B. TERRENI, *J. Funct. Anal.*, 60, 1985, p. 168-210.
[4] P. ACQUISTAPACE et B. TERRENI, Preprint, *Dipar. di Mat. Univ. di Pisa*, n° 95, 1984.
[5] T. KATO, *Nagoya Math.*, 19, 1961, p. 93-125.
[6] T. KATO et H. TANABE, *Osaka Math. J.*, 14, 1962, p. 107-133.
[7] P. E. SOBOLEVSKI, Trudy Moscow, *Mat. Obsc.*, 10, 1961, p. 197-350 (en russe), Trad. anglais-amér. *Math. Soc. Transl.*, 49, 1965, p. 1-62.
[8] H. TANABE, *Osaka Math. J.*, 12, 1960, p. 363-376.
[9] A. YAGI, *J. Math. Soc. Japan*, 28, 1976, p. 290-303.

Scuola Normale Superiore, Piazza dei Cavalieri 7, Pisa, Italie;
Département de Mathématiques, I.M.S.P., Université de Nice, Parc Valrose, 06034 *Nice Cedex.*