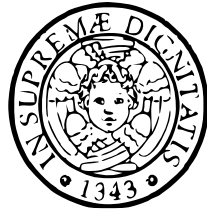


UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PISA



FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE FISICHE E NATURALI
CORSO DI LAUREA SPECIALISTICA IN MATEMATICA

TESI DI LAUREA SPECIALISTICA

Giochi Cooperativi Quasidifferenziabili

CANDIDATO

Francesca Sophia Napoli

RELATORE

Prof. Paolo Acquistapace

CONTRORELATORE

Prof. Giandomenico Mastroeni

ANNO ACCADEMICO 2006/2007

*A Pietro,
per avermi sostenuto
durante tutta la mia
carriera universitaria.*

Indice

| | |
|--|-----------|
| Introduzione | 1 |
| 1 I giochi cooperativi | 5 |
| 1.1 I giochi con n giocatori: primi concetti di soluzione | 5 |
| 1.1.1 Descrizione del gioco | 5 |
| 1.1.2 Gli equilibri di Nash | 6 |
| 1.1.3 Le multistrategie di Pareto | 9 |
| 1.2 Giochi cooperativi | 10 |
| 1.2.1 Coalizioni usuali | 11 |
| 1.2.2 Le imputazioni | 15 |
| 1.2.3 Il nucleo | 17 |
| 1.2.4 Il valore di Shapley | 18 |
| 1.3 Giochi cooperativi generalizzati | 21 |
| 1.3.1 Coalizioni generalizzate | 21 |
| 1.3.2 Il nucleo del gioco generalizzato | 22 |
| 1.3.3 Il valore di Shapley generalizzato | 27 |
| 1.3.4 Soluzioni di un gioco generalizzato | 35 |
| 2 I giochi localmente lipschitziani | 42 |
| 2.1 Il sottodifferenziale di Clarke | 42 |
| 2.2 I giochi localmente lipschitziani | 53 |
| 3 I giochi quasidifferenziabili | 58 |
| 3.1 Le funzioni quasidifferenziabili | 58 |
| 3.1.1 La differenza di insiemi compatti e convessi | 58 |
| 3.1.2 Le funzioni quasidifferenziabili | 60 |
| 3.2 I giochi quasidifferenziabili | 63 |
| 3.2.1 Le quasisoluzioni | 64 |
| 3.2.2 Il punto di Steiner | 71 |
| 3.2.3 Le soluzioni st | 76 |
| 3.2.4 Le soluzioni st di un gioco localmente lipschitziano | 79 |

INDICE

ii

Bibliografia

85

Introduzione

La teoria dei giochi fornisce modelli matematici di situazioni in cui diversi soggetti interagiscono fra loro cercando di trarre il massimo vantaggio per sé: lo scopo primario è quello di selezionare la strategia ottimale, allorché costi e benefici di ciascuna opzione, o strategia, dipendono da scelte individuali. Se tale opzione ottimale esiste, essa sarà la “soluzione” del gioco.

Questa teoria è nata nel 1944 con l’opera “Theory of Games and Economic Behavior” di John Von Neumann e Oskar Morgenstern e nei decenni successivi è stata usata trasversalmente nell’economia, nelle scienze sociali, nelle scienze politiche, in psicologia, in sociologia; a partire dagli anni ’70 ha avuto importanti applicazioni allo studio del comportamento animale e della selezione naturale, nonché nel campo dell’intelligenza artificiale.

Vi sono vari tipi di giochi e vari tipi di soluzioni.

Lo scopo di questa tesi è la descrizione di diversi concetti di soluzione per alcuni tipi di giochi cooperativi generalizzati con pagamenti laterali, con l’intento di confrontarli tra loro; in particolare ci siamo occupati dei concetti di soluzione per i giochi localmente lipschitziani e i giochi quasidifferenziabili.

Vediamo in dettaglio i contenuti della tesi. Nel primo capitolo, di carattere introduttivo, diamo la definizione di gioco a n giocatori descritto in forma strategica e le prime nozioni di soluzioni: gli equilibri di Nash e i minimi di Pareto. Gli equilibri di Nash sono multistrategie dei giocatori scelgono in un gioco di tipo non cooperativo, cioè quando non collaborano tra loro, mentre i minimi di Pareto sono le multistrategie che i giocatori scelgono in un caso particolare di cooperazione: quello in cui tutti i giocatori collaborano. Un esempio semplice ma significativo che mostra i differenti risultati che danno questi due concetti di soluzione è il dilemma dei prigionieri (Tucker, 1950).

Successivamente illustriamo i giochi cooperativi con pagamenti laterali, ossia i giochi cooperativi in cui sono ammessi trasferimenti di utilità tra i giocatori. Per questo tipo di giochi usiamo la descrizione in forma caratteristica, molto più semplice di quella in forma strategica. Nella forma caratteristica il gioco è rappresentato da una funzione a valori reali, detta funzione caratteristica, definita su tutte le coalizioni (cioè tutti i possibili sottoinsiemi

dell'insieme dei giocatori). Quindi a ogni coalizione corrisponde un numero che rappresenta l'utilità che la coalizione può ottenere agendo da sola.

Il problema in questo tipo di gioco è come dividere l'utilità di una coalizione tra i giocatori che formano la coalizione, cioè la scelta di un'allocazione. Un concetto di soluzione molto intuitivo è quello fornito dal nucleo del gioco, introdotto da Gillies nel 1953. Il nucleo è l'insieme delle allocazioni che nessuna coalizione può "rifiutare", cioè quelle che forniscono un'utilità superiore a qualunque altra ottenibile da una coalizione che agisce da sola. Il problema che sorge nel considerare il nucleo come soluzione è che esso può essere vuoto.

Una nozione alternativa di soluzione è data dal valore di Shapley, introdotto da Shapley nel 1953. Questo tipo di soluzione si definisce per via assiomatica e si dimostra che esiste sempre ed è unico.

Un'estensione naturale dei giochi cooperativi, nei quali ciascun giocatore può partecipare o no ad una certa coalizione, è quella dei giochi nei quali i giocatori possono decidere di collaborare con gli altri giocatori di una data coalizione con un certo tasso di partecipazione compreso fra 0 e 1.

Questo tipo di gioco prende il nome di gioco generalizzato ed è stato introdotto da Aubin (1974, 1981).

Il vantaggio di considerare giochi generalizzati al posto di quelli usuali consiste nel fatto che la funzione caratteristica del gioco è definita su un prodotto di intervalli ($[0, 1]^n$ se n è il numero dei giocatori) invece che su un insieme discreto e quindi è possibile classificare i giochi sulla base della regolarità della loro funzione caratteristica.

La nozione di nucleo del gioco si estende in modo naturale dai giochi usuali ai giochi generalizzati che hanno funzione caratteristica concava e si osserva che il nucleo del gioco è dato dal superdifferenziale della funzione caratteristica nel punto $(1, 1, \dots, 1) \in [0, 1]^n$, ossia sulla coalizione intera.

Viene definito anche un valore di Shapley generalizzato, con assiomi simili a quelli che definiscono il valore di Shapley usuale. Osserviamo che se la funzione caratteristica è differenziabile con continuità e positivamente omogenea, allora il valore di Shapley coincide con il gradiente della funzione caratteristica nel punto $(1, 1, \dots, 1)$.

In particolare il valore di Shapley e il nucleo del gioco coincidono se la funzione caratteristica è sia concava sia di classe C^1 .

Questi due tipi di soluzione hanno in comune importanti proprietà come l'ottimalità di Pareto, la simmetria e la proprietà del giocatore inattivo. Si tratta di proprietà piuttosto naturali da richiedere alle soluzioni del gioco.

Abbiamo allora definito "insieme di soluzioni" di un gioco cooperativo generalizzato un insieme che verifica tali proprietà e che coincide con il nu-

cleo del gioco quando la funzione caratteristica è concava, e con il valore di Shapley generalizzato se la funzione è di classe C^1 .

Questa definizione permette di ricercare insiemi di soluzioni per classi più ampie di funzioni caratteristiche. Il nostro insieme di soluzioni è chiaramente una particolare nozione di soluzione: non è detto che non ci siano altre possibili definizioni di soluzione. Il motivo per cui prendiamo in considerazione questo tipo di soluzione è che unifica i concetti di nucleo e di valore di Shapley.

Il secondo capitolo è dedicato ai giochi cooperativi generalizzati che hanno funzione caratteristica localmente lipschitziana, detti brevemente giochi localmente lipschitziani, studiati da Aubin in [2].

Data una funzione localmente lipschitziana $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definita su un aperto, ad ogni punto $x_0 \in \Omega$ si può far corrispondere un insieme non vuoto convesso e compatto $\partial_{Cl}f(x_0)$ detto il sottodifferenziale di Clarke di f in x_0 .

Il sottodifferenziale di Clarke ha la proprietà di coincidere con il superdifferenziale se la funzione è concava e con il differenziale se la funzione è di classe C^1 . Dopo aver introdotto la nozione di sottodifferenziale di Clarke di una funzione e aver visto le principali proprietà di questo insieme, abbiamo osservato che il sottodifferenziale di Clarke di una funzione localmente lipschitziana è un insieme di soluzioni per un gioco localmente lipschitziano.

Nel terzo capitolo studiamo le funzioni quasidifferenziabili e la loro applicazione alla teoria dei giochi.

Le funzioni quasidifferenziabili in un punto x sono le funzioni direzionalmente derivabili la cui derivata direzionale in x è somma di una funzione sublineare e di una funzione superlineare rispetto alla direzione.

Ad una funzione f quasidifferenziabile in un punto x è associata una coppia di insiemi non vuoti convessi e compatti, unici a meno di una relazione di equivalenza, detto il quasidifferenziale di f in x . La nozione di quasidifferenziale è stata introdotta da Demyanov e Rubinov (1980) ed è un concetto molto usato nell'ottimizzazione non lineare.

Per quanto riguarda i giochi con funzione caratteristica quasidifferenziabile, detti brevemente giochi quasidifferenziabili, non siamo in grado di definire un insieme di soluzioni con il quasidifferenziale della funzione, possiamo solo definire insiemi di quasisoluzioni. Questi insiemi dipendono dal rappresentante del quasidifferenziale scelto e in generale sono diversi tra loro; alcuni saranno insiemi di soluzioni altri no: tutti gli insiemi di quasisoluzioni verificano le proprietà richieste per un insieme di soluzioni tranne quelle di coincidere con il nucleo o con il valore di Shapley.

Introduciamo quindi un altro tipo di soluzione usando il punto di Steiner di un insieme convesso e compatto: la soluzione st .

La soluzione st di un gioco quasidifferenziabile verifica tutte le proprietà richieste ad un insieme di soluzioni, tranne quella di coincidere con il nucleo nel caso in cui la funzione caratteristica è concava; infatti se la funzione caratteristica è concava la soluzione st coincide con un elemento del nucleo del gioco. Si tratta quindi di una soluzione puntuale del gioco.

Infine analizziamo cosa succede se la funzione caratteristica del gioco è sia quasidifferenziabile, sia localmente lipschitziana. In generale una funzione sia localmente lipschitziana sia quasidifferenziabile avrà un sottodifferenziale di Clarke e un quasidifferenziale che non hanno niente in comune. Tuttavia, assumendo qualche ipotesi di regolarità sulla funzione caratteristica, la soluzione st del gioco è un elemento del sottodifferenziale di Clarke della funzione, cioè appartiene all'insieme di soluzioni del gioco localmente lipschitziano.

Vorrei ringraziare il professor Paolo Acquistapace per avermi seguito ed avermi aiutato ogni volta che ne ho avuto bisogno.

Capitolo 1

I giochi cooperativi

1.1 I giochi con n giocatori: primi concetti di soluzione

1.1.1 Descrizione del gioco

Un gioco con n giocatori viene descritto nel seguente modo: ad ogni giocatore dell'insieme $N = \{1, \dots, n\}$ associamo un insieme di strategie X^i (le possibili mosse del giocatore).

Chiamiamo $X^N = X^1 \times \dots \times X^n$ l'insieme delle multistrategie. In generale non è detto che siano possibili tutte le combinazioni. Specifichiamo quindi un sottoinsieme $X(N) \subseteq X^N$ di multistrategie implementabili. Il comportamento di ogni giocatore $i \in N$ sarà descritto da una funzione di utilità $f_i : X(N) \rightarrow \mathbb{R}$ che a una multistrategia $x \in X(N)$ associa l'utilità dell' i -esimo giocatore. Il comportamento degli n giocatori sarà quindi descritto dalla funzione di multiutilità

$$\begin{aligned} F : X(N) &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ F(x) &= (f_1(x), \dots, f_n(x)) \quad . \end{aligned}$$

Definizione 1.1.1. Un gioco con n giocatori è descritto in forma strategica da una coppia $(X(N), F)$ dove $X(N) \subseteq X^N$ è un *insieme di multistrategie (implementabili)* e F è una *funzione di multiutilità* definita su $X(N)$ a valori in \mathbb{R}^n .

Supporremo che ogni giocatore sia razionale, ossia che voglia massimizzare la sua funzione di utilità e implementerà strategie che gli danno la vincita massima. Le strategie implementate dipenderanno dalle caratteristiche del gioco, in particolare dalle informazioni che il giocatore ha sulle strategie degli

altri giocatori e dalla possibilità di formare *coalizioni*.

Una situazione molto particolare è quella in cui esiste una multistrategia che raggiunge il cosiddetto *massimo virtuale*: il massimo virtuale del gioco è il vettore $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ dove $\alpha_i = \sup_{x \in X(N)} f_i(x)$ (evidentemente non sempre esiste: ha senso solo se tutti gli estremi superiori sono finiti, cioè se il gioco è *superiormente limitato*).

Se esiste $\bar{x} \in X(N)$ tale che $F(\bar{x}) = \alpha$ chiaramente la multistrategia \bar{x} è quella ottimale per tutti i giocatori: tutte le funzioni di utilità vengono massimizzate contemporaneamente.

Un tale $\bar{x} \in X(N)$ è detta *soluzione naturale* del gioco.

Come suggerisce la terminologia, il massimo virtuale, anche quando esiste, solitamente non appartiene all'immagine di F e quindi dobbiamo cercare altri concetti di soluzione, ossia multistrategie ritenute accettabili da tutti i giocatori, nel senso che garantiscono ad ogni giocatore una vincita non inferiore alla minima vincita che sono disposti ad accettare.

Due proprietà importanti nella ricerca di un concetto di soluzione sono quelle di *stabilità individuale* e di *stabilità collettiva*. Una multistrategia $x \in X(N)$ gode della proprietà di stabilità individuale se nessuno dei giocatori può ottenere una vincita maggiore cambiando strategia sotto l'ipotesi che gli altri giocatori non cambino le loro strategie, cioè $x \in X(N)$ soddisfa per ogni $i \in N$

$$f_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) = \max_{y_i \in \pi^i X(N)} f_i(x_1, \dots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

dove $\pi^i X(N)$ è la proiezione dell'insieme di multistrategie sulle strategie dell' i -esimo giocatore.

Una multistrategia $x \in X(N)$ è collettivamente stabile se non esiste nessun'altra multistrategia in $X(N)$ che dà ad ogni giocatore una vincita maggiore di quella data da x , cioè per ogni $x' \in X(N) \setminus \{x\}$ esiste $i \in N$ tale che $f_i(x') \leq f_i(x)$.

Queste due proprietà portano a due concetti di soluzione: gli equilibri di Nash e le strategie di Pareto rispettivamente.

1.1.2 Gli equilibri di Nash

Per ogni giocatore $i \in N$ denotiamo con π^i e $\hat{\pi}^i$ le proiezioni di una multistrategia sulla strategia dell' i -esimo giocatore e sulla multistrategia dell'insieme dei giocatori $\hat{i} = N \setminus \{i\}$ rispettivamente: per ogni $x \in X(N)$ si ha $\pi^i(x) = x_i$

e $\pi^i(x) = x_i = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$.

Definizione 1.1.2. Una multistrategia $x \in X(N)$ è un *equilibrio di Nash* se per ogni $i \in N$ si ha

$$f_i(x) = \max_{y \in X(N), \pi^i y = x_i} f_i(y) \quad .$$

Un equilibrio di Nash è quindi una multistrategia che massimizza la vincita di ogni giocatore $i \in N$ supponendo che gli altri giocatori si attengano alla loro strategia x_i .

Esempio 1.1.3. (*Il dilemma dei prigionieri*) Prendiamo $N = \{1, 2\}$, $X^1 = X^2 = \{a, n\}$ e la funzione di multiutilità data da

$$(f_1, f_2) : \begin{array}{c|cc} 2 \backslash 1 & a & n \\ \hline a & (-5, -5) & (-6, 0) \\ n & (0, -6) & (-1, -1) \end{array}$$

L'unico equilibrio di Nash è la multistrategia (a, a) . Infatti si verifica facilmente che essa verifica la definizione e le altre no. Osserviamo che questa multistrategia non è quella che dà maggior vincita a entrambi i giocatori.

Interpretazione. Due criminali vengono arrestati per un crimine minore per cui dovranno scontare un anno di prigione ciascuno. Sono però sospettati di essere complici in un crimine maggiore per cui sono previsti cinque anni di pena. Non potendo provare che hanno commesso questo crimine, il commissario si accorda con entrambi: se un malfattore accuserà l'altro non dovrà scontare l'anno di prigione per il crimine minore e quindi se non viene accusato potrà uscire, mentre se viene accusato dovrà scontare i cinque anni per il crimine maggiore. Se i prigionieri non hanno modo di accordarsi, l'unica soluzione è quella di accusarsi a vicenda per non rischiare di dover scontare sei anni di prigione mentre l'altro viene rilasciato.

Teorema 1.1.4. Siano X^1, \dots, X^n spazi di Banach e $X(N) = X_0^1 \times \dots \times X_0^n$ con $X_0^i \subset X^i$ non vuoto, convesso e compatto per $i = 1, \dots, n$. Se ogni funzione di utilità $f_i : X(N) \rightarrow \mathbb{R}$ è continua e tale che $x_i \mapsto f_i(x_i, x_i)$ è concava per ogni $x_i \in \pi^i X(N)$, allora esiste un equilibrio di Nash per la funzione di multiutilità $F = (f_1, \dots, f_n)$.

Dimostrazione. Sia $\Phi : X(N) \times X(N) \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$\Phi(x, y) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i, y_i), \quad \forall x, y \in X(N).$$

Φ è continua e concava in x per ogni $y \in X(N)$. Inoltre esiste $y_0 \in X(N)$ tale che

$$\max_{x \in X(N)} \Phi(x, y_0) = \Phi(y_0, y_0). \quad (1.1.1)$$

Infatti, supponiamo per assurdo che per ogni $y \in X(N)$ esista $x \in X(N)$ tale che $\Phi(x, y) > \Phi(y, y)$ e poniamo per ogni $x \in X(N)$

$$A_x = \{y \in X(N) \mid \Phi(x, y) > \Phi(y, y)\}.$$

Chiaramente $\cup_{x \in X(N)} A_x$ è un ricoprimento aperto di $X(N)$, quindi per compattezza esistono $x_1, \dots, x_m \in X(N)$ tali che

$$X(N) \subset A_{x_1} \cup \dots \cup A_{x_m}.$$

Definiamo le funzioni

$$\varphi_i(y) = \max\{\Phi(x_i, y) - \Phi(y, y), 0\}, \quad y \in X(N) \quad i = 1, \dots, m.$$

Sono continue, non negative e per ogni $y \in X(N)$ esiste almeno un i per cui $\varphi_i(y) > 0$ (in quanto necessariamente y sta in almeno uno degli A_{x_i}). Poniamo

$$\psi_i(y) = \frac{\varphi_i(y)}{\sum_{j=1}^m \varphi_j(y)} \quad \text{e}$$

$$\psi(y) = \sum_{i=1}^m \psi_i(y) x_i.$$

Chiaramente ψ è continua, inoltre, essendo $\sum_{i=1}^m \psi_i(y) = 1$ per ogni $y \in X(N)$, la funzione ψ manda $X(N)$ in se stesso. Poiché $X(N)$ è compatto, per il teorema di Tichonov, ψ ha almeno un punto fisso $y_0 \in X(N)$. Ricordando che $\Phi(x, y)$ è concava in x si ha

$$\Phi(y_0, y_0) = \Phi\left(\sum_{i=1}^m \psi_i(y_0) x_i, y_0\right) \geq \sum_{i=1}^m \psi_i(y_0) \Phi(x_i, y_0).$$

Almeno uno dei $\psi_i(y_0)$ deve essere positivo, in quanto almeno uno dei $\varphi_i(y_0)$ è positivo, ma se $\psi_i(y_0) > 0$, allora $\Phi(x_i, y_0) > \Phi(y_0, y_0)$, quindi si ottiene

$$\Phi(y_0, y_0) \geq \sum_{i=1}^m \psi_i(y_0) \Phi(x_i, y_0) > \sum_{i=1}^m \psi_i(y_0) \Phi(y_0, y_0) = \Phi(y_0, y_0)$$

che risulta assurdo. Quindi esiste $y_0 \in X(N)$ per cui vale (1.1.1).
Per un tale y_0 si ha

$$\sum_{i=1}^n f_i(x_i, (y_0)_i) \leq \sum_{i=1}^n f_i(y_0) \quad \forall x \in X(N).$$

Scegliendo $x^j = ((y_0)_1, \dots, (y_0)_{j-1}, x_j, (y_0)_{j+1}, \dots, (y_0)_n)$ ($x_j \in X_0^j$) per $j = 1, \dots, n$ otteniamo

$$f_j(x_j, (y_0)_j) \leq f_j(y_0), \quad \forall x_j \in X_0^j \quad \text{e per } j = 1, \dots, n$$

e questo ci dice che y_0 è un equilibrio di Nash.

□

1.1.3 Le multistrategie di Pareto

In molti casi i giocatori possono trovare una multistrategia che garantisca ad ogni giocatore una vincita maggiore di quella data da un equilibrio di Nash (ad esempio, nel dilemma dei prigionieri, la multistrategia (n, n) causa ad entrambi una pena minore della multistrategia di accusarsi a vicenda). Chiaramente la scelta di una tale multistrategia richiede una collaborazione fra i giocatori. Se i giocatori riescono ad accordarsi per collaborare sarà quindi naturale che escludano ogni multistrategia per cui ne esista un'altra che dà a tutti i giocatori una vincita maggiore. Le multistrategie che non vengono escluse da questo criterio sono le multistrategie di Pareto.

Definizione 1.1.5. Dato un gioco $(X(N), F)$, una multistrategia $x \in X(N)$ è una multistrategia di Pareto se per ogni multistrategia $y \in X(N)$ esiste $i \in N$ tale che $f_i(y) \leq f_i(x)$.

La multiutilità $c = F(x)$ che si ottiene adottando una multistrategia di Pareto si dirà una multiutilità Pareto-ottimale.

Esempio 1.1.6. Nel dilemma dei prigionieri (Esempio 1.1.3), si verifica facilmente che l'unica multistrategia di Pareto è (n, n) .

1.2 Giochi cooperativi

Abbiamo visto due tipi di gioco: quello non cooperativo in cui non c'è alcuna collaborazione tra i giocatori e quello in cui tutti i giocatori collaborano. Vediamo ora un altro tipo di gioco: il gioco cooperativo con pagamenti laterali. Nei giochi cooperativi non c'è alcuna limitazione alla collaborazione fra i giocatori, ogni giocatore può scegliere se collaborare con altri giocatori e con quali. I giochi cooperativi si suddividono in due tipi: i giochi con pagamenti laterali, in cui sono ammessi trasferimenti di utilità fra i giocatori, e i giochi in cui non sono permessi tali trasferimenti, cioè i giochi senza pagamenti laterali.

I giochi con pagamenti laterali sono più facili da studiare rispetto ai giochi senza pagamenti laterali. Nei giochi con pagamenti laterali possiamo considerare l'utilità di una coalizione come la somma delle utilità dei giocatori che fanno parte della coalizione: infatti in questo caso il comportamento razionale dei giocatori che formano una coalizione è quello di scegliere una multistrategia che dia alla coalizione l'utilità rappresentata dalla massima delle somme delle utilità dei giocatori che formano la coalizione e poi decidere come dividere questa utilità tra i giocatori.

Ad esempio se due giocatori hanno entrambi due strategie e le loro multiutilità sono date da

| | | |
|-----------------|-------|--------|
| $2 \setminus 1$ | I | II |
| I | (5,3) | (0,-4) |
| II | (0,0) | (3,6) |

se agiscono come coalizione, la scelta razionale è la multistrategia (II,II), perchè dà la somma massima. Naturalmente il giocatore 1 richiederà che il giocatore 2 gli ceda parte della sua vincita in modo che la multistrategia convenga ad entrambi e minaccerà di adottare la strategia I se 2 rifiuta di cedere parte della sua vincita. Il giocatore 2, se razionale, accetterà di cedere parte della sua vincita purché la quantità che il giocatore 1 richiede sia minore di 3.

Nei giochi senza pagamenti laterali perde di significato la somma delle utilità dei giocatori e siamo costretti a considerare le utilità dei giocatori della coalizione separatamente. Ad esempio nel gioco che abbiamo appena considerato non possiamo più fare lo stesso ragionamento fatto sopra. Evidentemente le multistrategie (I,II) e (II,I) non convengono a nessuno dei due giocatori, quindi, se agiscono come coalizione, sceglieranno (I,I) o (II,II), però quale tra le due?

Questo esempio serve solo ad illustrare la differenza tra i due tipi di gioco.

In questo elaborato analizzeremo soltanto i giochi cooperativi con pagamenti laterali e li chiameremo semplicemente giochi cooperativi. Quindi

d'ora in avanti quando parleremo di gioco cooperativo, esso andrà sempre inteso come gioco cooperativo con pagamenti laterali.

1.2.1 Coalizioni usuali

Introduciamo le coalizioni di giocatori e definiamo il gioco cooperativo.

Definizione 1.2.1. Una coalizione di giocatori è un sottoinsieme $S \subset N$. L'insieme $\hat{S} = N - S$ si dirà coalizione avversa di S .

L'insieme vuoto è anche esso, per convenzione, una coalizione che verrà chiamata la coalizione vuota.

Indichiamo l'insieme di tutte le coalizioni con 2^N .

Definizione 1.2.2. Un gioco cooperativo è descritto in forma caratteristica da una coppia (N, v) ; dove $N = \{1, \dots, n\}$ è l'insieme dei giocatori e $v : 2^N \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione, detta funzione caratteristica, che ad ogni coalizione $S \subset N$ associa l'utilità $v(S)$ che la coalizione S può ottenere agendo da sola. Inoltre v soddisfa

(i) $v(\emptyset) = 0$;

(ii) v è superadditiva, cioè per ogni coppia di coalizioni disgiunte S e T si ha $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$.

Osservazione 1.2.3. L'ipotesi di superadditività della funzione caratteristica non è necessaria. In molti testi si distingue fra giochi che hanno questa proprietà, detti giochi propri, e quelli che non ce l'hanno, detti giochi impropri.

La differenza fondamentale tra i due tipi di giochi è che nei giochi propri sono possibili tutte le coalizioni, infatti, per la superadditività della funzione caratteristica, i giocatori di ogni coalizione possono ottenere un'utilità maggiore di quella che possono ottenere agendo da soli e quindi per razionalità tenderanno a formare coalizioni (in particolare tenderanno a formare la coalizione intera).

Nei giochi impropri il criterio di razionalità ci dice che si formeranno solo quelle coalizioni che permettono ai giocatori di ottenere un'utilità superiore a quella che potrebbero ottenere agendo da soli.

Per il momento consideriamo solo giochi propri.

Esempio 1.2.4. (*Il gioco dei pirati*) Tre pirati vogliono raggiungere un tesoro di valore x che sta dall'altra parte di un fiume di larghezza d . Ognuno di essi possiede una pertica di lunghezza $\frac{2}{3}d$. Se chiamiamo $N = \{1, 2, 3\}$ l'insieme

dei giocatori, la vincita di una coalizione $S \subset N$ sarà x se i giocatori di S riescono a raggiungere il tesoro e sarà 0 altrimenti:

$$\begin{aligned} v(\{i\}) &= 0 & \forall i \in N \\ v(\{i, j\}) &= v(N) = x & i, j \in N, \quad i \neq j \end{aligned}$$

Esempio 1.2.5. (*Il gioco della produzione*) Tre produttori hanno ciascuno una certa quantità di tre diverse materie prime. Per costruire un'unità del prodotto finale, di valore x , è necessaria un'unità di ognuna delle materie prime.

Sia $N = \{I, II, III\}$ l'insieme dei giocatori e siano a , b e c le tre materie prime. Supponiamo che i giocatori abbiano le seguenti quantità di materie prime:

| | I | II | III |
|-----|-----|------|-------|
| a | 2 | 3 | 1 |
| b | 3 | 0 | 3 |
| c | 3 | 3 | 0 |

La funzione caratteristica sarà data da

$$\begin{aligned} v(\{I\}) &= 2x \\ v(\{II\}) &= v(\{III\}) = 0 \\ v(\{i, j\}) &= 3x \quad (i, j \in N \quad i \neq j) \\ v(N) &= 6x. \end{aligned}$$

Osservazione 1.2.6. Rispetto alla descrizione in forma strategica che abbiamo usato nella sezione precedente, la descrizione in forma caratteristica ci dà meno informazioni sul gioco.

Ad esempio consideriamo un gioco in forma strategica $(X(N), F)$ con $X(N) = X_0^1 \times \cdots \times X_0^n$, dove $X_0^i \subset X^i$ è un sottoinsieme finito delle strategie dell' i -esimo giocatore. $X(N)$ è l'insieme delle multistrategie pure dei giocatori.

Ammettiamo anche le multistrategie miste: se il gioco viene ripetuto più volte, ogni giocatore sceglierà una strategia $x_j^i \in X_0^i$ con una certa frequenza $p_j^i \in [0, 1]$, dunque ogni volta che gioca sceglierà tale strategia con probabilità p_j^i .

Se $X_0^i = \{x_1^i, \dots, x_{n_i}^i\}$, le strategie miste dell' i -esimo giocatore sono i vettori della forma $p^i = (p_1^i, \dots, p_{n_i}^i)$ (dove $n_i = |X_0^i|$), con

$$0 \leq p_j^i \leq 1, \quad j = 1, \dots, n_i \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^{n_i} p_j^i = 1$$

Una multistrategia mista (p^1, \dots, p^n) rappresenta una multistrategia in cui l' i -esimo giocatore sceglie con probabilità p_j^i la strategia pura x_j^i .

Per trasformare il gioco in forma strategica $(X(N), F)$ in un gioco in forma caratteristica dobbiamo associare ad ogni coalizione $S \subset N$ un numero reale $v(S)$. C'è un modo canonico per fare questo.

Per ogni coalizione $S \subsetneq N$ definiamo $v(S)$ come il valore del gioco con due giocatori a somma zero che si ottiene quando consideriamo S come un unico giocatore e la coalizione $N \setminus S$ come il suo avversario.

Ricordiamo alcune nozioni dei giochi con due giocatori.

- Un gioco con due giocatori si dice a somma zero se la funzione di utilità del secondo giocatore è la opposta della funzione di utilità del primo giocatore, ossia per ogni multistrategia $x \in X(N) = X_0^1 \times X_0^2$ si ha $f_2(x) = -f_1(x)$. In altre parole la funzione di utilità f_1 rappresenta simultaneamente la vincita del giocatore 1 e la perdita del giocatore 2.
- Si dice che i giocatori hanno una coppia strategica pura ottimale per f_1 se la funzione di utilità f_1 ha un punto di sella, e in tal caso si definisce il valore del gioco come il valore di f_1 nel punto di sella.
- Si dice che i giocatori hanno una coppia strategica mista ottimale per f_1 se la funzione $L(p^1, p^2) = \sum_{(x_i^1, x_j^2) \in X(N)} f_1(x_i^1, x_j^2) p_i^1 p_j^2$, definita sull'insieme delle multistrategie miste dei giocatori, ha un punto di sella. Ogni gioco a somma zero con $X(N)$ finito ammette una coppia strategica ottimale.
- Si chiama valore del gioco il valore di f_1 nel punto di sella, nel caso in cui f_1 abbia un punto di sella, o il valore di $L(p^1, p^2)$ nel punto di sella, nel caso in cui f_1 non abbia un punto di sella.

Chiaramente, poiché esiste sempre una coppia strategica ottimale, il valore del gioco è sempre ben definito.

Indichiamo il valore del gioco con $\text{Val} f_1(x)$.

Dunque definiamo $v(S)$ come il valore del gioco a somma zero tra un giocatore, che chiamiamo S , con funzione di utilità $f_S(x) = \sum_{i \in S} f_i(x)$, e il suo avversario, che chiamiamo $N \setminus S$, con funzione di utilità $f_{N \setminus S} = -f_S$. Osserviamo che la funzione $f_{N \setminus S}$ non ha niente a che vedere con le funzioni di utilità dei giocatori che formano la coalizione $N \setminus S$: è la funzione di utilità di un giocatore fittizio che ha lo stesso insieme di multistrategie di $N \setminus S$ ma che perde quello che S vince. Poniamo perciò

$$v(S) = \text{Val} \left(\sum_{i \in S} f_i(x) \right) \quad \forall S \subsetneq N, \quad (1.2.1)$$

$$v(N) = \max_{x \in X(N)} \sum_{i \in N} f_i(x).$$

La quantità $v(S)$ è l'utilità che riceverebbe S se l'unico scopo della coalizione $N \setminus S$ fosse quello di minimizzare l'utilità di S : rappresenta dunque l'utilità che la coalizione S può ottenere agendo da sola, qualsiasi cosa faccia la coalizione avversa.

Chiaramente la definizione di $v(N)$ va data a parte, in quanto non ha senso il valore del gioco di N contro \emptyset . Osserviamo però che la definizione data di $v(N)$ è coerente con l'interpretazione che abbiamo dato di v .

Infatti poiché "l'avversario" di N non ha alcuna strategia, non può fare niente per minimizzare l'utilità di N e quindi la minima utilità che N si può garantire è anche la massima che può ricevere, ossia $\max_{x \in X(N)} \sum_{i \in N} f_i(x)$. Osserviamo che v è effettivamente una funzione caratteristica. Chiaramente la prima proprietà richiesta è verificata: la somma vuota è nulla.

Per quanto riguarda la superadditività se S e T sono coalizioni disgiunte e S ha una multistrategia $x_S \in \pi^S(X(N))$ che le garantisce l'utilità $v(S)$ e T ha una multistrategia $x_T \in \pi^T(X(N))$ che le garantisce l'utilità $v(T)$, allora la multistrategia $(x_S, x_T) \in \pi^{S \cup T}(X(N))$ garantisce all'unione delle due coalizioni $S \cup T$ almeno $v(S) + v(T)$. Inoltre è possibile che ci siano altre multistrategie congiunte della coalizione $S \cup T$ che le garantiscono un'utilità maggiore, quindi $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$. D'altra parte è evidente che $v(S) \leq v(N)$ per ogni coalizione $S \subset N$. Pertanto v è superadditiva.

Osservazione 1.2.7. Con la descrizione in forma caratteristica, una multiutilità Pareto-ottimale c si traduce in una multiutilità $c \in \mathbb{R}^n$ che soddisfa $\sum_{i \in N} c_i = v(N)$. Infatti $c \in F(X(N))$ non è Pareto-ottimale se e solo se esiste una multistrategia $y \in X(N)$ tale che $f_i(y) > c_i$ per ogni $i \in N$. Scelto un tale y si ha quindi

$$v(N) = \max_{x \in X(N)} \sum_{i \in N} f_i(x) \geq \sum_{i \in N} f_i(y) > \sum_{i \in N} c_i.$$

Quindi se $c \in F(X(N))$ è Pareto-ottimale allora $\sum_{i \in N} c_i \geq v(N)$. D'altra parte, per definizione di $v(N)$, si ha

$$F(X(N)) \subseteq \left\{ c \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i \in N} c_i \leq v(N) \right\}.$$

Dunque se $c \in F(X(N))$ è Pareto-ottimale allora $\sum_{i \in N} c_i = v(N)$.

1.2.2 Le imputazioni

Nei giochi cooperativi è nell'interesse di tutti i giocatori formare la coalizione intera: infatti, per la superadditività della funzione caratteristica, $v(N)$ è l'utilità massima che possono ottenere. Il problema è come viene divisa questa utilità tra i giocatori.

Definizione 1.2.8. Dato un gioco cooperativo (N, v) , chiamiamo allocazione un elemento $c \in \mathbb{R}^n$ tale che $\sum_{i=1}^n c_i = v(N)$.

Chiaramente, affinché i giocatori possano mettersi d'accordo per una certa allocazione, ognuno di essi richiederà che l'utilità che ottiene con la strategia accordata non sia inferiore di quella che può garantirsi agendo da solo.

Definizione 1.2.9. Un'allocazione (c_1, \dots, c_n) è detta una imputazione per ogni $i \in N$, soddisfa $c_i \geq v(\{i\})$.

L'insieme I delle imputazioni è quindi dato da

$$I = \left\{ (c_1, \dots, c_n) \mid \sum_{i \in N} c_i = v(N), c_i \geq v(\{i\}) \right\}.$$

L'insieme delle imputazioni è un primo concetto di soluzione per i giochi cooperativi e ha il vantaggio di essere sempre non vuoto. Infatti per la superadditività di v si ha $\sum_{i=1}^n v(\{i\}) \leq v(N)$. Inoltre è molto facile calcolare l'insieme delle imputazioni.

Proposizione 1.2.10. *L'insieme delle imputazioni del gioco (N, v) è dato dall'involuppo convesso dell'insieme*

$$\left\{ (v(\{1\}), \dots, v(\{j-1\}), v(N) - \sum_{i \neq j} v(\{i\}), v(\{j+1\}), \dots, v(\{n\})) \mid j \in N \right\}.$$

Questo risultato è immediato: l'insieme delle imputazioni è l'insieme dei punti c nell'iperpiano $\{c \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n c_i = v(N)\}$ che soddisfano le disequazioni $c_i \geq v(\{i\})$, ossia i punti c che stanno nel politopo di vertici

$$a_j = \left(v(\{1\}), \dots, v(\{j-1\}), v(N) - \sum_{i \neq j} v(\{i\}), v(\{j+1\}), \dots, v(\{n\}) \right).$$

Esempi 1.2.11. 1. L'insieme delle imputazioni nel gioco dei pirati (Esempio 1.2.4) è il triangolo di vertici

$$a_1 = x e_1; \quad a_2 = x e_2; \quad a_3 = x e_3 .$$

2. L'insieme delle imputazioni nel gioco della produzione (Esempio 1.2.5) è il triangolo di vertici

$$a_1 = (6x, 0, 0); \quad a_2 = (2x, 4x, 0); \quad a_3 = (2x, 0, 4x) .$$

3. Sia $N = \{1, 2, 3\}$. Consideriamo il gioco in cui ognuno dei tre giocatori ha due possibili strategie pure, I e II, e i loro insiemi di strategie sono le strategie miste

$$X^i = \{(p_i, 1 - p_i) \mid 0 \leq p_i \leq 1\} \quad i = 1, 2, 3 .$$

Le multistrategie pure danno come multiutilità

| | | | | | |
|-----|---------|------------------|-----|---------|------------------|
| | | se 1 sceglie I : | | | se 1 sceglie II: |
| 2\3 | I | II | 2\3 | I | II |
| I | (0,3,1) | (2,1,1) | I | (1,0,0) | (1,1,1) |
| II | (4,2,3) | (1,0,0) | II | (0,0,1) | (0,1,1) |

Per trovare l'insieme delle imputazioni dobbiamo calcolare $v(\{i\})$ per $i = 1, 2, 3$ e $v(N)$.

$v(N)$ sarà dato dalla somma degli elementi del vettore di multiutilità che risulta massima, quindi $v(N) = 4 + 3 + 2 = 9$.

Per trovare $v(\{1\})$ calcoliamo la matrice delle utilità di 1

| | | | | | |
|------------|-----|------|------|-------|-----|
| 1 \ (2, 3) | I,I | I,II | II,I | II,II | |
| I | 0 | 2 | 4 | 1 | (3) |
| II | 1 | 1 | 0 | 0 | |

Questa è la matrice di un gioco a due persone a somma zero tra il giocatore 1 e il giocatore (2, 3) con funzione di utilità $f_{(2,3)} = -f_1$, quindi $v(\{1\})$ sarà dato dal valore del gioco a somma zero che ha come matrice (3) che è $1/2$.

Per calcolare $v(\{2\})$ e $v(\{3\})$ si procede in modo analogo e si otterrà $v(\{2\}) = 0$ e $v(\{3\}) = 3/4$.

Quindi l'insieme delle imputazioni del gioco è il triangolo di vertici

$$a_1 = (1/2, 0, 17/2); \quad a_2 = (1/2, 15/2, 1); \quad a_3 = (8, 0, 1) .$$

1.2.3 Il nucleo

Supponiamo ora che venga proposta una imputazione $c = (c_1, \dots, c_n)$ come suddivisione di $v(N)$.

Se c'è un $S \subset N$ tale che $\sum_{i \in S} c_i < v(S)$, ai giocatori $i \in S$ non conviene accettare l'imputazione proposta, in quanto, formando la coalizione S , possono ottenere un'utilità maggiore o uguale a $v(S)$.

Definizione 1.2.12. Diremo che una coalizione $S \subset N$ rifiuta un'imputazione c se

$$\sum_{i \in S} c_i < v(S).$$

L'insieme, $\mathcal{C}(N, v)$, delle imputazioni che non vengono rifiutate da alcuna coalizione $S \subset N$ è detto il nucleo del gioco.

$$\mathcal{C}(N, v) = \{c \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n c_i = v(N), \sum_{i \in S} c_i \geq v(S), \forall S \subset N\}$$

Il concetto di soluzione dato dal nucleo del gioco ha il vantaggio di essere più piccolo dell'insieme delle imputazioni (è un suo sottoinsieme). Lo svantaggio di considerare il nucleo come concetto di soluzione è che in alcuni casi esso è vuoto.

Esempio 1.2.13. Un gioco cooperativo (N, v) con le proprietà

(i) (*gioco essenziale*) $\sum_{i \in N} v(\{i\}) < v(N)$,

(ii) (*gioco a somma costante*) per ogni $S \subset N$ si ha $v(S) + v(N \setminus S) = v(N)$,

ha nucleo vuoto.

Infatti, data una qualsiasi imputazione $c \in I$, per (i) esiste $k \in N$ tale che $c_k > v(\{k\})$, in quanto, se così non fosse, si avrebbe

$$v(N) = \sum_{i \in N} c_i \leq \sum_{i \in N} v(\{i\}) < v(N)$$

che è assurdo.

Per (ii) abbiamo

$$v(N \setminus \{k\}) = v(N) - v(\{k\}) > v(N) - c_k = \sum_{i \in N \setminus \{k\}} c_i$$

cioè l'imputazione c viene rifiutata dalla coalizione $N \setminus \{k\}$. Per l'arbitrarietà di $c \in I$ il nucleo risulta vuoto.

- Esempi 1.2.14.** 1. Il gioco dei pirati (Esempio 1.2.4) ha nucleo vuoto. Infatti il gioco dei pirati è essenziale e a somma costante.
2. Il nucleo del gioco della produzione (Esempio 1.2.5) non è vuoto. Infatti se scriviamo le condizioni di appartenenza al nucleo vediamo che, ad esempio, ci stanno tutti i punti della forma (c_1x, c_2x, c_3x) con $2 \leq c_1 \leq 3$ e $c_2 + c_3 = 6 - c_1$ con $0 \leq c_2 \leq 3$ e $0 \leq c_3 \leq 3$.

1.2.4 Il valore di Shapley

Il fatto che il nucleo possa essere vuoto rende tale nozione inutilizzabile come concetto di soluzione per alcuni giochi. Vediamo quindi un altro concetto di soluzione: il valore di Shapley. L'idea è quella di associare ad ogni gioco un'allocatione che tiene conto del 'valore' che i singoli giocatori hanno nel gioco. Sarà quindi un'allocatione che rispetta certi assiomi che ci dicono quanto 'valgono' i giocatori.

Definizione 1.2.15. Il valore di Shapley, φ , è una funzione lineare che ad ogni gioco (N, v) associa un vettore $\varphi(v) = (\varphi_1(v), \dots, \varphi_n(v)) \in \mathbb{R}^n$, dove $n = |N|$. Inoltre φ soddisfa i seguenti assiomi:

1. Ottimalità di Pareto: $\sum_{i \in N} \varphi_i(v) = v(N)$.
2. Simmetria: se $\theta : N \rightarrow N$ è una permutazione dei giocatori allora posto

$$\theta * v(S) = v(\theta(S)),$$

si ha $\varphi(\theta * v) = \theta\varphi(v)$.

3. Proprietà del giocatore inattivo: se il giocatore i soddisfa $v(S \cup \{i\}) = v(S)$ per ogni coalizione S non contenente i , allora $\varphi_i(v) = 0$.

Osserviamo che questi assiomi sono abbastanza intuitivi e sostanzialmente sono regole che ci dicono che il valore dato ai giocatori deve essere equilibrato:

- la linearità ci dice che se vengono giocati contemporaneamente più giochi (distinti o più partite dello stesso gioco), il valore dei giochi insieme è la somma del valore dei giochi giocati separatamente.

- il primo assioma esprime la razionalità del gruppo: la somma dei valori dei giocatori è il valore della coalizione intera, che, come abbiamo visto, è la vincita massima che si può ottenere;
- il secondo assioma ci dice che il valore dei giocatori non dipende dall'ordine in cui giocano;
- il terzo assioma ci dice che se un giocatore non apporta nè toglie niente a una coalizione quando si unisce ad essa, allora il suo valore è nullo.

Teorema 1.2.16. *Esiste un unico valore di Shapley.*

Dimostrazione. Fissato $S \subset N$ non vuoto consideriamo la funzione caratteristica w_S data da

$$w_S(T) = \begin{cases} 1 & \text{se } T \subset S \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Supponiamo di avere un valore di Shapley φ . Per il terzo assioma $\varphi_i(w_S) = 0$ se $i \notin S$; il secondo assioma ci dice che se i e j sono entrambi in S allora $\varphi_i(w_S) = \varphi_j(w_S)$ (basta considerare qualsiasi permutazione θ di N che manda S in sé); infine, per l'assioma di ottimalità, $\sum_{i \in N} \varphi_i(w_S) = w_S(N) = 1$. Pertanto

$$\varphi_i(w_S) = \begin{cases} 1/|S| & \text{se } i \in S \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Per la linearità di φ abbiamo quindi che se $v = \sum_{S \subset N} c_S(v) w_S$, con $c_S(v) \in \mathbb{R}$, si ha

$$\varphi(v) = \sum_{S \subset N} c_S(v) \varphi(w_S) = \left(\sum_{\substack{S \subset N \\ 1 \in S}} \frac{c_S(v)}{|S|}, \sum_{\substack{S \subset N \\ 2 \in S}} \frac{c_S(v)}{|S|}, \dots, \sum_{\substack{S \subset N \\ n \in S}} \frac{c_S(v)}{|S|} \right). \quad (1.2.2)$$

D'altra parte ogni funzione caratteristica $v : 2^N \rightarrow \mathbb{R}$ può essere scritta nella forma $v = \sum_{S \subset N} c_S(v) w_S$.

Infatti, se definiamo per ricorsione

$$\begin{aligned} c_\emptyset(v) &= 0 \\ c_T(v) &= v(T) - \sum_{S \subsetneq T} c_S(v), \end{aligned}$$

allora per ogni $T \subset N$ si ha

$$\sum_{S \subset N} c_S(v) w_S(T) = \sum_{S \subset T} c_S(v) = c_T(v) + \sum_{S \subsetneq T} c_S(v) = v(T).$$

Quindi $v = \sum_{S \subset N} c_S(v) w_S$.

Abbiamo quindi provato l'unicità del valore di Shapley: se esiste deve essere dato dalla formula (1.2.2) per ogni funzione caratteristica v .

La dimostrazione dell'esistenza è data dalla verifica che la formula (1.2.2) è lineare e soddisfa gli assiomi. È una verifica piuttosto laboriosa, però vedremo nella prossima sezione che vi è un altro modo per scrivere il valore di Shapley, che ci renderà più immediate le verifiche. Rimandiamo quindi la dimostrazione dell'esistenza alla prossima sezione.

□

Esempi 1.2.17. 1. Il valore di Shapley del gioco dei Pirati (Esempio 1.2.4) è dato da $(\frac{1}{3}x, \frac{1}{3}x, \frac{1}{3}x)$. Infatti

$$\begin{aligned} c_{\{i\}}(v) &= 0 & \forall i \in N \\ c_{\{i,j\}}(v) &= x & i, j \in N \quad i \neq j \\ c_N(v) &= -2x \quad . \end{aligned}$$

Quindi la formula (1.2.2) ci dà

$$(\varphi(v))_i = 2 \frac{x}{2} + \frac{-2x}{3} = \frac{1}{3}x, \quad \forall i \in N.$$

2. Il valore di Shapley del gioco della Produzione (Esempio 1.2.5) è $(\frac{8}{3}x, \frac{5}{3}x, \frac{5}{3}x)$. Infatti

$$\begin{aligned} c_{\{I\}}(v) &= 2x \\ c_{\{II\}}(v) &= c_{\{III\}}(v) = 0 \\ c_{\{I,II\}}(v) &= c_{\{I,III\}}(v) = x \\ c_{\{II,III\}}(v) &= 3x \\ c_N(v) &= -x. \end{aligned}$$

E quindi

$$\begin{aligned} (\varphi(v))_I &= 2x + 2 \frac{x}{2} - \frac{x}{3} = \frac{8}{3}x \\ (\varphi(v))_{II} &= \frac{x}{2} + \frac{3x}{2} - \frac{x}{3} = \frac{5}{3}x \\ (\varphi(v))_{III} &= v(N) - ((\varphi(v))_I + (\varphi(v))_{II}) = \frac{5}{3}x. \end{aligned}$$

Osservazione 1.2.18. Una soluzione come il valore di Shapley si dice una soluzione puntuale, in contrapposizione con soluzioni insiemistiche come il nucleo. Ci sono diverse soluzioni puntuali suggerite per i giochi cooperativi (vedi ad esempio [9]), si può provare che il valore di Shapley è l'unica imputazione che verifica l'additività, la simmetria e la proprietà del giocatore inattivo.

1.3 Giochi cooperativi generalizzati

1.3.1 Coalizioni generalizzate

Molte caratteristiche dei giochi cooperativi si studiano nell'ambito dei giochi cooperativi generalizzati.

Infatti nei giochi cooperativi generalizzati, al posto delle coalizioni usuali, in cui $S \subset N$ (ossia, identificando la coalizione con la sua indicatrice, $\tau^S \in \{0, 1\}^n$), abbiamo le coalizioni generalizzate, che sono elementi $\tau \in [0, 1]^n$. Il significato è abbastanza intuitivo: ogni giocatore può partecipare ad una coalizione con un certo tasso di partecipazione $\tau_i \in [0, 1]$.

In un gioco generalizzato quindi la funzione caratteristica sarà definita su $[0, 1]^n$ invece che su $\{0, 1\}^n$ e questo ci permette di studiarne le proprietà di regolarità. In particolare, una volta definiti i concetti di nucleo e valore per un gioco generalizzato, vedremo che possiamo esprimere questi concetti di soluzione in termini della regolarità della funzione caratteristica.

Definizione 1.3.1. Ogni $\tau \in [0, 1]^n$ si dice una coalizione generalizzata.

Le componenti τ_i di una coalizione generalizzata rappresentano la partecipazione dell' i -esimo giocatore alla coalizione.

Esempio 1.3.2. Chiaramente le coalizioni usuali $S \subset N$ possono essere viste come coalizioni generalizzate: basta identificare la coalizione $S \subset N$ con la sua indicatrice $\tau^S \in [0, 1]^n$ di componenti

$$(\tau^S)_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i \in S \\ 0 & \text{se } i \notin S \end{cases}$$

Estendiamo i concetti di gioco cooperativo, allocazione rifiutata e nucleo del gioco alle coalizioni generalizzate. In un gioco generalizzato è naturale che l'utilità di una coalizione venga suddivisa tra i giocatori proporzionalmente alla loro partecipazione alla coalizione. Si hanno quindi le seguenti definizioni:

Definizione 1.3.3. • Un gioco cooperativo generalizzato è descritto in forma caratteristica da una coppia $([0, 1]^n, v)$, dove $n = |N|$ è il numero di giocatori, e $v : [0, 1]^n \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione, detta funzione caratteristica, che ad ogni coalizione $\tau \in [0, 1]^n$ associa l'utilità $v(\tau)$ della coalizione generalizzata τ . Inoltre v soddisfa

- (i) $v(0) = 0$;
- (ii) v è positivamente omogenea, ossia $v(\lambda\tau) = \lambda v(\tau)$ per ogni $\lambda > 0$.

- Una coalizione generalizzata $\tau \in [0, 1]^n$ rifiuta un'allocazione c se

$$\tau \cdot c < v(\tau).$$

- Il nucleo di un gioco cooperativo generalizzato è l'insieme di allocazioni $c \in \mathbb{R}^n$ tale che

$$\sum_{i=1}^n c_i = v(\tau^N) \quad \text{e} \quad \tau \cdot c \geq v(\tau) \quad \forall \tau \in [0, 1]^n,$$

e viene indicato con $\mathcal{C}([0, 1]^n, v)$ (o con $\mathcal{C}(v)$).

Osserviamo che per i giochi generalizzati non richiediamo la superadditività della funzione caratteristica. Vedremo in seguito cosa succede quando è verificata questa proprietà.

1.3.2 Il nucleo del gioco generalizzato

Abbiamo visto che una coalizione usuale $S \subset N$ è anche una coalizione generalizzata (rappresentata dalla sua indicatrice τ^S). Ne segue che il sistema che descrive il nucleo di un gioco generalizzato contiene anche le equazioni che determinano il nucleo del gioco usuale $(N, v|_{2^N})$. Pertanto il nucleo del gioco generalizzato $([0, 1]^n, v)$ è contenuto nel nucleo della sua restrizione al gioco usuale $(N, v|_{2^N})$. Quindi se il nucleo del gioco generalizzato è non vuoto lo è anche il nucleo della sua restrizione a gioco usuale.

Come vedremo, il nucleo di un gioco generalizzato è dato dal superdifferenziale della funzione caratteristica sulla coalizione intera, quindi abbiamo una condizione sufficiente affinché il nucleo non sia vuoto: se la funzione caratteristica è superadditiva (e quindi concava) il nucleo del gioco sarà non vuoto. Ne segue che i giochi usuali che possono essere espressi come restrizione di un gioco generalizzato con funzione caratteristica superadditiva hanno nucleo non vuoto. Il problema è quindi quello di capire quali sono questi giochi, cioè di vedere come si possono estendere i giochi usuali a giochi generalizzati e quali sono i giochi che estesi da $\{0, 1\}^n$ a $[0, 1]^n$ risultano superadditivi. Vediamo anzitutto la caratterizzazione del nucleo dei giochi generalizzati.

Osservazione 1.3.4. La funzione caratteristica di un gioco generalizzato $([0, 1]^n, v)$ può essere estesa a \mathbb{R}_+^n . Infatti per l'omogeneità basta porre

$$v(\tau) = \left(\sum_{i=1}^n \tau_i \right) v \left(\frac{\tau}{\sum_{i=1}^n \tau_i} \right) \quad \text{per } \tau \neq 0 \quad (1.3.1)$$

(e per definizione $v(0)=0$).

Spesso ci servirà che τ^N sia nella parte interna dell'insieme dove è definito v , pertanto, d'ora in poi, considereremo funzioni caratteristiche v positivamente omogenee e definite su \mathbb{R}_+^n da (1.3.1).

Proposizione 1.3.5. *Il nucleo di un gioco generalizzato $([0, 1]^n, v)$ è dato dal superdifferenziale $\bar{\partial}v(\tau^N)$ di v in $\tau^N = (1, \dots, 1)$.*

Dimostrazione. Ricordiamo che il superdifferenziale $\bar{\partial}v(\tau)$ di v in $\tau \in \mathbb{R}_+^n$ è dato da

$$\bar{\partial}v(\tau) = \{c \mid v(\sigma) - v(\tau) \leq \sigma \cdot c - \tau \cdot c, \forall \sigma \in \mathbb{R}_+^n\}.$$

Se $c \in \mathcal{C}([0, 1]^n, v)$, da

$$\begin{cases} v(\sigma) - \sigma \cdot c \leq 0 & \forall \sigma \in \mathbb{R}_+^n \\ v(\tau^N) - \tau^N \cdot c = 0 \end{cases}$$

si ha

$$v(\sigma) - \sigma \cdot c \leq v(\tau^N) - \tau^N \cdot c, \quad \forall \sigma \in \mathbb{R}_+^n$$

cioè $c \in \bar{\partial}v(\tau^N)$.

Viceversa se $c \in \bar{\partial}v(\tau^N)$, scegliendo $\sigma = 0$ e $\sigma = 2\tau^N$ si ha

$$\begin{aligned} -v(\tau^N) &\leq -\tau^N \cdot c & \text{e} \\ v(\tau^N) &\leq \tau^N \cdot c \end{aligned}$$

quindi $v(\tau^N) = \tau^N \cdot c$ e, sostituendo nella disequazione che definisce il superdifferenziale, si ha $v(\tau) \leq \tau \cdot c$ per ogni $\tau \in \mathbb{R}_+^n$. Quindi $c \in \mathcal{C}([0, 1]^n, v)$.

□

Corollario 1.3.6. *Se la funzione caratteristica $v : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$ del gioco generalizzato $([0, 1]^n, v)$ è superadditiva, allora il nucleo del gioco è non vuoto, convesso e compatto.*

Inoltre se v è differenziabile in τ^N allora il nucleo del gioco è costituito dalla sola allocazione $c = \nabla v(\tau^N)$.

Dimostrazione. Basta ricordare che una funzione concava a valori reali è continua e superdifferenziabile in ogni punto della parte interna dell'insieme dove è definita e che il suo superdifferenziale in ogni punto è non vuoto, convesso e compatto. Inoltre il superdifferenziale $\bar{\partial}v(\tau^N)$ è un singoletto se e solo se v è differenziabile in τ^N e in tal caso $\bar{\partial}v(\tau^N) = \{\nabla v(\tau^N)\}$.

□

Esempi 1.3.7. 1. Consideriamo un gioco con tre giocatori $N = \{1, 2, 3\}$ in cui i giocatori 1 e 2 hanno ciascuno un'unità di un certo prodotto A e 3 ha un'unità di un prodotto B . I prodotti A e B sono complementari, cioè una frazione α di A più una frazione α di B danno un prodotto di valore $f(\alpha)$ dove $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione crescente. Consideriamo il caso $f(\alpha) = \alpha$. La funzione caratteristica di questo gioco sarà data da

$$v(\tau) = \min\{\tau_1 + \tau_2, \tau_3\}.$$

Evidentemente v è superadditiva, dunque il nucleo è non vuoto. Inoltre in un intorno di τ^N si ha $v(\tau) = \tau_3$, pertanto v è differenziabile in τ^N e $\mathcal{C}([0, 1]^n, v) = \{\nabla v(\tau^N)\} = \{(0, 0, 1)\}$.

2. Vediamo un gioco simile al precedente. Stavolta però abbiamo due giocatori di cui uno ha un'unità di A e l'altro una di B , con A e B come sopra. La funzione caratteristica è data da

$$v(\tau) = \min\{\tau_1, \tau_2\}.$$

Si verifica facilmente che in questo caso il nucleo è

$$\mathcal{C}(v) = \{c \in [0, 1]^2 : c_1 + c_2 = 1\}.$$

Per quanto abbiamo detto precedentemente vogliamo vedere quando possiamo estendere un gioco usuale ad un gioco generalizzato con funzione caratteristica positivamente omogenea e superadditiva. Introduciamo quindi il concetto di gioco bilanciato.

Definizione 1.3.8. Sia $\tau \in [0, 1]^n$ una coalizione generalizzata. Definiamo

$$\mathcal{N}(\tau) = \left\{ m : 2^N \rightarrow \mathbb{R}_+ \mid \sum_{S \subset N} m(S) \tau^S = \tau \right\}$$

cioè l'insieme dei pesi non negativi $m(S)$ tali che

$$\tau_i = \sum_{S \subset N, S \ni i} m(S).$$

L'insieme $\mathcal{N}(\tau)$ sarà detto l'insieme dei bilanciatori.

Dato un gioco usuale (N, v) , definiamo la copertura concava di v come la funzione $\pi v : [0, 1]^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$\pi v(\tau) = \sup_{m \in \mathcal{N}(\tau)} \sum_{S \subset N} m(S) v(S).$$

Vediamo che, mediante la copertura concava, ogni gioco usuale può essere esteso a un gioco generalizzato con nucleo non vuoto.

Proposizione 1.3.9. *Per ogni v la funzione πv è positivamente omogenea e superadditiva su \mathbb{R}_+^n . Inoltre soddisfa*

$$\pi v(\tau^S) \geq v(S), \quad \forall S \subseteq N. \quad (1.3.2)$$

Dimostrazione. Sia $\lambda > 0$. Si ha $\mathcal{N}(\lambda\tau) = \lambda\mathcal{N}(\tau)$. Infatti se $m \in \mathcal{N}(\lambda\tau)$, per definizione

$$\sum_{S \subseteq N} m(S)\tau^S = \lambda\tau,$$

Essendo $\lambda > 0$ possiamo dividere e si ha

$$\sum_{S \subseteq N} \frac{1}{\lambda} m(S)\tau^S = \tau$$

Quindi $\frac{1}{\lambda}m \in \mathcal{N}(\tau)$, che equivale a dire $m \in \lambda\mathcal{N}(\tau)$.

Ne segue immediatamente la positiva omogeneità di πv : infatti se $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} \pi v(\lambda\tau) &= \sup_{m \in \mathcal{N}(\lambda\tau)} \sum_{S \subseteq N} m(S)v(S) = \\ &= \sup_{m \in \lambda\mathcal{N}(\tau)} \sum_{S \subseteq N} m(S)v(S) \stackrel{m' = \frac{m}{\lambda}}{\uparrow} \sup_{m' \in \mathcal{N}(\tau)} \sum_{S \subseteq N} \lambda m'(S)v(S) = \lambda \pi v(\tau). \end{aligned}$$

Per quanto riguarda la superadditività, vediamo anzitutto che

$$\mathcal{N}(\tau) + \mathcal{N}(\sigma) \subset \mathcal{N}(\tau + \sigma).$$

Infatti se $m \in \mathcal{N}(\tau)$ e $n \in \mathcal{N}(\sigma)$ si ha

$$\sum_{S \subseteq N} m(S)\tau^S = \tau \quad \text{e} \quad \sum_{S \subseteq N} n(S)\tau^S = \sigma$$

quindi

$$\sum_{S \subseteq N} (m(S) + n(S))\tau^S = \tau + \sigma$$

cioè $m + n \in \mathcal{N}(\tau + \sigma)$. Pertanto si ha

$$\pi v(\tau + \sigma) = \sup_{m \in \mathcal{N}(\tau + \sigma)} \sum_{S \subseteq N} m(S)v(S) \geq \sup_{m \in \mathcal{N}(\tau) + \mathcal{N}(\sigma)} \sum_{S \subseteq N} m(S)v(S) =$$

$$= \sup_{m_1 \in \mathcal{N}(\tau)} \sup_{m_2 \in \mathcal{N}(\sigma)} \sum_{S \subset N} (m_1 + m_2)(S) v(S) = \pi v(\tau) + \pi v(\sigma)$$

Resta da verificare l'ultima proprietà dell'enunciato, cioè che per ogni $S \subset N$ si ha $\pi v(\tau^S) \geq v(S)$.

Fissato $S \subset N$, consideriamo la funzione $m_S : 2^N \rightarrow \mathbb{R}$ così definita

$$T \mapsto m_S(T) = \begin{cases} 1 & \text{se } T = S \\ 0 & \text{se } T \neq S \end{cases}$$

Chiaramente $m_S \in \mathcal{N}(\tau^S)$, in quanto $\sum_{T \subset N} m_S(T) \tau^T = \tau^S$.

Quindi

$$\pi v(\tau^S) \geq \sum_{T \subset N} m_S(T) v(T) = v(S).$$

□

Definizione 1.3.10. La funzione caratteristica v di un gioco usuale (N, v) si dice bilanciata se

$$v(N) = \pi v(\tau^N).$$

Teorema 1.3.11. (Shapley-Bondareva) *Il nucleo di un gioco (N, v) è non vuoto se e solo se v è bilanciata. In tal caso il nucleo di (N, v) coincide con il nucleo di $([0, 1]^n, \pi v)$.*

Dimostrazione. Supponiamo che il nucleo di (N, v) non sia vuoto. Sia c un elemento del nucleo e $m \in \mathcal{N}(\tau^N)$. Si ha

$$v(N) = \tau^N \cdot c = \left(\sum_{S \subset N} m(S) \tau^S \right) \cdot c = \sum_{S \subset N} m(S) \tau^S \cdot c \geq \sum_{S \subset N} m(S) v(S)$$

quindi $v(N) \geq \pi v(\tau^N)$.

La diseuguaglianza opposta segue dalla diseuguaglianza (1.3.2). Quindi v è bilanciata.

Viceversa, supponiamo che v sia bilanciata. Sia $c \in \mathcal{C}([0, 1]^n, \pi v)$, allora

$$\tau^N \cdot c = \pi v(\tau^N) = v(N)$$

essendo v bilanciata. Inoltre, per (1.3.2) e per la definizione di nucleo, per $S \subset N$ si ha

$$\tau^S \cdot c \geq \pi v(\tau^S) \geq v(S)$$

Quindi c appartiene al nucleo di (N, v) e $\mathcal{C}([0, 1]^n, \pi v) \subset \mathcal{C}(N, v)$. In particolare questo ci dice che il nucleo di (N, v) non è vuoto, in quanto non lo è il nucleo del gioco $([0, 1]^n, \pi v)$ (per il Corollario 1.3.6 e la Proposizione 1.3.9). Vediamo che $\mathcal{C}(N, v) \subset \mathcal{C}([0, 1]^n, \pi v)$. Sia $c \in \mathcal{C}(N, v)$. Dal fatto che $\tau^S \cdot c \geq v(S)$ per ogni $S \subset N$, si ha che, per ogni τ e per ogni $m \in \mathcal{N}(\tau)$

$$\tau \cdot c = \sum_{S \subset N} m(S) \tau^S \cdot c \geq \sum_{S \subset N} m(S) v(S)$$

e quindi $\tau \cdot c \geq \pi v(\tau)$.

L'altra condizione che definisce $\mathcal{C}([0, 1]^n, \pi v)$, cioè $\tau^N \cdot c = \pi v(\tau^N)$, è immediata per il fatto che v è bilanciata.

□

Osservazione 1.3.12. Questo teorema è particolarmente utile per dimostrare che un gioco usuale ha nucleo vuoto: infatti per provare che un gioco (N, v) non è bilanciato basterà trovare un “bilanciato” $\bar{m} \in \mathcal{N}(\tau^N)$ tale che

$$\sum_{S \subset N} \bar{m}(S) v(S) > v(N).$$

Consideriamo ad esempio il gioco dei pirati (Esempio 1.2.4). Cerchiamo $\bar{m} \in \mathcal{N}(\tau^N)$ tale che

$$\begin{aligned} \sum_{S \subset N} \bar{m}(S) \tau^S &= \tau^N \quad \text{e} \\ \bar{m}(\{1, 2\}) + \bar{m}(\{1, 3\}) + \bar{m}(\{2, 3\}) + \bar{m}(N) &> 1 \quad . \end{aligned}$$

Si vede facilmente che basta scegliere

$$\bar{m}(S) = \begin{cases} 1/3 & \text{se } |S| > 1 \\ 0 & \text{se } |S| = 1 \end{cases} .$$

1.3.3 Il valore di Shapley generalizzato

Come abbiamo fatto per i giochi usuali, anche per i giochi generalizzati vediamo un'altro concetto di soluzione del gioco definito a partire da assiomi che determinano il valore dei giocatori. La soluzione che si ottiene con questi assiomi sarà detto il valore di Shapley generalizzato.

Vedremo che il valore di Shapley generalizzato coincide con il nucleo quando sono entrambi definiti.

Indichiamo con V^n l'insieme delle funzioni $v : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$ positivamente omogenee, nulle nell'origine e di classe C^1 sulla diagonale $\{t\tau^N \mid 0 \leq t \leq 1\}$.

Consideriamo i giochi generalizzati con funzioni caratteristiche $v \in V^n$. Cerchiamo un operatore $\psi : V^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineare che ad ogni funzione caratteristica $v \in V^n$ associa un'allocazione $\psi(v) = (\psi_1(v), \dots, \psi_n(v)) \in \mathbb{R}^n$ e che soddisfa i seguenti assiomi.¹

1. **Ottimalità di Pareto:**

$$\sum_{i=1}^n \psi_i(v) = v(\tau^N).$$

2. **Simmetria:** Sia $\theta : N \rightarrow N$ una permutazione dei giocatori. Definiamo

$$(\theta * v)(\tau_1, \dots, \tau_n) = v(\tau_{\theta^{-1}(1)}, \dots, \tau_{\theta^{-1}(n)}), \quad \forall v \in V^n \quad \text{e}$$

$$\theta(c_1, \dots, c_n) = (c_{\theta(1)}, \dots, c_{\theta(n)}), \quad \forall c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$$

Richiediamo che per ogni permutazione θ e per ogni $v \in V^n$ valga

$$\psi(\theta * v) = \theta(\psi(v))$$

3. **Atomicità:** Dato un gioco $([0, 1]^n, v)$, sia $\mathcal{P} = \{S_1, \dots, S_m\}$ una partizione degli n giocatori in m tipi di giocatori.

Definiamo il gioco con m giocatori $([0, 1]^m, \mathcal{P} * v)$ con funzione caratteristica

$$(\mathcal{P} * v)(\sigma_1, \dots, \sigma_m) = v(\tau_1, \dots, \tau_n), \quad \text{dove } \tau_i = \sigma_j \text{ se } i \in S_j.$$

In altre parole $([0, 1]^m, \mathcal{P} * v)$ è un gioco tra coalizioni di giocatori in cui la partecipazione di ogni giocatore τ_i è uguale alla partecipazione σ_j del tipo di giocatori a cui appartiene nel gioco $([0, 1]^m, \mathcal{P} * v)$.

L'assioma di atomicità richiede che per ogni partizione \mathcal{P} in m tipi di giocatori e per ogni $v \in V^n$ si abbia

$$\psi_j^m(\mathcal{P} * v) = \sum_{i \in S_j} \psi_i^n(v). \quad j = 1, \dots, m$$

cioè che il valore di ogni tipo di giocatori sia la somma dei valori dei giocatori che appartengono a tale tipo.

¹Chiaramente l'operatore ψ dipende anche dal numero n di giocatori, quindi quando sarà necessario specificare il numero di giocatori indicheremo l'operatore con ψ^n

Definizione 1.3.13. Data $\psi : V^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineare e continua che soddisfa gli assiomi di ottimalità di Pareto, di simmetria e di atomicità, diciamo che ψ è un valore di Shapley generalizzato.

Teorema 1.3.14. *Esiste un unico valore di Shapley generalizzato $\psi : V^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dato da*

$$\psi(v) = \int_0^1 \nabla v(t\tau^N) dt, \quad \forall v \in V^n \quad (1.3.3)$$

Inoltre per ogni operatore lineare $A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ tale che $A\tau^M = \tau^N$ si ha

$$\psi^m(v \circ A) = A^t \psi^n(v) \quad (1.3.4)$$

Dimostrazione. La linearità di ψ è evidente per la linearità del differenziale e dell'integrale. Proviamo che, per $v \in V^n$, la funzione ψ data dalla formula (1.3.3) soddisfa gli assiomi.

L'ottimalità di Pareto segue immediatamente dalla continuità di ∇v sulla diagonale $\{t\tau^N \mid 0 \leq t \leq 1\}$, infatti

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \psi_i(v) &= \sum_{i=1}^n \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \tau_i} v(t\tau^N) dt = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} v(t\tau^N) dt = \\ &= v(\tau^N) - v(0) = v(\tau^N). \end{aligned}$$

Le proprietà di simmetria e di atomicità seguono da (1.3.4):

- Simmetria: prendiamo $m = n$ ed A la matrice della permutazione θ , cioè la matrice A_θ con elementi

$$a_{i,j} = \delta_{\theta(i),j} \quad (1.3.5)$$

Per $c \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$A_\theta c = (c_{\theta^{-1}(1)}, \dots, c_{\theta^{-1}(n)}) = \theta^{-1}c \quad \text{e} \quad A_\theta^t c = (c_{\theta(1)}, \dots, c_{\theta(n)}) = \theta c$$

quindi

$$(v \circ A_\theta)(\tau_1, \dots, \tau_n) = v(A_\theta(\tau_1, \dots, \tau_n)) = v(\tau_{\theta^{-1}(1)}, \dots, \tau_{\theta^{-1}(n)}) = (\theta * v)(\tau)$$

Pertanto se vale (1.3.4) otteniamo

$$\psi(\theta * v) = \psi(v \circ A_\theta) = A_\theta^t \psi(v) = \theta \psi(v).$$

- Atomicità: consideriamo la partizione $\mathcal{P} = \{S_1, \dots, S_m\}$ degli n giocatori in m tipi e associamo a \mathcal{P} la matrice $A_{\mathcal{P}} \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ con elementi

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } i \in S_j \\ 0 & \text{se } i \notin S_j \end{cases} \quad (1.3.6)$$

Si vede facilmente che, se abbiamo $\sigma \in \mathbb{R}^m$ e $c \in \mathbb{R}^n$, si ha

$$A_{\mathcal{P}} \sigma = (\tau_1, \dots, \tau_n) \quad \text{con } \tau_i = \sigma_j \text{ se } i \in S_j \quad (1.3.7)$$

$$A_{\mathcal{P}}^t c = (d_1, \dots, d_m) \quad \text{con } d_j = \sum_{i \in S_j} c_i$$

In particolare (1.3.7) mi dice che $v \circ A_{\mathcal{P}} = \mathcal{P} * v$. Pertanto se vale (1.3.4) otteniamo per $j = 1, \dots, m$

$$\psi_j^m(\mathcal{P} * v) = \psi_j^m(v \circ A_{\mathcal{P}}) = (A_{\mathcal{P}}^t(\psi^n(v)))_j = \sum_{i \in S_j} \psi_i^n(v).$$

Ci basta quindi provare che vale la proprietà (1.3.4). Ricordiamo che, essendo $A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineare, il differenziale della funzione composta $v \circ A$ in un punto τ è dato da $\nabla(v \circ A)(\tau) = A^t \nabla v(A\tau)$. Quindi usando il fatto che $A\tau^M = \tau^N$ si ha

$$\psi^m(v \circ A) = \int_0^1 \nabla(v \circ A)(t\tau^M) dt = \int_0^1 A^t \nabla v(t\tau^N) dt = A^t \psi^n(v).$$

Abbiamo quindi provato che ψ è un valore di Shapley generalizzato. Resta da vedere l'unicità.

Per il teorema di Stone-Weierstrass, l'insieme $\mathbb{R}[\tau_1, \dots, \tau_n]$ dei polinomi in n variabili è denso in V^n , quindi ci basterà provare che per $v \in \mathbb{R}[\tau_1, \dots, \tau_n]$ il valore di Shapley è unico.

Inoltre, affinché ψ sia un valore di Shapley generalizzato, per definizione ψ deve essere lineare e continuo, quindi basterà provare il risultato per i monomi in n variabili.

Sia $v_k(\tau) = \tau_1^{k_1} \dots \tau_n^{k_n}$. Poichè (1.3.3) definisce un valore di Shapley generalizzato, dobbiamo mostrare che per ogni $\tilde{\psi}$ lineare e continuo su V^n tale che $\tilde{\psi}(v_k)$ sia Pareto-ottimale, simmetrico e atomico, si ha $\tilde{\psi}(v_k) = \psi(v_k)$. Calcoliamo quindi $\psi(v_k)$.

$$\psi(v_k) = \int_0^1 \nabla v_k(t\tau^N) dt =$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^1 (k_1 \tau_1^{k_1-1} \tau_2^{k_2} \cdots \tau_n^{k_n}, k_2 \tau_1^{k_1} \tau_2^{k_2-1} \cdots \tau_n^{k_n}, \dots, k_n \tau_1^{k_1} \tau_2^{k_2} \cdots \tau_n^{k_n-1})|_{\tau=(t\tau^N)} dt = \\
 &\quad \int_0^1 t^{(\sum_{i=1}^n k_i)-1} (k_1, \dots, k_n) dt = \frac{1}{k_1 + k_2 + \dots + k_n} (k_1, \dots, k_n)
 \end{aligned}$$

Ora sia $\tilde{\psi}$ un valore di Shapley generalizzato.

Osserviamo che l'assioma di Pareto-ottimalità e l'assioma di simmetria ci dicono che per ogni $v \in V^n$ simmetrica si ha

$$\tilde{\psi}(v) = \frac{v(\tau^N)}{n} \tau^N \quad (1.3.8)$$

Infatti, se v è simmetrica, per ogni permutazione θ dei giocatori si ha $\tilde{\psi}(v) = \tilde{\psi}(\theta * v) = \theta \tilde{\psi}(v)$. Pertanto $\tilde{\psi}(v)$ dovrà essere un vettore della forma (a, a, \dots, a) . Inoltre l'ottimalità di Pareto implica $na = v(\tau^N)$, per cui si ha la formula (1.3.8).

Possiamo considerare v_k come il gioco $\mathcal{P} * v_{|k|}$ dove

- $|k| = k_1 + k_2 + \dots + k_n$;
 - $v_{|k|}(\sigma_1, \dots, \sigma_{|k|}) = \sigma_1 \cdots \sigma_{|k|}$;
 - \mathcal{P} è la partizione dei $|k|$ giocatori in n tipi A_1, \dots, A_n , dove A_i ha k_i giocatori.
- La funzione $v_{|k|}$ è simmetrica, quindi, se indichiamo con K l'insieme dei $|k|$ giocatori, per (1.3.8), si ha

$$\tilde{\psi}^{|k|}(v_{|k|}) = \frac{1}{|k|} \sigma^K.$$

Applichiamo l'assioma di atomicità. Si ha

$$\tilde{\psi}_i^n(v_k) = \tilde{\psi}_i^n(\mathcal{P} * v_{|k|}) = \sum_{j \in A_i} \tilde{\psi}_j^{|k|}(v_{|k|}) = \frac{k_i}{|k|}.$$

Quindi $\tilde{\psi}(v_k) = \psi(v_k)$ e risulta provata l'unicità. □

Osservazione 1.3.15. Ogni funzione $v \in V^n$ verifica

$$\nabla v(t\tau^N) = \nabla v(\tau^N) \quad \text{per ogni } t > 0 \quad (1.3.9)$$

Infatti, grazie all'omogeneità positiva, per ogni $\tau \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$\nabla v(t\tau^N) \cdot \tau = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{v(t\tau^N + \alpha\tau) - v(t\tau)}{\alpha} =$$

$$= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{v(\tau^N + \frac{\alpha}{t}\tau) - v(\tau^N)}{\frac{\alpha}{t}} = \nabla v(\tau^N) \cdot \tau$$

Quindi, usando (1.3.9), si ha che per $v \in V^n$,

$$\psi(v) = \int_0^1 \nabla v(t\tau^N) dt = \int_0^1 \nabla v(\tau^N) dt = \nabla v(\tau^N)$$

Corollario 1.3.16. *Se $v \in V^n$ è superadditiva allora il valore di Shapley generalizzato $\psi(v)$ è l'unico elemento del nucleo del gioco $\mathcal{C}(v)$.*

Dimostrazione. Chiaramente se $v \in V^n$ (e quindi v è differenziabile in τ^N) e v è superadditiva, il nucleo del gioco $([0, 1]^n, v)$ è il singoletto $\mathcal{C}(v) = \{\nabla v(\tau^N)\}$.

Dunque per l'Osservazione 1.3.15, $\mathcal{C}(v) = \{\psi(v)\}$.

□

Osservazione 1.3.17. Gli assiomi che definiscono il valore di Shapley generalizzato sono diversi da quelli che definiscono il valore di Shapley di un gioco usuale. In particolare per il valore generalizzato non si richiede che un giocatore inattivo abbia valore nullo. In realtà questa proprietà è conseguenza degli altri assiomi: infatti se il giocatore i è inattivo, questo significa che la funzione caratteristica non dipende da τ_i e quindi

$$\psi_i(v) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \tau_i} v(t\tau^N) dt = 0.$$

Adesso siamo in grado di dimostrare l'esistenza del valore di Shapley per i giochi usuali. Ricordiamo che ogni funzione caratteristica $v : 2^N \rightarrow \mathbb{R}$ può essere espressa come $v = \sum_{S \subset N} c_S(v) w_S$ dove

$$c_S(v) = \begin{cases} 0 & \text{se } S = \emptyset \\ v(S) - \sum_{T \subsetneq S} c_T(v) & \text{se } S \neq \emptyset \end{cases}, \quad w_S(T) = \begin{cases} 1 & \text{se } S \subset T \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Corollario 1.3.18. *L'unico valore di Shapley per i giochi usuali è dato da*

$$\varphi(v) = \psi(\omega v), \quad \forall v : 2^N \rightarrow \mathbb{R},$$

dove $\omega : \{v : 2^N \rightarrow \mathbb{R}\} \rightarrow V^n$ è l'operatore di estensione di Cornet, ed è definito da

$$\omega v(\tau) = \sum_{S \subset N} c_S(v) \left(\prod_{i \in S} \tau_i \right)^{1/|S|} \quad (1.3.10)$$

e $\psi : V^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è il valore di Shapley generalizzato.

Dimostrazione. Avevamo visto nel teorema 1.2.16 che il valore di Shapley è unico ed è dato da

$$\varphi_j(v) = \sum_{\substack{S \subset N \\ j \in S}} \frac{c_S(v)}{|S|} \quad j = 1, \dots, n$$

quindi dobbiamo provare che $\psi(\omega v)$ dà lo stesso risultato. La verifica è una conseguenza immediata delle definizioni di ψ e ω , infatti si ha

$$\begin{aligned} \psi_j(\omega v) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \tau_j} \omega v(t\tau^N) dt = \\ &= \int_0^1 \sum_{\substack{S \subset N \\ j \in S}} \frac{c_S(v)}{|S|} \left[\left(\prod_{i \in S} \tau_i \right)^{1/|S|-1} \prod_{i \in S \setminus \{j\}} \tau_i \right]_{\tau = t\tau^N} dt = \\ &= \int_0^1 \sum_{\substack{S \subset N \\ j \in S}} \frac{c_S(v)}{|S|} t^{1-|S|} t^{|S|-1} dt = \\ &= \sum_{\substack{S \subset N \\ j \in S}} \frac{c_S(v)}{|S|} = \varphi_j(v) \end{aligned}$$

Vediamo quindi che $\varphi(v)$ verifica gli assiomi usando il fatto che ψ è un valore di Shapley generalizzato e la definizione dei coefficienti c_S

- Ottimalità di Pareto:

$$\sum_{i \in N} \varphi_i(v) = \sum_{i \in N} \psi_i(\omega v) = \omega v(\tau^N) = \sum_{S \subset N} c_S(v) = v(N).$$

- Simmetria: data una permutazione θ di N si ha

$$\theta \varphi(v) = \theta \psi(\omega v) = \psi(\theta * \omega v)$$

Quindi mi basta provare che $\theta * \omega v = \omega(\theta * v)$. Si ha

$$\begin{aligned}
 \theta * \omega v(\tau) &= \sum_{S \subset N} c_S(v) \left(\prod_{i \in S} \tau_{\theta^{-1}(i)} \right)^{1/|S|} = \\
 &= \sum_{S \subset N} c_S(v) \left(\prod_{j \in \theta^{-1}(S)} \tau_j \right)^{1/|S|} \stackrel{T=\theta^{-1}(S)}{\stackrel{\uparrow}{=}} \\
 &= \sum_{\theta(T) \subset N} c_{\theta(T)}(v) \left(\prod_{j \in T} \tau_j \right)^{1/|T|} = \\
 &= \sum_{\theta(T) \subset N} c_T(\theta * v) \left(\prod_{j \in T} \tau_j \right)^{1/|T|} = \\
 &= \sum_{T \subset N} c_T(\theta * v) \left(\prod_{j \in T} \tau_j \right)^{1/|T|} = \omega(\theta * v)(\tau)
 \end{aligned}$$

dove il passaggio dalla terza alla quarta riga è giustificato dal fatto che $c_{\theta(T)}(v) = c_T(\theta * v)$. Questa proprietà si dimostra facilmente per induzione sulla cardinalità di $T \subset N$. Infatti per $T = \emptyset$ è ovvio, in quanto $T = \emptyset$ se e solo se $\theta(T) = \emptyset$; supponiamo sia vero per $|T| \leq k < n$ e sia $S \subset N$ con $|S| = k + 1$, si ha

$$\begin{aligned}
 c_S(\theta * v) &= \theta * v(S) + \sum_{T \subsetneq S} c_T(\theta * v) = v(\theta(S)) + \sum_{T \subsetneq S} c_{\theta(T)}(v) = \\
 &= v(\theta(S)) + \sum_{T \subsetneq \theta(S)} c_T(v) = c_{\theta(S)}(v).
 \end{aligned}$$

- Assioma del giocatore inattivo: poichè $\varphi_i(v) = \psi_i(\omega v)$ mi basta provare che se $i \in N$ è inattivo per v allora lo è anche per ωv , cioè ωv non dipende da τ_i . D'altra parte ωv non dipende da τ_i se $c_S(v) = 0$ per ogni coalizione S contenente i . Proviamo per induzione su $|S|$ che se i è un giocatore inattivo per v allora per ogni coalizione S tale che $i \in S$ si ha $c_S(v) = 0$.

Chiaramente $c_{\{i\}} = v(\{i\}) = v(\emptyset) = 0$, essendo i inattivo.

Supponiamo valga la tesi per $|S| \leq k < n$ e sia $S \subset N$ tale che $|S| = k$ e $i \notin S$. Allora

$$c_{S \cup \{i\}} = v(S \cup \{i\}) - \sum_{T \subsetneq S \cup \{i\}} c_T(v) =$$

$$= v(S) - \sum_{T \subsetneq S} c_T - c_S - \sum_{T \subsetneq S} c_{T \cup \{i\}} = - \sum_{T \subsetneq S} c_{T \cup \{i\}}$$

Ma per $T \subsetneq S$ si ha $|T| \leq k - 1$ quindi $c_{T \cup \{i\}} = 0$ per ipotesi induttiva e quindi $c_{S \cup \{i\}} = 0$.

□

Osservazione 1.3.19. L'operatore di estensione di Cornet, definito da (1.3.10), ci dà un modo per estendere un gioco usuale a un gioco generalizzato con funzione caratteristica in V^n .

Esempio 1.3.20. Applichiamo l'operatore di Cornet alla funzione caratteristica del gioco dei Pirati (Esempio 1.2.4). Si ha

$$\omega v(\tau) = x(\tau_1 \tau_2)^{1/2} + x(\tau_1 \tau_3)^{1/2} + x(\tau_2 \tau_3)^{1/2} - 2x(\tau_1 \tau_2 \tau_3)^{1/3}$$

Il valore di Shapley generalizzato di ωv è dato da

$$\psi(\omega v) = \nabla(\omega v)(\tau^N) = (x/3, x/3, x/3)$$

e coincide, come è giusto che sia, con il valore di Shapley di v .

1.3.4 Soluzioni di un gioco generalizzato

Abbiamo visto due concetti di soluzione di un gioco generalizzato e chiaramente non è detto che non ce ne siano altri (infatti vedremo altri due concetti di soluzione per particolari classi di funzioni caratteristiche). Per poter giustificare il fatto che chiamiamo soluzione una certa allocazione $c \in \mathbb{R}^n$ dobbiamo assicurarci che accontenti tutti i giocatori, cioè che nessun giocatore abbia motivo di rifiutarla (come ad esempio, per il nucleo, abbiamo posto la condizione $c \cdot \tau \geq v(\tau)$ per ogni coalizione generalizzata τ).

Gli assiomi che definiscono il valore di Shapley generalizzato e la proprietà del giocatore inattivo sono, come abbiamo già detto, dei criteri che servono a suddividere in modo equo la vincita tra i giocatori. Se ridefiniamo le proprietà di ottimalità, simmetria e atomicità e quella del giocatore inattivo per un insieme $S \subset \mathbb{R}^n$, vediamo che anche il nucleo ha queste proprietà. Pertanto è ragionevole richiedere che, affinché un insieme $S(v) \subset \mathbb{R}^n$ sia un insieme di soluzioni per il gioco $([0, 1]^n, v)$, $S(v)$ verifichi queste proprietà.

In realtà richiederemo che l'insieme abbia solo le proprietà di ottimalità di Pareto, simmetria e del giocatore inattivo perchè, come vedremo più avanti, l'atomicità spesso richiede una certa regolarità della funzione caratteristica,

mentre ci interessa trovare soluzioni per più giochi possibile e le condizioni di regolarità sono piuttosto restrittive.

Un'altra proprietà che ci sembra ragionevole richiedere, è che $S(v)$ coincida con il valore generalizzato di Shapley se $v \in V^n$ e che coincida con $\mathcal{C}(v)$ se v è superadditiva. Diamo dunque la seguente definizione di insieme di soluzioni per un gioco generalizzato $([0, 1]^n, v)$.

Definizione 1.3.21. Sia $([0, 1]^n, v)$ un gioco generalizzato e $S(v) \subset \mathbb{R}^n$. Diremo che

- $S(v)$ è Pareto-ottimale se per ogni $c \in S(v)$ si ha

$$\sum_{i \in N} c_i = v(\tau^N)$$

- $S(v)$ è simmetrico se per ogni permutazione $\theta : N \rightarrow N$ degli n giocatori si ha

$$S(\theta * v) = \theta S(v) \equiv \{\theta c \mid c \in S(v)\}$$

- $S(v)$ è atomico se per ogni partizione $\mathcal{P} = \{S_1, \dots, S_m\}$ degli n giocatori in m tipi di giocatori si ha

$$S(\mathcal{P} * v) = \mathcal{P} * S(v) \equiv \{\mathcal{P} * c \mid c \in S(v)\}$$

dove con $\mathcal{P} * c$ indichiamo $A_{\mathcal{P}}^t c$ con $A_{\mathcal{P}}^t$ la matrice definita da (1.3.6).

- $S(v)$ ha la proprietà del giocatore inattivo se v non dipende da τ_i implica $c_i = 0$ per ogni $c \in S(v)$.

Un insieme $S(v) \subset \mathbb{R}^n$ non vuoto che sia Pareto-ottimale e simmetrico, abbia la proprietà del giocatore inattivo, e tale che

- $S(v) = \{\nabla v(\tau^N)\}$ se $v \in V^n$,

- $S(v) = \mathcal{C}(v)$ se v è superadditiva,

si dirà un insieme di soluzioni per $([0, 1]^n, v)$. Se, inoltre, $S(v)$ è atomico diremo che è un insieme atomico di soluzioni.

Chiameremo invece una soluzione puntuale del gioco un qualsiasi elemento di un insieme di soluzioni del gioco, cioè ogni $c_v \in \mathbb{R}^n$ tale che l'insieme $\{c_v\}$ sia Pareto-ottimale e simmetrico, abbia la proprietà del giocatore inattivo e tale che

- $c_v = \nabla v(\tau^N)$ se $v \in V^n$,

- $c_v \in \mathcal{C}(v)$ se v è superadditiva.

Osservazione 1.3.22. Consideriamo la proiezione $\pi_{N \setminus \{i\}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ definita da $\pi_{N \setminus \{i\}}(\tau) = (\tau_1, \dots, \tau_{i-1}, \tau_{i+1}, \dots, \tau_n)$. Se i è inattivo per v , allora v non dipende da τ_i , quindi $v \circ \pi_{N \setminus \{i\}}$ ha senso e coincide con v . Poniamo

$$\pi_{N \setminus \{i\}} * v(\tau) = v(\pi_{N \setminus \{i\}}(\tau)), \quad (1.3.11)$$

$$\pi_{N \setminus \{i\}} * c = (c_1, \dots, c_{i-1}, 0, c_{i+1}, \dots, c_n). \quad (1.3.12)$$

La proprietà del giocatore inattivo si può quindi esprimere dicendo che

$$\pi_{N \setminus \{i\}} * v = v \quad \Rightarrow \quad S(v) = \pi_{N \setminus \{i\}} * S(v). \quad (1.3.13)$$

Useremo spesso questa caratterizzazione della proprietà del giocatore inattivo.

Abbiamo già visto che il nucleo di un gioco superadditivo è non vuoto e che coincide con il valore di Shapley generalizzato se la funzione caratteristica è un elemento di V^n ; quindi per vedere che questa definizione è coerente, dobbiamo verificare che il nucleo di un gioco superadditivo è Pareto ottimale, simmetrico, e ha la proprietà del giocatore inattivo.

Prima abbiamo bisogno di vedere qualche proprietà delle funzioni superadditive e positivamente omogenee su \mathbb{R}_+^n .

Definizione 1.3.23. Dato $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, si dice che

(i) f è H-derivabile in un punto $x \in \Omega$ se per ogni $g \in \mathbb{R}^n$ esiste finita la quantità

$$f'_H(x, g) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+, g' \rightarrow g} \frac{1}{\alpha} (f(x + \alpha g') - f(x));$$

(ii) f è direzionalmente derivabile in un punto $x \in \Omega$ se per ogni $g \in \mathbb{R}^n$ esiste finita la quantità

$$f'(x, g) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{1}{\alpha} (f(x + \alpha g) - f(x)).$$

Chiaramente se f è H-derivabile in un punto $x \in \Omega$, allora è anche direzionalmente derivabile in x e in tal caso $f'_H(x, g) = f'(x, g)$ per ogni $g \in \mathbb{R}^n$.

Osservazione 1.3.24. Se $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione concava e Ω è un convesso con parte interna non vuota, allora f è H-derivabile in ogni punto

dell'interno di Ω . Infatti è ben noto che una funzione concava su un convesso è localmente lipschitziana e che i suoi rapporti incrementali

$$\varphi_{x,g}(\alpha) = \frac{1}{\alpha}(f(x + \alpha g) - f(x))$$

sono funzioni decrescenti per ogni $x \in \overset{\circ}{\Omega}$ e per ogni direzione $g \in \mathbb{R}^n$. Ne segue che per ogni $x \in \overset{\circ}{\Omega}$, f è direzionalmente derivabile in x , infatti il limite $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \varphi_{x,g}(\alpha)$ esiste per monotonia ed è finito per la proprietà di lipschitzianità locale: se L è la costante di Lipschitz di f in un intorno di x , per $\alpha > 0$ sufficientemente piccolo si ha

$$\frac{1}{\alpha}|(f(x + \alpha g) - f(x))| \leq \frac{1}{\alpha}L|\alpha g| = L|g|.$$

A sua volta la derivabilità direzionale insieme alla lipschitzianità locale implicano la H-derivabilità sulla parte interna di Ω . Infatti fissati $x \in \overset{\circ}{\Omega}$, $g \in \mathbb{R}^n$, per $\alpha > 0$ sufficientemente piccolo

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\alpha}(f(x + \alpha g') - f(x)) - \frac{1}{\alpha}(f(x + \alpha g) - f(x)) \right| &\leq \\ &\leq \frac{1}{\alpha}|(f(x + \alpha g') - f(x + \alpha g))| \leq L|g - g'| \end{aligned}$$

prendendo il limite per $\alpha \rightarrow 0$ si ha

$$-L|g - g'| \leq \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{(f(x + \alpha g') - f(x))}{\alpha} - f'(x, g) \leq L|g - g'|$$

A questo punto basta prendere il limite per $g' \rightarrow g$ e si ottiene che f è H-derivabile in ogni $x \in \overset{\circ}{\Omega}$.

Lemma 1.3.25. $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è H-derivabile in $x \in \Omega$ se e solo se

(i) f è uniformemente direzionalmente derivabile in y , cioè

$$\lim_{|v| \rightarrow 0} \frac{1}{|v|}|f(x + v) - f(x) - f'(x, v)| = 0;$$

(ii) $g \mapsto f'(y, g)$ è continua su \mathbb{R}^n .

Lemma 1.3.26. Sia $A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineare, $x \in \mathbb{R}^m$ e $y = Ax$. Sia f definita in un intorno di y e H-derivabile in y . Allora $\varphi = f \circ A$ è direzionalmente derivabile in x e $\varphi'(x, g') = f'(Ax, Ag')$ per ogni $g' \in \mathbb{R}^m$.

Dimostrazione. Ricordiamo che, poichè A è lineare, f è differenziabile e $A'(x, g') = Ag'$ per ogni $g' \in \mathbb{R}^m$.

Definiamo per $u \in \mathbb{R}^n$, con $|u|$ sufficientemente piccolo

$$\psi(u) = \frac{1}{|u|}(f(Ax + u) - f(Ax) - f'(Ax, u)).$$

Per il Lemma 1.3.25, si ha $\lim_{|u| \rightarrow 0} \psi(u) = 0$.

Sia $\varphi = f \circ A$. Per ogni $g' \in \mathbb{R}^m$ e $\alpha > 0$ si ha

$$\varphi(x + \alpha g') - \varphi(x) = f(Ax + \alpha Ag') - f(Ax) = \alpha f'(Ax, Ag') + \psi(\alpha Ag')|\alpha Ag'|$$

Dividendo per α e passando al limite si ottiene

$$\varphi'(x, g') = f'(Ax, Ag') + |Ag'| \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \psi(\alpha Ag') = f'(Ax, Ag')$$

□

Richiamiamo uno strumento molto usato nell'analisi convessa: la dualità di Minkowski.

Ad ogni $K \subset \mathbb{R}^n$ convesso e compatto si può associare la funzione

$$p_K(x) = \max_{y \in K} y \cdot x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

La funzione p_K è sublineare, cioè subadditiva e positivamente omogenea, e il suo sottodifferenziale in 0, $\underline{\partial}p_K$, coincide con K .

Se chiamiamo \mathcal{P}^n l'insieme delle funzioni sublineari definite su \mathbb{R}^n e \mathcal{K}^n l'insieme dei convessi e compatti contenuti in \mathbb{R}^n , si ha che l'applicazione

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{K}^n &\rightarrow \mathcal{P}^n \\ K &\mapsto p_K \end{aligned}$$

è biunivoca. L'applicazione φ prende il nome di dualità di Minkowski.

Osserviamo che allo stesso modo c'è una corrispondenza biunivoca tra gli insiemi convessi e compatti in \mathbb{R}^n e le funzioni superlineari $q \in \mathcal{Q}^n$ definite su \mathbb{R}^n :

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{K}^n &\rightarrow \mathcal{Q}^n \\ K &\mapsto q_K = \min_{y \in K}(\cdot) \cdot y \end{aligned}$$

e chiaramente K coincide con il superdifferenziale $\overline{\partial}q_K$ di q_K in 0.

A meno che non sia necessario specificare di quale delle due applicazioni parliamo, chiameremo anche ψ dualità di Minkowski.

Corollario 1.3.27. *Se $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è concava e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è convesso, allora*

$$\bar{\partial}(v \circ A)(x) = A^t \bar{\partial}v(Ax) \quad (1.3.14)$$

per ogni $x \in A^{-1}(\overset{\circ}{\Omega})$.

Dimostrazione. Se $A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineare e $x \in \mathbb{R}^m$ tale che $y = Ax \in \overset{\circ}{\Omega}$. v è definita su un intorno di y ed è concava su Ω , per la dualità di Minkowski si ha

$$v'(Ax, u) = \min_{l \in \bar{\partial}v(Ax)} l \cdot u \quad \forall u \in \mathbb{R}^n$$

In particolare quindi, per $u = Ag'$,

$$v'(Ax, Ag') = \min_{l \in \bar{\partial}v(Ax)} l \cdot Ag' = \min_{l \in \bar{\partial}v(Ax)} A^t l \cdot g' = \min_{l' \in A^t \bar{\partial}v(Ax)} l' \cdot g'$$

D'altra parte v è H-derivabile in y , dunque per il Lemma 1.3.26

$$v'(Ax, Ag') = (v \circ A)'(x, g')$$

e, poiché $v \circ A$ è concava, in quanto composizione di una funzione concava con una lineare, si ha

$$(v \circ A)'(x, g') = \min_{l' \in \bar{\partial}(v \circ A)(x)} l' \cdot g'$$

Usando nuovamente la dualità di Minkowski abbiamo quindi

$$\bar{\partial}(v \circ A)(x) = A^t \bar{\partial}v(Ax).$$

□

Proposizione 1.3.28. *Sia $([0, 1]^n, v)$ un gioco generalizzato con funzione caratteristica superadditiva. Allora il nucleo del gioco $\mathcal{C}(v)$ è Pareto ottimale, simmetrico, atomico e ha la proprietà del giocatore inattivo.*

Dimostrazione. L'ottimalità di Pareto si ha per definizione. Le altre tre proprietà si dimostrano tutte sfruttando il corollario precedente.

- Simmetria: Sia θ una permutazione di N e $A_\theta = (a_{i,j})$ la matrice definita da (1.3.5). Poiché v è superadditiva su \mathbb{R}_+^n , intorno aperto di $\tau^N = A_\theta(\tau^N)$, per (1.3.14) si ha

$$\mathcal{C}(\theta * v) = \mathcal{C}(v \circ A_\theta) = A_\theta^t \mathcal{C}(v) = \theta \mathcal{C}(v)$$

- Atomicità: Sia $\mathcal{P} = \{S_1, \dots, S_m\}$ una partizione degli n giocatori in m tipi e sia $A_{\mathcal{P}}$ la matrice definita da (1.3.6). Nuovamente, per (1.3.14), si ha

$$\mathcal{C}(\mathcal{P} * v) = \mathcal{C}(v \circ A_{\mathcal{P}}) = A_{\mathcal{P}}^t \mathcal{C}(v) = \mathcal{P} * \mathcal{C}(v)$$

- Proprietà del giocatore inattivo: Sia $i \in N$ un giocatore inattivo e sia $A_{\pi_{N \setminus \{i\}}}$ la matrice $(n-1) \times n$ definita da

$$a_{k,j} = \begin{cases} \delta_{k,j} & \text{per } 1 \leq k \leq i-1 \\ \delta_{k+1,j} & \text{per } i \leq k \leq n \end{cases} \quad (1.3.15)$$

Chiaramente $\pi_{N \setminus \{i\}} * v = v \circ A_{\pi_{N \setminus \{i\}}}$ e $\pi_{N \setminus \{i\}} * c = A_{\pi_{N \setminus \{i\}}}^t c$. Quindi se i è inattivo per v , per (1.3.14), si ha

$$\mathcal{C}(v) = \mathcal{C}(v \circ A_{\pi_{N \setminus \{i\}}}) = A_{\pi_{N \setminus \{i\}}}^t \mathcal{C}(v) = \pi_{N \setminus \{i\}} * \mathcal{C}(v)$$

□

Capitolo 2

I giochi localmente lipschitziani

2.1 Il sottodifferenziale di Clarke

Le derivate di Clarke nascono come regolarizzazioni semicontinue delle derivate (superiore e inferiore) del Dini. Richiamiamo le definizioni di derivata del Dini e di regolarizzata semicontinua (inferiore o superiore) di una funzione.

Definizione 2.1.1. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Le funzioni

$$f_D^\uparrow : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_D^\uparrow(x, g) = \limsup_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{1}{\alpha} (f(x + \alpha g) - f(x))$$

$$f_D^\downarrow : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_D^\downarrow(x, g) = \liminf_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{1}{\alpha} (f(x + \alpha g) - f(x))$$

si chiamano rispettivamente la derivata superiore e la derivata inferiore del Dini di f nella direzione g .

La quantità $f'(x, g) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{1}{\alpha} (f(x + \alpha g) - f(x))$, quando esiste, si chiama derivata direzionale (o del Dini) di f in x nella direzione g . Se in $x \in \Omega$ la derivata direzionale esiste ed è finita per ogni $g \in \mathbb{R}^n$ diciamo che f è direzionalmente derivabile in x .

Esempio 2.1.2. La funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ è direzionalmente derivabile in $x = 0$. Infatti

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{1}{\alpha} (|\alpha g|) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{1}{\alpha} (\alpha |g|) = |g| = f'(0, g)$$

Definizione 2.1.3. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e $x \in \overline{\Omega}$. Le funzioni

$$\overline{f}(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \sup_{x' \in \Omega, |x-x'| < \delta} f(x')$$

$$\underline{f}(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \inf_{x' \in \Omega, |x-x'| < \delta} f(x')$$

si chiamano rispettivamente la regolarizzata semicontinua superiore e la regolarizzata semicontinua inferiore di f .

Ricordiamo che la regolarizzata semicontinua inferiore e quella superiore di una funzione f sono rispettivamente il più piccolo maggiorante semicontinuo superiormente di f e il più grande minorante semicontinuo inferiormente di f . In particolare

- se f è semicontinua superiormente allora $f = \overline{f}$;
- se f è semicontinua inferiormente allora $f = \underline{f}$;
- se f è continua allora $f = \overline{f} = \underline{f}$.

Osservazione 2.1.4. Il limite superiore e quello inferiore di una funzione $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ in un punto $x \in \overline{\Omega}$ sono definiti come

$$\limsup_{x' \rightarrow x} f(x') = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \sup_{x' \in \Omega, x \neq x', |x-x'| < \delta} f(x')$$

$$\liminf_{x' \rightarrow x} f(x') = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \inf_{x' \in \Omega, x \neq x', |x-x'| < \delta} f(x')$$

quindi possiamo esprimere le regolarizzate come

$$\overline{f}(x) = \max\{f(x), \limsup_{x' \rightarrow x} f(x')\} \quad \text{e} \quad \underline{f}(x) = \min\{f(x), \liminf_{x' \rightarrow x} f(x')\} \quad .$$

Consideriamo la regolarizzata semicontinua superiore della derivata superiore del Dini e la regolarizzata semicontinua inferiore della derivata inferiore del Dini:

$$\overline{f}_D^\uparrow(x, g) = \max\{f_D^\uparrow(x, g), \limsup_{x' \rightarrow x} f_D^\uparrow(x', g)\}$$

$$\underline{f}_D^\downarrow(x, g) = \min\{f_D^\downarrow(x, g), \liminf_{x' \rightarrow x} f_D^\downarrow(x', g)\}$$

Valgono le seguenti caratterizzazioni di \overline{f}_D^\uparrow e $\underline{f}_D^\downarrow$.

Proposizione 2.1.5.

$$(i) \overline{f}_D^\uparrow(x, g) = \limsup_{x' \rightarrow x, \alpha \rightarrow 0^+} \frac{1}{\alpha} (f(x' + \alpha g) - f(x'))$$

$$(ii) \underline{f}_D^\downarrow(x, g) = \liminf_{x' \rightarrow x, \alpha \rightarrow 0^+} \frac{1}{\alpha} (f(x' + \alpha g) - f(x')).$$

Definizione 2.1.6. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione localmente lipschitziana su Ω .

Le quantità

$$f_{Cl}^\uparrow(x, g) = \limsup_{x' \rightarrow x, \alpha \rightarrow 0^+} \frac{1}{\alpha} (f(x' + \alpha g) - f(x'))$$

$$f_{Cl}^\downarrow(x, g) = \liminf_{x' \rightarrow x, \alpha \rightarrow 0^+} \frac{1}{\alpha} (f(x' + \alpha g) - f(x'))$$

si chiamano la derivata superiore e inferiore di Clarke di f .

Osservazione 2.1.7. Non è necessaria l'ipotesi che f sia localmente lipschitziana per definire le derivate di Clarke di f (le regolarizzate semicontinue si possono definire per una funzione qualsiasi), però tale ipotesi ci permette di definire le derivate di Clarke su tutto Ω . Infatti se f è localmente lipschitziana allora in un intorno di ogni $x \in \Omega$ le derivate superiore e inferiore del Dini $f_D^\uparrow(x, g)$ e $f_D^\downarrow(x, g)$ sono limitate per ogni $g \in \mathbb{R}^n$ e quindi le quantità $\overline{f}_D^\uparrow(x, g)$ e $\underline{f}_D^\downarrow(x, g)$ sono finite per ogni $g \in \mathbb{R}^n$.

La derivata superiore e la derivata inferiore di Clarke sono rispettivamente la regolarizzata semicontinua superiore della derivata superiore del Dini e la regolarizzata semicontinua inferiormente della derivata inferiore del Dini. In particolare quindi $x \mapsto f_{Cl}^\uparrow(x, g)$ è semicontinua superiormente e $x \mapsto f_{Cl}^\downarrow(x, g)$ è semicontinua inferiormente.

Vediamo ora una proprietà importante delle derivate di Clarke.

Ricordiamo che una funzione $p : K \rightarrow \mathbb{R}$ definita su un cono $K \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice sublineare se è subadditiva e positivamente omogenea. Analogamente una funzione $q : K \rightarrow \mathbb{R}$ definita su un cono $K \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice superlineare se è superadditiva e positivamente omogenea.

Proposizione 2.1.8. Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ localmente lipschitziana. Fissato $x \in \Omega$ la funzione $g \mapsto f_{Cl}^\uparrow(x, g)$ è sublineare e la funzione $g \mapsto f_{Cl}^\downarrow(x, g)$ è superlineare.

Dimostrazione. Vediamo che $g \mapsto f_{Cl}^\uparrow(x, g)$ è sublineare. Per ogni $\lambda > 0$ si ha

$$\begin{aligned} f_{Cl}^\uparrow(x, \lambda g) &= \limsup_{x' \rightarrow x, \alpha \rightarrow 0^+} \frac{1}{\alpha} (f(x' + \alpha \lambda g) - f(x')) = \\ &= \lambda \limsup_{x' \rightarrow x, \alpha \rightarrow 0^+} \frac{1}{\lambda \alpha} (f(x' + \alpha \lambda g) - f(x')) = \lambda f_{Cl}^\uparrow(x, g) \end{aligned}$$

Pertanto $g \mapsto f_{Cl}^\uparrow(x, g)$ è positivamente omogenea. La subadditività segue immediatamente dalla subadditività del limite superiore. Infatti

$$\begin{aligned} f_{Cl}^\uparrow(x, g_1 + g_2) &= \limsup_{x' \rightarrow x, \alpha \rightarrow 0^+} \frac{1}{\alpha} (f(x' + \alpha g_1 + \alpha g_2) - f(x')) \leq \\ &\leq \limsup_{x' \rightarrow x, \alpha \rightarrow 0^+} \frac{1}{\alpha} (f(x' + \alpha g_1 + \alpha g_2) - f(x' + \alpha g_1)) + \limsup_{x' \rightarrow x, \alpha \rightarrow 0^+} \frac{1}{\alpha} (f(x' + \alpha g_1) - f(x')) = \\ &= f_{Cl}^\uparrow(x, g_1) + f_{Cl}^\uparrow(x, g_2) \end{aligned}$$

La superlinearità di $g \mapsto f_{Cl}^\downarrow(x, g)$ si dimostra in modo analogo (per l'omogeneità la dimostrazione è identica, mentre per la superadditività si usa la superadditività del limite inferiore).

□

La sublinearità di $g \mapsto f_{Cl}^\uparrow(x, g)$ ci permette di esprimere la derivata superiore di Clarke nel punto x come

$$f_{Cl}^\uparrow(x, g) = \max_{l \in \underline{\partial} f_{Cl}^\uparrow(x)} l \cdot g, \quad \forall g \in \mathbb{R}^n \quad (2.1.1)$$

dove $\underline{\partial} f_{Cl}^\uparrow(x)$ è il sottodifferenziale (non vuoto, convesso e compatto) della funzione $g \mapsto f_{Cl}^\uparrow(x, g)$ in 0.

Analogamente, per la superlinearità di $g \mapsto f_{Cl}^\downarrow(x, g)$, si ha

$$f_{Cl}^\downarrow(x, g) = \min_{l \in \overline{\partial} f_{Cl}^\downarrow(x)} l \cdot g, \quad \forall g \in \mathbb{R}^n \quad (2.1.2)$$

dove $\overline{\partial} f_{Cl}^\downarrow(x)$ è il superdifferenziale (non vuoto, convesso e compatto) della funzione $g \mapsto f_{Cl}^\downarrow(x, g)$ in 0.

Vediamo che, fissato x , i due insiemi $\underline{\partial} f_{Cl}^\uparrow(x)$ e $\overline{\partial} f_{Cl}^\downarrow(x)$ coincidono.

Ricordiamo che la funzione di supporto di un insieme convesso e compatto $K \subset \mathbb{R}^n$ è definita da $p_K(x) = \max_{v \in K} v \cdot x$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ e determina

univocamente l'insieme K . Quindi due insiemi convessi e compatti coincidono se e solo se hanno la stessa funzione di supporto. Useremo questo criterio per dimostrare il seguente risultato.

Teorema 2.1.9. *Per ogni $x \in \Omega$ si ha $\underline{\partial}f_{Cl}^\uparrow(x) = \overline{\partial}f_{Cl}^\downarrow(x)$.*

Dimostrazione. Osserviamo che $f_{Cl}^\downarrow(x, g) = -f_{Cl}^\uparrow(x, -g)$. Infatti

$$\begin{aligned} f_{Cl}^\downarrow(x, g) &= \liminf_{x' \rightarrow x, \alpha \rightarrow 0^+} \frac{1}{\alpha} (f(x' + \alpha g) - f(x')) = \\ &= - \limsup_{x' \rightarrow x, \alpha \rightarrow 0^+} \frac{1}{\alpha} ((-f)(x' + \alpha g) - (-f)(x')) = \\ &= - \limsup_{x' \rightarrow x, \alpha \rightarrow 0^+} \frac{1}{\alpha} (f(x') - f(x' + \alpha g)) \stackrel{z=x'+\alpha g}{=} \\ &= - \limsup_{x' \rightarrow x, \alpha \rightarrow 0^+} \frac{1}{\alpha} (f(z - \alpha g) - f(z)) = \\ &= -f_{Cl}^\uparrow(x, -g) \end{aligned}$$

Ne segue quindi, usando le formule (2.1.1) e (2.1.2),

$$\max_{l \in \underline{\partial}f_{Cl}^\uparrow(x)} l \cdot g = f_{Cl}^\uparrow(x, g) = -f_{Cl}^\downarrow(x, -g) = - \min_{l \in \overline{\partial}f_{Cl}^\downarrow(x)} l \cdot (-g) = \max_{l \in \overline{\partial}f_{Cl}^\downarrow(x)} l \cdot g$$

ossia le funzioni di supporto di $\underline{\partial}f_{Cl}^\uparrow(x)$ e $\overline{\partial}f_{Cl}^\downarrow(x)$ coincidono e quindi coincidono pure i due insiemi. □

Definizione 2.1.10. Data $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, l'insieme $\partial_{Cl}f(x) = \underline{\partial}f_{Cl}^\uparrow(x)$ si chiama sottodifferenziale di Clarke di f in x .

Per il teorema precedente si ha quindi

$$\begin{aligned} f_{Cl}^\uparrow(x, g) &= \max_{l \in \partial_{Cl}f(x)} l \cdot g \quad \text{e} \\ f_{Cl}^\downarrow(x, g) &= \min_{l \in \partial_{Cl}f(x)} l \cdot g \quad , \quad \forall g \in \mathbb{R}^n . \end{aligned}$$

- Esempi 2.1.11.** 1. È noto che ogni funzione convessa $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è direzionalmente derivabile e $x \mapsto f'(x, g)$ è semicontinua superiormente per ogni g . Quindi in questo caso $f'(x, g)$ coincide con la sua regolarizzata semicontinua superiore, cioè $f_{Cl}^\uparrow(x, g)$; inoltre $g \mapsto f'(x, g)$ e $g \mapsto f_{Cl}^\uparrow(x, g)$ sono rispettivamente la funzione di supporto del sottodifferenziale di f e la funzione di supporto del sottodifferenziale di Clarke di f , perciò si ha $\underline{\partial}f(x) = \partial_{Cl}f(x)$ per ogni $x \in \Omega$.
2. Analogamente, la derivata direzionale di una funzione concava è semicontinua inferiormente quindi $f'(x, g) = f_{Cl}^\downarrow(x, g)$ e $\partial_{Cl}f(x)$ coincide con il superdifferenziale di f in x .
3. Se $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è localmente lipschitziana su Ω ed è direzionalmente derivabile in $x \in \Omega$ e la sua derivata direzionale è continua in x allora f è Gateaux differenziabile in x e quindi $f'(x, g) = \nabla f(x) \cdot g$. Infatti se $f'(x, g)$ è continua in x allora

$$f_{Cl}^\downarrow(x, g) = f'(x, g) = f_{Cl}^\uparrow(x, g),$$

perciò $g \mapsto f'(x, g)$ è lineare, ossia f è Gateaux differenziabile in x .

Vediamo alcune proprietà del sottodifferenziale di Clarke.

Proposizione 2.1.12. *Sia $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ localmente lipschitziana e sia $x \in \Omega$. Allora*

- (i) $\partial_{Cl}(\lambda f)(x) = \lambda \partial_{Cl}f(x)$, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$;
- (ii) $\partial_{Cl}(f_1 + f_2)(x) \subset \partial_{Cl}f_1(x) + \partial_{Cl}f_2(x)$.

Dimostrazione.

- (i) Se $\lambda = 0$ è ovvio. Per $\lambda \neq 0$ mi basta provare

$$f_{Cl}^\uparrow(x, \lambda g) = (\lambda f)_{Cl}^\uparrow(x, g) \quad \forall g \in \mathbb{R}^n \quad (2.1.3)$$

Infatti se vale (2.1.3), si ha

$$(\lambda f)_{Cl}^\uparrow(x, g) = \max_{l \in \partial_{Cl}f(x)} l \cdot (\lambda g) = \max_{l \in \partial_{Cl}f(x)} (\lambda l) \cdot g = \max_{l \in \lambda \partial_{Cl}f(x)} l \cdot g$$

ossia $\partial_{Cl}(\lambda f)(x) = \lambda \partial_{Cl}f(x)$.

Verifichiamo quindi che vale (2.1.3). Per definizione

$$f_{Cl}^\uparrow(x, \lambda g) = \limsup_{x' \rightarrow x, \alpha \rightarrow 0^+} \frac{1}{\alpha} (f(x' + \alpha \lambda g) - f(x'))$$

Distinguiamo i due casi $\lambda > 0$ e $\lambda < 0$.

Supponiamo dapprima $\lambda > 0$. Poniamo $\beta = \lambda \alpha$. Si ha

$$f_{Cl}^\uparrow(x, \lambda g) = \limsup_{x' \rightarrow x, \beta \rightarrow 0^+} \frac{\lambda}{\beta} (f(x' + \beta g) - f(x')) = \lambda f_{Cl}^\uparrow(x, g)$$

Se invece $\lambda < 0$ poniamo $\beta = -\lambda \alpha$ e $x' - \beta g = z$. Da $\alpha \rightarrow 0^+$ e $x' \rightarrow x$ si ha $\beta \rightarrow 0^+$ e $z \rightarrow x$. Dunque

$$\begin{aligned} f_{Cl}^\uparrow(x, \lambda g) &= \limsup_{z \rightarrow x, \beta \rightarrow 0^+} \frac{-\lambda}{\beta} (f(z) - f(z + \beta g)) = \\ &= \limsup_{z \rightarrow x, \beta \rightarrow 0^+} \frac{\lambda}{\beta} (f(z + \beta g) - f(z)) = (\lambda f)_{Cl}^\uparrow(x, g) \end{aligned}$$

(ii) Per la subadditività del limite superiore si ha

$$(f_1 + f_2)_{Cl}^\uparrow(x, g) \leq (f_1)_{Cl}^\uparrow(x, g) + (f_2)_{Cl}^\uparrow(x, g)$$

Dunque, usando la dualità di Minkowski, si ottiene

$$\partial_{Cl}(f_1 + f_2)(x) \subset \partial_{Cl}f_1(x) + \partial_{Cl}f_2(x)$$

□

Una funzione localmente lipschitziana è quasi ovunque differenziabile. Vedremo che il sottodifferenziale di Clarke si può esprimere in funzione del gradiente della funzione (dove esiste).

Questo risultato è molto utile per calcolare il sottodifferenziale di Clarke. Osserviamo anzitutto che il sottodifferenziale di Clarke in un punto x di una funzione strettamente differenziabile in x , cioè differenziabile in x e tale che

$$\nabla f(x) \cdot g = \lim_{x' \rightarrow x, \alpha \rightarrow 0^+} \frac{f(x' + \alpha g) - f(x')}{\alpha} \quad \forall g \in \mathbb{R}^n$$

assume una forma particolarmente semplice.

Proposizione 2.1.13. *Se f è strettamente differenziabile in x allora*

$$\partial_{Cl}f(x) = \{\nabla f(x)\}.$$

Dimostrazione. Se f è strettamente differenziabile in x allora per definizione si ha

$$f_{Cl}^\uparrow(x, g) = \nabla f(x) \cdot g \quad \forall g \in \mathbb{R}^n,$$

perciò la funzione $g \mapsto f_{Cl}^\uparrow(x, g)$ è lineare e quindi il sottodifferenziale $\partial_{Cl}f(x)$ coincide con il differenziale di $g \mapsto f_{Cl}^\uparrow(x, g)$, ossia $\nabla f(x)$.

□

Osservazione 2.1.14. Se f è solo differenziabile in x allora $\nabla f(x) \in \partial_{Cl}f(x)$, in quanto $\nabla f(x) \cdot g = f'(x, g) \leq f_{Cl}^\uparrow(x, g)$, però in generale non vale l'uguaglianza (vedi esempio 2.1.18).

Teorema 2.1.15. *Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e $x \in \Omega$. Se f è lipschitziana in un intorno S di x e Q è un sottoinsieme di S che soddisfa $m(S \setminus Q) = 0$, allora*

$$f_{Cl}^\uparrow(x, g) = \limsup_{x' \rightarrow x, x' \in Q} f_D^\uparrow(x', g) \quad \forall g \in \mathbb{R}^n$$

Dimostrazione. Dalla definizione di f_{Cl}^\uparrow si ha per ogni $g \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} f_{Cl}^\uparrow(x, g) &= \max\{f_D^\uparrow(x, g), \limsup_{x' \rightarrow x} f_D^\uparrow(x', g)\} \geq \\ &\geq \limsup_{x' \rightarrow x} f_D^\uparrow(x', g) \geq \limsup_{x' \rightarrow x, x' \in Q} f_D^\uparrow(x', g). \end{aligned}$$

Supponiamo per assurdo che esista $g \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tale che

$$f_{Cl}^\uparrow(x, g) > \limsup_{x' \rightarrow x, x' \in Q} f_D^\uparrow(x', g).$$

Allora esistono $\delta > 0$ e $a \in \mathbb{R}$ tali che

$$f_{Cl}^\uparrow(x, g) > a > f_D^\uparrow(x', g) \quad \forall x' \in B(x, \delta) \cap Q$$

Sia $y \in B(x, \delta/2)$ e $M_y = B(x, \delta) \cap (\{y + \alpha g \mid \alpha \in \mathbb{R}\})$. M_y è un intervallo non vuoto e si vede facilmente che per quasi ogni $y \in B(x, \delta/2)$ l'insieme $A_y = M_y \cap (B(x, \delta) \setminus Q)$ ha misura nulla.

Consideriamo $h_y(\alpha) = f(y + \alpha g)$ al variare degli $y \in B(x, \delta/2)$ tali che A_y

ha misura nulla. Ogni h_y è una funzione lipschitziana e quindi differenziabile quasi ovunque. Se h_y è differenziabile in α si ha

$$\begin{aligned} h'_y(\alpha) &= \lim_{\beta \rightarrow 0^+} \frac{h_y(\alpha + \beta) - h_y(\alpha)}{\beta} = \\ &= \lim_{\beta \rightarrow 0^+} \frac{f(y + \alpha g + \beta g) - f(y + \alpha g)}{\beta} = f'(y + \alpha g, g). \end{aligned}$$

Quindi per l'assoluta continuità di h si ha

$$f(y + \alpha g) - f(y) = \int_0^\alpha h'_y(\beta) d\beta = \int_0^\alpha f'(y + \beta g, g) d\beta < a \cdot \alpha.$$

per quasi ogni $y \in B(x, \delta/2)$ e quasi ogni $\alpha \in (0, \delta/2|g|)$.

Ne segue, per la continuità di f , che

$$f(y + \alpha g) - f(y) \leq a \cdot \alpha \quad \forall y \in B(x, \delta/2), \quad \forall \alpha \in (0, \delta/2|g|)$$

e quindi otteniamo l'assurdo

$$f_{Cl}^\uparrow(x, g) = \limsup_{y \rightarrow x, \alpha \rightarrow 0^+} \frac{1}{\alpha} (f(y + \alpha g) - f(y)) \leq a.$$

□

Corollario 2.1.16. *Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e $x \in \Omega$. Se f è lipschitziana in un intorno S di x e $Q = \{x' \in S : f \text{ è differenziabile in } x'\}$, allora*

$$(i) f_{Cl}^\uparrow(x, g) = \limsup_{x' \rightarrow x, x' \in Q} \nabla f(x') \cdot g \quad \forall g \in \mathbb{R}^n.$$

$$(ii) \partial_{Cl} f(x) = \text{co}\{l \mid \exists \{x_i\} \subset Q : x_i \rightarrow x, l = \lim_{i \rightarrow \infty} \nabla f(x_i)\}$$

Dimostrazione. (i) Segue immediatamente dal Teorema 2.1.15 ricordando che $m(S \setminus Q) = 0$ e che per $x' \in Q$ la derivata direzionale di f è data da $f'(x', g) = \nabla f(x') \cdot g$.

(ii) Sia $A = \{l \mid \exists \{x_i\} \subset Q : x_i \rightarrow x, l = \lim_{i \rightarrow \infty} \nabla f(x_i)\}$. Usando la lipschitzianità di f si verifica facilmente che A è compatto.

Inoltre per $l \in A$ e $g \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$l \cdot g = \lim_{i \rightarrow \infty} \nabla f(x_i) \cdot g.$$

Prendendo il massimo su A si ottiene

$$\max_{l \in A} l \cdot g = \limsup_{x' \rightarrow x, x' \in Q} \nabla f(x') \cdot g$$

Dunque, per (i),

$$\max_{l \in A} l \cdot g = f_{Cl}^\uparrow(x, g).$$

D'altra parte abbiamo visto che $f_{Cl}^\uparrow(x, g) = \max_{\partial_{Cl}f(x)} l \cdot g$. Usando la dualità di Minkowski, abbiamo pertanto $\partial_{Cl}f(x) = \text{co}A$.

□

Esempio 2.1.17. Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = ||x| - |y||$$

Chiaramente f è strettamente differenziabile su $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq y, x \neq -y\}$ e $m(\mathbb{R}^2 \setminus Q) = 0$. In ogni punto $(x, y) \in Q$ il sottodifferenziale di Clarke di f è costituito dal solo gradiente di f nel punto. Calcoliamo $\partial_{Cl}f(0, 0)$.

Poiché nell'intersezione di ogni intorno dell'origine con Q il gradiente di f è dato da uno dei vettori

$$(1, 1), \quad (1, -1), \quad (1, -1), \quad (-1, 1)$$

si ha

$$\partial_{Cl}f(0, 0) = \text{co}\{(1, 1), (1, -1), (1, -1), (-1, 1)\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1\}.$$

Esempio 2.1.18. Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \max\{y - x^2, 0\} + \min\{y + x^2, 0\}$$

Chiaramente f è di classe C^1 su $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \neq y, -x^2 \neq y\}$ e $m(\mathbb{R}^2 \setminus Q) = 0$.

Calcoliamo $\partial_{Cl}f(0, 0)$.

Per $(x, y) \in Q$ si ha

$$\nabla f(x, y) = \begin{cases} (-2x, 1) & \text{per } y > x^2 \\ (2x, 1) & \text{per } y < -x^2 \\ (0, 0) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Perciò per $(x_k, y_k) \rightarrow (0, 0)$, con $(x_k, y_k) \in Q$, la successione $\nabla f(x_k, y_k)$ ha come punti limite $(0, 1)$ e $(0, 0)$.

Quindi

$$\partial_{Cl}f(0, 0) = \{0\} \times [0, 1].$$

Osserviamo che f è differenziabile nell'origine e $\nabla f(0, 0) = (0, 1)$, però non è strettamente differenziabile, infatti $\partial_{Cl}f(0, 0)$ contiene altri punti oltre a $(0, 1)$.

Vediamo ora una proprietà del sottodifferenziale di Clarke che ci servirà nella prossima sezione.

Proposizione 2.1.19. *Sia $A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineare e $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ localmente lipschitziana su Ω .*

1. *Se A è surgettiva, allora la funzione $\varphi = f \circ A$ è localmente lipschitziana su $A^{-1}(\Omega)$ e*

$$\partial_{Cl}(f \circ A)(x) = A^t \partial_{Cl} f(Ax) \quad \forall x \in A^{-1}(\Omega);$$

2. *se per un certo $x \in \mathbb{R}^m$, f è direzionalmente derivabile in Ax e la sua derivata direzionale $f'(Ax, g)$ è semicontinua superiormente per ogni $g \in \mathbb{R}^n$, allora*

$$\partial_{Cl}(f \circ A)(x) = A^t \partial_{Cl} f(Ax)$$

Dimostrazione. 1. Chiaramente $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ è lipschitziana, quindi per composizione φ è localmente lipschitziana.

Siano $x \in A^{-1}(\Omega)$ e $g \in \mathbb{R}^m$

$$\begin{aligned} \varphi_{Cl}^\uparrow(x, g) &= \limsup_{x' \rightarrow x, \alpha \rightarrow 0^+} \frac{1}{\alpha} (f(A(x' + \alpha g)) - f(Ax')) = \\ &= \limsup_{x' \rightarrow x, \alpha \rightarrow 0^+} \frac{1}{\alpha} (f(Ax' + \alpha Ag) - f(Ax')) = f_{Cl}^\uparrow(Ax, Ag) \end{aligned}$$

Ci basta quindi provare che la funzione $q(g) = p(Ag)$, dove $p(v) = f_{Cl}^\uparrow(Ax, v)$ ($g \in \mathbb{R}^m$), è la funzione di supporto di $A^t \partial_{Cl} f(Ax)$. Questo risultato è immediato, infatti, q è sublineare, in quanto p è sublineare e A è lineare e surgettiva; inoltre da $\underline{\partial} p = \partial_{Cl} f(Ax)$, dove con $\underline{\partial} p$ indichiamo il sottodifferenziale della funzione p in 0, si ha

$$q(g) = p(Ag) = \max_{l \in \underline{\partial} p} l \cdot Ag = \max_{l \in \underline{\partial} p} A^t l \cdot g = \max_{l \in A^t(\underline{\partial} p)} l \cdot g = \max_{l \in A^t(\partial_{Cl} f(Ax))} l \cdot g$$

2. Se $f'(Ax, g)$ è semicontinua superiormente per ogni g , allora $f'(Ax, g) = f_{Cl}^\uparrow(Ax, g)$. Inoltre se f è direzionalmente derivabile in Ax e localmente lipschitziana allora è H-derivabile in Ax (vedi Osservazione 1.3.24). Pertanto, per il Lemma 1.3.26, $f \circ A$ è direzionalmente derivabile in x e la sua derivata direzionale è data da $(f \circ A)'(x, g') = f'(Ax, Ag')$ per ogni

$g' \in \mathbb{R}^m$. Inoltre anche $(f \circ A)'(x, g')$ è semicontinua superiormente in x per ogni $g' \in \mathbb{R}^m$ quindi

$$(f \circ A)'(x, g') = (f \circ A)_{Cl}^\uparrow(x, g')$$

Dunque si ha

$$\begin{aligned} \max_{l' \in \partial_{Cl}(f \circ A)(x)} l' \cdot g' &= (f \circ A)'(x, g') = f'(Ax, Ag') = \\ &= \max_{l \in \partial_{Cl}f(Ax)} l \cdot Ag' = \max_{l \in \partial_{Cl}f(Ax)} A^t l \cdot g' = \max_{l' \in A^t(\partial_{Cl}f(Ax))} l' \cdot g' \end{aligned}$$

cioè $\partial_{Cl}(f \circ A)(x) = A^t(\partial_{Cl}f(Ax))$.

□

2.2 I giochi localmente lipschitziani

Abbiamo visto due diversi concetti di soluzione per i giochi generalizzati: il nucleo e il valore di Shapley generalizzato; inoltre abbiamo visto che

- se la funzione caratteristica del gioco $v : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$ è superadditiva (e quindi concava ricordando che consideriamo funzioni caratteristiche positivamente omogenee) allora il nucleo coincide con il superdifferenziale $\bar{\partial}v(\tau^N)$ di v in τ^N ;
- se la funzione caratteristica è differenziabile il valore di Shapley generalizzato coincide con il gradiente $\nabla v(\tau^N)$ di v in τ^N .

D'altra parte in entrambi i casi la funzione caratteristica v è localmente lipschitziana e abbiamo appena visto che una funzione localmente lipschitziana ha un sottodifferenziale di Clarke non vuoto $\partial_{Cl}v(\tau)$ ($\tau \in [0, 1]^n$) e tale che

- se v è concava, allora $\partial_{Cl}v(\tau) = \bar{\partial}v(\tau)$;
- se v è differenziabile, allora $\partial_{Cl}v(\tau) = \{\nabla v(\tau)\}$.

Jean-Pierre Aubin, in [2], propone di considerare il sottodifferenziale di Clarke $\partial_{CI}v(\tau^N)$ come insieme di soluzioni di un gioco localmente lipschitziano, cioè con funzione caratteristica localmente lipschitziana.

Chiaramente, perché questo abbia senso, l'insieme $\partial_{CI}v(\tau^N)$ deve soddisfare le proprietà richieste per un insieme di soluzioni del gioco: l'ottimalità di Pareto, la simmetria e la proprietà del giocatore inattivo. Vedremo che il sottodifferenziale di Clarke di una funzione localmente lipschitziana verifica queste proprietà.

Lemma 2.2.1. *Sia $K \subset \mathbb{R}^n$ un cono aperto e sia $v : K \rightarrow \mathbb{R}$ localmente lipschitziana e positivamente omogenea su K . Allora*

$$v_{CI}^\uparrow(\tau, \tau) = v(\tau) \quad \forall \tau \in K \quad e \quad (2.2.1)$$

$$c \cdot \tau = v(\tau) \quad \forall c \in \partial_{CI}v(\tau). \quad (2.2.2)$$

Dimostrazione. Sia $\tau \in K$ fissato. Poiché v è positivamente omogenea, si ha che per ogni $\alpha > 0$ vale

$$\begin{aligned} v(\tau) &= \frac{v(\tau + \alpha\tau) - v(\tau)}{\alpha} \leq \\ &\leq \limsup_{\sigma \rightarrow \tau, \alpha \rightarrow 0^+} \frac{v(\sigma + \alpha\tau) - v(\sigma)}{\alpha} = \\ &= v_{CI}^\uparrow(\tau, \tau) \end{aligned}$$

Sia L la costante di Lipschitz di v in τ . Si ha

$$\frac{v(\sigma + \alpha\tau) - v(\sigma)}{\alpha} \leq v(\sigma) + L|\tau - \sigma| \quad (2.2.3)$$

infatti

$$\begin{aligned} \frac{v(\sigma + \alpha\tau) - v(\sigma)}{\alpha} - v(\sigma) &= \frac{v(\sigma + \alpha\tau) - v(\sigma + \alpha\sigma)}{\alpha} \leq \\ &\leq L \frac{|\alpha\tau - \alpha\sigma|}{\alpha} = L|\tau - \sigma| \end{aligned}$$

Quindi prendendo il limite superiore per $\sigma \rightarrow \tau$ e $\alpha \rightarrow 0^+$ in (2.2.3) si ha

$$v_{CI}^\uparrow(\tau, \tau) \leq v(\tau)$$

e risulta provata la (2.2.1).

Per quanto riguarda la (2.2.2), intanto per (2.2.1) si ha che ogni $c \in \partial_{CI}v(\tau)$ soddisfa

$$c \cdot \tau \leq v_{CI}^\uparrow(\tau, \tau) = v(\tau).$$

D'altra parte, usando la Proposizione 2.1.12(i), con $\lambda = -1$ si ha

$$\partial_{C_l}(-v)(\tau) = -\partial_{C_l}v(\tau)$$

e quindi $-c \in \partial_{C_l}(-v)(\tau)$. Ma anche $-v$ è positivamente omogenea, pertanto, usando nuovamente (2.2.1)

$$-c \cdot \tau \leq (-v)_{C_l}^\uparrow(\tau, \tau) = -v(\tau)$$

Quindi $c \cdot \tau = v(\tau)$.

□

Lemma 2.2.2. *Sia $v : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$ positivamente omogenea e localmente lipschitziana e sia $A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineare e tale che $A\tau^M = \tau^N$. Se A è surgettiva o v è direzionalmente derivabile in τ^N e $v'(\tau^N, g) = v_{C_l}^\uparrow(\tau^N, g)$ per ogni $g \in \mathbb{R}^n$ allora*

$$\partial_{C_l}(v \circ A)(\tau^M) = A^t \partial_{C_l}v(\tau^N)$$

Dimostrazione. Segue dalla Proposizione 2.1.19.

□

Teorema 2.2.3. *Sia $([0, 1]^n, v)$ un gioco cooperativo generalizzato con funzione caratteristica $v : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$ localmente lipschitziana. Allora l'insieme $S(v) = \partial_{C_l}v(\tau^N)$ è un insieme di soluzioni del gioco.*

Inoltre se v è direzionalmente derivabile in τ^N e la sua derivata direzionale soddisfa $v'(\tau^N, g) = v_{C_l}^\uparrow(\tau^N, g)$ per ogni $g \in \mathbb{R}^n$ allora $S(v)$ è atomico.

Dimostrazione. Dobbiamo vedere che $S(v)$ soddisfa tutte le condizioni della Definizione 1.3.21.

Chiaramente $S(v)$ è non vuoto, essendo v localmente lipschitziana.

Dalle osservazioni fatte all'inizio della sezione sappiamo già che

- $S(v) = C(v)$ se v è superadditiva;
- $S(v) = \{\psi(v)\}$ se $v \in V^n$.

Restano quindi da provare l'ottimalità di Pareto, la simmetria e la proprietà del giocatore inattivo.

- $S(v)$ è Pareto-ottimale. Infatti per il Lemma 2.2.1, per ogni $c \in S(v) = \partial_{C_l}v(\tau^N)$ si ha

$$\sum_{i \in N} c_i = c \cdot \tau^N = v(\tau^N)$$

- $S(v)$ è simmetrico. Infatti, data una permutazione θ degli n giocatori, basta applicare il Lemma 2.2.2 all'applicazione lineare e surgettiva $A_\theta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definita dalla matrice (1.3.5). Si ha $A_\theta(\tau^N) = \tau^N$ e $v \circ A = \theta * v$, pertanto

$$S(\theta * v) = S(v \circ A_\theta) = \partial_{Cl}(v \circ A_\theta)(\tau^N) = A_\theta^t \partial_{Cl} v(\tau^N) = \theta(S(v))$$

- $S(v)$ ha la proprietà del giocatore inattivo. Come per la simmetria, usiamo il lemma 2.2.2. Se i è un giocatore inattivo per v , allora l'applicazione lineare e surgettiva $A_{\pi_{N \setminus \{i\}}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ definita dalla matrice (1.3.15) soddisfa $A(\tau^N) = A(\tau^{N \setminus \{i\}})$ e $v \circ A_{\pi_{N \setminus \{i\}}} = \pi_{N \setminus \{i\}} * v = v$, pertanto

$$\begin{aligned} S(v) &= S(v \circ A_{\pi_{N \setminus \{i\}}}) = \partial_{Cl}(v \circ A_{\pi_{N \setminus \{i\}}})(\tau^N) = A_{\pi_{N \setminus \{i\}}}^t \partial_{Cl} v(\tau^N) = \\ &= \pi_{N \setminus \{i\}} * (S(v)). \end{aligned}$$

Per quanto riguarda l'atomicità vediamo che se v è direzionalmente derivabile e la sua derivata direzionale coincide con la derivata superiore di Clarke, allora possiamo applicare il Lemma 2.2.2 anche all'applicazione lineare $A_{\mathcal{P}} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ definita dalla matrice (1.3.6), dove \mathcal{P} è una qualsiasi partizione degli n giocatori in m tipi. Poiché $\mathcal{P} * v = v \circ A_{\mathcal{P}}$ e $\mathcal{P} * c = A_{\mathcal{P}}^t c$ per ogni $c \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$S(\mathcal{P} * v) = \partial_{Cl}(v \circ A_{\mathcal{P}})(\tau^N) = A_{\mathcal{P}}^t \partial_{Cl} v(\tau^N) = \mathcal{P} * (S(v)).$$

□

Esempio 2.2.4. Consideriamo un gioco con due giocatori che ha come funzione caratteristica

$$v(\tau_1, \tau_2) = \max\{\tau_1, \tau_2\} - \frac{1}{3}|\tau_1 - \tau_2|.$$

Non è un gioco superadditivo (basta ad esempio vedere che $v(\tau^N) < v(\tau^{\{1\}}) + v(\tau^{\{2\}})$) e non è differenziabile sulla diagonale $t\tau^N$ per $t \in [0, 1]$. Ma la funzione caratteristica è localmente lipschitziana, quindi possiamo definire come insieme di soluzioni $S(v) = \partial_{Cl} v(\tau^N)$.

Per $\tau_1 \neq \tau_2$, la funzione caratteristica è data da

$$v(\tau) = \begin{cases} \frac{2}{3}\tau_1 + \frac{1}{3}\tau_2 & \tau_1 > \tau_2 \\ \frac{1}{3}\tau_1 + \frac{2}{3}\tau_2 & \tau_1 < \tau_2 \end{cases} \quad (2.2.4)$$

quindi per il corollario 2.1.16 si ha

$$S(v) = co\{(2/3, 1/3), (1/3, 2/3)\}.$$

Questo gioco può rappresentare ad esempio una situazione in cui si hanno due giocatori: il primo ha una frazione di unità di un prodotto A, il secondo di un'unità di un prodotto B.

Una qualsiasi frazione α di A sommato a α di B dà un prodotto composto che possono vendere al prezzo α , però possono vendere anche le frazioni dei prodotti singoli scontandoli di $1/3$ rispetto al prodotto composto.

Verrebbe da chiedersi perchè i due giocatori dovrebbero voler collaborare dato che possono ottenere da soli un'utilità non inferiore a quella che ottengono cooperando.

Supponiamo che ad esempio i due giocatori producano ogni giorno un'unità di A e una di B e in un dato giorno la funzione caratteristica del gioco è data da (2.2.4). Se il prodotto composto è più richiesto rispetto ai prodotti singoli allora il mercato per i prodotti singoli si satura più velocemente. Quindi nella maggior parte dei giorni i prodotti singoli avranno un valore minore della metà di quelli composti. Per poter avere un guadagno stabile nel tempo, i due giocatori stipulano un contratto in cui si impegnano a produrre tutti i giorni il maggior numero possibile di prodotti composti.

Capitolo 3

I giochi quasidifferenziabili

3.1 Le funzioni quasidifferenziabili

3.1.1 La differenza di insiemi compatti e convessi

Le funzioni quasidifferenziabili sono, come vedremo nella prossima sezione, le funzioni direzionalmente derivabili la cui derivata direzionale in un punto è somma di una funzione sublineare e di una funzione superlineare.

Come sappiamo dall'analisi convessa, la dualità di Minkowski associa ad ogni funzione sublineare e ad ogni funzione superlineare su \mathbb{R}^n un insieme convesso e compatto (rispettivamente il sottodifferenziale e il superdifferenziale) e si ha

- se $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è sublineare, allora

$$p(x) = \max_{l \in \underline{\partial} p} (l, x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

dove $\underline{\partial} p = \{v \in \mathbb{R}^n \mid (v, x) \leq p(x)\}$ è il sottodifferenziale di p in 0;

- se $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è superlineare, allora

$$q(x) = \min_{l \in \overline{\partial} q} (l, x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

dove $\overline{\partial} q = \{v \in \mathbb{R}^n \mid (v, x) \geq q(x)\}$ è il superdifferenziale di q in 0.

Quindi ad una funzione $h(x) = p(x) + q(x)$, somma di una funzione sublineare e di una funzione superlineare, sarà associata una coppia ordinata di insiemi convessi e compatti (U, V) tali che

$$h(x) = \max_{l \in U} (l, x) + \min_{l \in V} (l, x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Si ha però il problema che questa scrittura non è unica. Infatti, per esempio, presa una qualsiasi funzione sublineare p' , la funzione $h = (p + p') + (q - p')$ è ancora somma di una funzione sublineare e una superlineare, ma in generale la coppia di insiemi convessi e compatti $(U', V') = (\underline{\partial}(p + p'), \overline{\partial}(q - p'))$ sarà diversa da $(U, V) = (\underline{\partial}p, \overline{\partial}q)$.

Introduciamo una relazione di equivalenza sulle coppie di insiemi convessi e compatti, che permetterà di associare in modo unico, ad ogni funzione che sia somma di una funzione sublineare e di una superlineare, una classe di equivalenza.

Lemma 3.1.1. *Siano (U_1, V_1) e (U_2, V_2) due coppie di insiemi convessi e compatti, e siano*

$$h_i(x) = \max_{l \in U_i}(l, x) + \min_{l \in V_i}(l, x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad i = 1, 2.$$

Allora $h_1 = h_2$ se e solo se $U_1 - V_2 = U_2 - V_1$.

Dimostrazione. Definiamo

$$p_i(x) = \max_{l \in U_i}(l, x) \quad \text{e} \quad q_i(x) = \min_{l \in V_i}(l, x), \quad i = 1, 2$$

Chiaramente, per la dualità di Minkowski, p_1 e p_2 sono sublineari con sottodifferenziali U_1 e U_2 rispettivamente, mentre q_1 e q_2 sono superlineari con superdifferenziali V_1 e V_2 rispettivamente.

Vale $h_1 = p_1 + q_1 = p_2 + q_2 = h_2$ se e solo se $p_1 + (-q_2) = p_2 + (-q_1)$. Osserviamo che $-q_i$ è sublineare e il suo sottodifferenziale è $-V_i$, infatti

$$-q_i(x) = -\min_{l \in V_i}(l, x) = \max_{l \in V_i}(-l, x) = \max_{l \in (-V_i)}(l, x)$$

Quindi $p_1 + (-q_2)$ e $p_2 + (-q_1)$ sono funzioni sublineari con sottodifferenziali $U_1 - V_2$ e $U_2 - V_1$ rispettivamente. Pertanto, usando nuovamente la dualità di Minkowski, $p_1 + (-q_2) = p_2 + (-q_1)$ se e solo se $U_1 - V_2 = U_2 - V_1$.

□

Definizione 3.1.2. Due coppie (U_1, V_1) e (U_2, V_2) di insiemi convessi e compatti si dicono equivalenti se e solo se $U_1 - V_2 = U_2 - V_1$.

Denotiamo con $[U, V]$ la classe di equivalenza della coppia (U, V) .

Per il lemma abbiamo quindi che ad ogni funzione della forma $h = p + q$, con p sublineare e q superlineare, corrisponde un'unica classe di equivalenza di coppie di insiemi convessi e compatti $[U, V]$ e vale

$$h(x) = \max_{l \in U}(l, x) + \min_{l \in V}(l, x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \forall (U, V) \in [U, V].$$

3.1.2 Le funzioni quasidifferenziabili

Definizione 3.1.3. Sia $\Omega \in \mathbb{R}^n$ un aperto e $x_0 \in \Omega$. Una funzione $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ si dice quasidifferenziabile in x_0 se è direzionalmente derivabile in x_0 e la sua derivata direzionale può essere scritta nella forma

$$f'(x_0, g) = \max_{l \in U} (l, g) + \min_{l \in V} (l, g), \quad \forall g \in \mathbb{R}^n$$

dove U e V sono insiemi convessi e compatti di \mathbb{R}^n .

Per la dualità di Minkowski, $\max_{l \in U} (l, g)$ è una funzione sublineare e $\min_{l \in V} (l, g)$ è una funzione superlineare, pertanto una funzione direzionalmente derivabile in un punto x_0 è quasidifferenziabile in x_0 se e solo esistono una funzione sublineare p e una funzione superlineare q tali che

$$f'(x_0, g) = p(g) + q(g), \quad \forall g \in \mathbb{R}^n.$$

Per quanto abbiamo visto nella sezione precedente, alla derivata direzionale di una funzione quasidifferenziabile è associata, in modo unico, una classe d'equivalenza $[U, V]$ di coppie di insiemi convessi e compatti.

Definizione 3.1.4. Sia f una funzione quasidifferenziabile in x . La classe d'equivalenza $[U, V]$ delle coppie (U, V) di insiemi convessi e compatti tali che

$$f'(x, g) = \max_{l \in U} (l, g) + \min_{l \in V} (l, g), \quad \forall g \in \mathbb{R}^n$$

è detto il quasidifferenziale di f in x e viene indicato con $\mathcal{D}f(x) = [U, V]$.

Esempi 3.1.5. 1. Se f è differenziabile in x , allora f è quasidifferenziabile in x e il suo quasidifferenziale è dato da

$$\mathcal{D}f(x) = [\{\nabla f(x)\}, \{0\}] = [\{0\}, \{\nabla f(x)\}].$$

2. Se f è localmente lipschitziana e direzionalmente derivabile in x e $x \mapsto f'(x, g)$ è semicontinua superiormente per ogni $g \in \mathbb{R}^n$ allora $g \mapsto f'(x, g)$ è sublineare. Infatti abbiamo visto che in questo caso la derivata direzionale coincide con la derivata superiore di Clarke, la quale è sublineare ed è la funzione di supporto del sottodifferenziale di Clarke. Pertanto $\mathcal{D}f(x) = [\partial_{Cl}f(x), \{0\}]$. In particolare, se f è convessa, la sua derivata direzionale è semicontinua superiormente e abbiamo visto che il suo sottodifferenziale di Clarke coincide con il suo sottodifferenziale. Quindi per una funzione convessa si ha $\mathcal{D}f(x) = [\underline{\partial}f(x), \{0\}]$.

3. Analogamente, se $x \mapsto f'(x, g)$ è semicontinua inferiormente, da

$$f'(x, g) = f_{Cl}^\downarrow(x, g) = \min_{l \in \partial_{Cl} f(x)} (l, g)$$

si ottiene che $\mathcal{D}f(x) = [\{0\}, \partial_{Cl} f(x)]$.

In particolare, se f è concava si ha $\mathcal{D}f(x) = [\{0\}, \bar{\partial}f(x)]$.

4. La funzione $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data da $\varphi(x) = |x|$ è convessa, quindi

$$\mathcal{D}\varphi(x) = [\underline{\partial}\varphi(x), \{0\}]$$

D'altra parte $\underline{\partial}\varphi(x)$ è il sottodifferenziale di una funzione lipschitziana, quindi per il corollario 2.1.16

$$\underline{\partial}\varphi(x) = \begin{cases} \{1\} & \text{se } x > 0 \\ \{-1\} & \text{se } x < 0 \\ \text{co}\{-1, 1\} & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad (3.1.1)$$

Osservazione 3.1.6. Dagli esempi 2. e 3. segue che, per una funzione f quasidifferenziabile in x , il suo quasidifferenziale $\mathcal{D}f(x)$ avrà un elemento della forma $(U, \{0\})$ o $(\{0\}, V)$ (e in tal caso si dice che il quasidifferenziale è degenere) se e solo se la derivata direzionale $f'(x, g)$ è semicontinua (superiormente o inferiormente) in x per ogni $g \in \mathbb{R}^n$.

Vediamo alcune proprietà delle funzioni quasidifferenziabili.

Anzitutto definiamo le operazioni di somma e prodotto per scalare sulle classi di equivalenza delle coppie di convessi compatti.

Definizione 3.1.7. Siano $[U_1, V_1]$ e $[U_2, V_2]$ due classi di equivalenza di coppie di insiemi convessi e compatti, e sia $\lambda \in \mathbb{R}$. Definiamo

$$[U_1, V_1] + [U_2, V_2] = [U_1 + U_2, V_1 + V_2]$$

$$\lambda[U, V] = \begin{cases} [\lambda U, \lambda V] & \text{se } \lambda \geq 0 \\ [\lambda V, \lambda U] & \text{se } \lambda < 0 \end{cases}$$

Si verifica facilmente che le due operazioni sono ben definite sulle classi di equivalenza.

Proposizione 3.1.8. Siano f_1 e f_2 due funzioni quasidifferenziabili in un punto x e sia $\lambda \in \mathbb{R}$. Allora le funzioni

$$f_1 + f_2, \quad f_1 - f_2, \quad f_1 \cdot f_2, \quad \lambda f_1$$

sono quasidifferenziabili in x e si ha

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(f_1 + f_2)(x) &= \mathcal{D}(f_1)(x) + \mathcal{D}(f_2)(x) \\ \mathcal{D}(f_1 - f_2)(x) &= \mathcal{D}(f_1)(x) - \mathcal{D}(f_2)(x) \\ \mathcal{D}(f_1 \cdot f_2)(x) &= f_1(x)\mathcal{D}(f_2)(x) + f_2(x)\mathcal{D}(f_1)(x) \\ \mathcal{D}(\lambda f_1)(x) &= \lambda\mathcal{D}(f_1)(x)\end{aligned}$$

Inoltre, se $f_2(x) \neq 0$ allora $\frac{f_1}{f_2}$ è quasidifferenziabile in x e

$$\mathcal{D}\left(\frac{f_1}{f_2}\right)(x) = \frac{1}{f_2^2(x)}(f_2(x)\mathcal{D}(f_1)(x) - f_1(x)\mathcal{D}(f_2)(x))$$

Dimostrazione. Tutti questi risultati si dimostrano in modo simile: si mostra che la funzione è direzionalmente derivabile in x e si usano le definizioni date in 3.1.7.

Prendiamo ad esempio la funzione $f_1 + f_2$. Chiaramente è direzionalmente derivabile in x in quanto

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{1}{\alpha}((f_1 + f_2)(x + \alpha g) - (f_1 + f_2)(x)) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{1}{\alpha}(f_1(x + \alpha g) - f_1(x)) + \\ &+ \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{1}{\alpha}(f_2(x + \alpha g) - f_2(x)) = f_1'(x, g) + f_2'(x, g)\end{aligned}$$

Dunque se $[U_i, V_i] = \mathcal{D}f_i(x)$, $i = 1, 2$, si ha

$$\begin{aligned}(f_1 + f_2)'(x, g) &= \max_{l \in U_1} l \cdot g + \max_{l \in U_2} l \cdot g + \min_{l \in V_1} l \cdot g + \min_{l \in V_2} l \cdot g = \\ &= \max_{l_1 + l_2 \in U_1 + U_2} (l_1 + l_2) \cdot g + \min_{l_1 + l_2 \in V_1 + V_2} (l_1 + l_2) \cdot g = \max_{l \in U_1 + U_2} l \cdot g + \min_{l \in V_1 + V_2} l \cdot g\end{aligned}$$

perciò $[U_1 + U_2, V_1 + V_2] = \mathcal{D}(f_1 + f_2)(x)$. D'altra parte, per la definizione 3.1.7, si ha

$$[U_1 + U_2, V_1 + V_2] = [U_1, V_1] + [U_2, V_2] = \mathcal{D}(f_1)(x) + \mathcal{D}(f_2)(x).$$

□

Esempi 3.1.9. 1. La funzione $\psi(x) = -|x|$ è quasidifferenziabile su \mathbb{R} e il suo quasidifferenziale è dato da $\mathcal{D}\psi(x) = -\underline{\mathcal{D}}\varphi(x)$, dove $\varphi(x) = |x|$. Quindi (vedi Esempio 3.1.5(4.))

$$\mathcal{D}\psi(x) = [\{0\}, -\underline{\mathcal{D}}\varphi(x)]$$

dove $\underline{\mathcal{D}}\varphi(x)$ è dato da (3.1.1)

2. Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = |x| - |y|$.
 f è quasidifferenziabile su tutto \mathbb{R}^2 , in quanto è somma di due funzioni quasidifferenziabili su \mathbb{R}^2 :

$$f(x, y) = \varphi_1(x, y) + \varphi_2(x, y), \quad \varphi_1(x, y) = |x|, \quad \varphi_2(x, y) = -|y|$$

Infatti φ_1 è convessa e

$$\mathcal{D}\varphi_1(x, y) = [\underline{\partial}\varphi_1(x, y), \{0\}]$$

dove il sottodifferenziale $\underline{\partial}\varphi_1(x, y)$ è dato da (vedi Esempio 3.1.5(4.))

$$\underline{\partial}\varphi_1(x, y) = \begin{cases} \{(1, 0)\} & \text{se } x > 0 \\ \{(-1, 0)\} & \text{se } x < 0 \\ \text{co}\{(-1, 0), (1, 0)\} & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

La funzione φ_2 è concava e

$$\mathcal{D}\varphi_2(x, y) = [\{0\}, \bar{\partial}\varphi_2(x, y)]$$

dove il superdifferenziale $\bar{\partial}\varphi_2(x, y)$ è dato da

$$\bar{\partial}\varphi_2(x, y) = \begin{cases} \{(0, -1)\} & \text{se } y > 0 \\ \{(0, 1)\} & \text{se } y < 0 \\ \text{co}\{(0, -1), (0, 1)\} & \text{se } y = 0 \end{cases}$$

Dunque per la Proposizione 3.1.8,

$$\mathcal{D}f(x, y) = [\underline{\partial}\varphi_1(x, y), \{0\}] + [\{0\}, \bar{\partial}\varphi_2(x, y)] = [\underline{\partial}\varphi_1(x, y), \bar{\partial}\varphi_2(x, y)]$$

Osserviamo che, come deve essere, per $x \neq 0$ e $y \neq 0$ la coppia $(\underline{\partial}\varphi_1(x, y), \bar{\partial}\varphi_2(x, y))$ è equivalente a $(\{\nabla f(x, y)\}, \{(0, 0)\})$: infatti se ad esempio $x > 0$ e $y > 0$ (gli altri casi sono analoghi) si ha

$$(\underline{\partial}\varphi_1(x, y), \bar{\partial}\varphi_2(x, y)) = (\{(1, 0)\}, \{(0, -1)\}) \text{ e}$$

$$(\{\nabla f(x, y)\}, \{(0, 0)\}) = (\{(1, -1)\}, \{(0, 0)\})$$

e chiaramente $\{(1, 0)\} - \{(0, 0)\} = \{(1, -1)\} - \{(0, -1)\}$.

3.2 I giochi quasidifferenziabili

Con un procedimento simile a quello adottato da J.P. Aubin per i giochi localmente lipschitziani, Pechersky, in [10], propone, per i giochi con funzione

caratteristica v quasidifferenziabile in τ^N , con $\mathcal{D}v(\tau^N) = [U, V]$, l'insieme $U + V$ come un insieme di quasisoluzioni.

Evidentemente non può essere un insieme di soluzioni come l'abbiamo definito in 1.3.21, in quanto il quasidifferenziale non è un insieme ma una classe di equivalenza di coppie di insiemi e, come vedremo, non tutte le coppie equivalenti hanno come somma un insieme di soluzioni.

Pechersky definisce quindi un nuovo tipo di soluzione, chiamata soluzione st , che è la somma del punto di Steiner di U e del punto di Steiner di V (dove ancora $[U, V] = \mathcal{D}v(\tau^N)$).

Dopo aver definito il punto di Steiner ed aver visto alcune sue proprietà, vedremo che la soluzione st è Pareto-ottimale, simmetrica, soddisfa la proprietà del giocatore inattivo, coincide con il valore di Shapley generalizzato se $v \in V^n$ e con il punto di Steiner del nucleo se v è superadditiva. Quindi, anche se l'insieme costituito dalla sola soluzione st non è un insieme di soluzioni secondo la definizione che abbiamo dato, la soluzione st può certamente essere considerata come una soluzione puntuale del gioco. Infine vedremo cosa succede se la funzione caratteristica oltre a essere quasidifferenziabile è anche localmente lipschitziana.

3.2.1 Le quasisoluzioni

Definizione 3.2.1. Dato $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ sia

$$H_x = \{c \in \mathbb{R}^n \mid (c - x) \cdot x = 0\}$$

l'iperpiano passante per x e perpendicolare ad x .

Siano inoltre $T \subset H_x$ un aperto relativo di H_x non vuoto e sia $y \in T$.

Una funzione $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ si dice quasidifferenziabile in y se esistono una coppia di insiemi convessi e compatti (U_T, V_T) , entrambi contenuti in $H_x^0 = \{c \in \mathbb{R}^n \mid c \cdot x = 0\}$, tali che

$$f'(y, g) = \max_{l \in U_T}(l, g) + \min_{l \in V_T}(l, g), \quad \forall g \in H_x^0. \quad (3.2.1)$$

L'insieme delle coppie di insiemi convessi e compatti (U_T, V_T) per cui vale (3.2.1) si chiama il quasidifferenziale di f nel punto x .

Allo stesso modo che per una funzione quasidifferenziabile definita su un aperto di \mathbb{R}^n , il quasidifferenziale di una funzione quasidifferenziabile definita su un aperto relativo di un iperpiano non è un'unica coppia di insiemi convessi, bensì la classe delle coppie equivalenti (con la stessa relazione di equivalenza che vale per le funzioni definite su un aperto). È un fatto evidente, visto che, con un semplice cambiamento di variabili, possiamo considerare f come

definita su un aperto di \mathbb{R}^{n-1} .

Vediamo cosa succede se restringiamo una funzione quasidifferenziabile su un aperto all'intersezione dell'aperto con un iperpiano.

Proposizione 3.2.2. *Sia $f : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$ quasidifferenziabile in un punto $x \in \overset{\circ}{\mathbb{R}}_+^n$ e sia $\mathcal{D}f(x) = [U, V]$. Allora la funzione $f_1 = f|_{T_x}$, dove $T_x = \mathbb{R}_+^n \cap H_x$, è quasidifferenziabile in x e il suo quasidifferenziale è dato da*

$$\mathcal{D}f_1(x) = [\pi_x(U), \pi_x(V)]$$

dove

$$\pi_x(C) = \left\{ c - \frac{(c \cdot x)}{|x|^2} x \mid c \in C \right\} \quad \forall C \subset \mathbb{R}^n$$

è la proiezione ortogonale di C sull'iperpiano H_x^0 .

Dimostrazione. Sia (U, V) un rappresentante di $\mathcal{D}f(x)$ e sia $g \in H_x^0$. Per $\alpha > 0$ sufficientemente piccolo, $x + \alpha g \in T_x$, quindi

$$\begin{aligned} f'_1(x, g) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{1}{\alpha} (f_1(x + \alpha g) - f_1(x)) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{1}{\alpha} (f(x + \alpha g) - f(x)) = \\ &= f'(x, g) = \max_{l \in U} l \cdot g + \min_{l \in V} l \cdot g \end{aligned}$$

D'altra parte ogni $l \in U$ e ogni $l \in V$ può essere scritto come $l = l_1 + l_2$ con $l_1 = \frac{l \cdot x}{|x|^2} x$ e $l_2 = l - l_1$. Chiaramente l_1 è ortogonale a $g \in H_x^0$, quindi $g \cdot l = g \cdot l_2$, inoltre se $l \in U$ o $l \in V$ allora l_2 appartiene rispettivamente a $\pi_x(U)$ o $\pi_x(V)$. Ne segue che

$$\max_{l \in U} l \cdot g = \max_{l_2 \in \pi_x(U)} l_2 \cdot g$$

e analogamente

$$\min_{l \in V} l \cdot g = \min_{l_2 \in \pi_x(V)} l_2 \cdot g$$

pertanto $(\pi_x(U), \pi_x(V))$ è un rappresentante di $\mathcal{D}f_1(x)$. Resta da mostrare che (U_1, V_1) è equivalente a (U, V) se e solo se $(\pi_x(U_1), \pi_x(V_1))$ è equivalente a $(\pi_x(U), \pi_x(V))$. Questo si vede facilmente usando il fatto che la proiezione su un iperpiano è additiva. □

Per quanto riguarda l'operazione inversa, ossia se, invece di restringere una funzione quasidifferenziabile da \mathbb{R}_+^n a un iperpiano, estendiamo una funzione definita su un insieme contenuto in un iperpiano a \mathbb{R}_+^n abbiamo il seguente risultato.

Proposizione 3.2.3. *Sia $x \in \mathring{\mathbb{R}}_+^n$ e $f : H_x \cap \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione quasidifferenziabile in x con quasidifferenziale $\mathcal{D}f(x) = [U, V]$. Se $\bar{f} : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$ è l'estensione positivamente omogenea di f a \mathbb{R}_+^n allora \bar{f} è quasi differenziabile in x e il suo quasidifferenziale è dato da*

$$\mathcal{D}\bar{f}(x) = \left[U + \frac{f(x)}{|x|^2}x, V \right]. \quad (3.2.2)$$

Dimostrazione. Anzitutto osserviamo che (U_1, V_1) e (U_2, V_2) sono due coppie equivalenti se e solo se

$$U_1 + \frac{f(x)}{|x|^2}x - V_2 = U_2 + \frac{f(x)}{|x|^2}x - V_1$$

pertanto ha senso la formula (3.2.2).

Dobbiamo provare che \bar{f} è direzionalmente derivabile in x .

Poiché f è quasidifferenziabile in x , per ogni $h \in H_x^0$ si ha

$$f'(x, h) = \max_{l \in U} l \cdot h + \min_{l \in V} l \cdot h \quad (3.2.3)$$

Sia ora $g \in \mathbb{R}^n$. Supponiamo che g non sia parallelo a x , ossia $g \neq \lambda x$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$. Sia $\alpha > 0$. Per α sufficientemente piccolo si ha

$$\frac{|x|}{(x + \alpha g) \cdot x}x + \alpha g \in H_x \cap \mathbb{R}_+^n$$

infatti se α è sufficientemente piccolo $x + \alpha g \in \mathbb{R}_+^n$, $(x + \alpha g) \cdot x > 0$ e

$$\left(\frac{|x|}{(x + \alpha g) \cdot x}x + \alpha g - x \right) \cdot x = 0$$

Poniamo

$$h = \frac{|x|}{(x + g) \cdot x}(x + g) - x \in H_x^0. \quad (3.2.4)$$

Possiamo scrivere

$$\frac{|x|}{(x + \alpha g) \cdot x}x + \alpha g = x + \mu h, \quad \text{dove} \quad \alpha = \frac{\mu|x|^2}{|x|^2 + g \cdot x - \mu g \cdot x}.$$

Chiaramente $\alpha \rightarrow 0^+$ se e solo se $\mu \rightarrow 0^+$. Sfruttando il fatto che \bar{f} è positivamente omogenea otteniamo

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{\bar{f}(x + \alpha g) - \bar{f}(x)}{\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{1}{\alpha} \left[\bar{f}(x + h\mu) \frac{(x + \alpha g) \cdot x}{|x|^2} - \bar{f}(x) \right] =$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \left[\frac{f(x + \mu h) - f(x)}{\alpha} + f(x + \mu h) \frac{g \cdot x}{|x|^2} \right] = \\
 &= \lim_{\mu \rightarrow 0^+} \left[\left(\frac{f(x + \mu h) - f(x)}{\mu} \right) \frac{|x|^2 + (1 - \mu)g \cdot x}{|x|^2} + f(x + \mu h) \frac{g \cdot x}{|x|^2} \right] = \\
 &= f'(x, h) \frac{|x|^2 + g \cdot x}{|x|^2} + f(x) \frac{g \cdot x}{|x|^2}
 \end{aligned}$$

Pertanto per $g \neq \lambda x$ la derivata direzionale $\bar{f}'(x, g)$ esiste, inoltre per (3.2.3) si ha

$$\bar{f}'(x, g) = \left(\max_{l \in U} l \cdot h + \min_{l \in V} l \cdot h \right) \frac{|x|^2 + g \cdot x}{|x|^2} + f(x) \frac{g \cdot x}{|x|^2}$$

Ricordando che h è dato da (3.2.4), si ha

$$h \frac{|x|^2 + g \cdot x}{|x|^2} = g - \frac{g \cdot x}{|x|^2} x$$

D'altra parte se $l \in U$ o $l \in V$ si ha $l \in H_x^0$ e quindi $l \cdot \frac{g \cdot x}{|x|^2} x = 0$. Dunque

$$\begin{aligned}
 \bar{f}'(x, g) &= \max_{l \in U} l \cdot g + \min_{l \in V} l \cdot g + f(x) \frac{g \cdot x}{|x|^2} = \\
 &= \max_{l \in U} \left(l + \frac{f(x)}{|x|^2} x \right) \cdot g + \min_{l \in V} l \cdot g \\
 &= \max_{l' \in U + \frac{f(x)}{|x|^2} x} l' \cdot g + \min_{l \in V} l \cdot g
 \end{aligned}$$

Dunque resta solo da vedere che lo stesso risultato vale per $g = \lambda x$ ($\lambda \neq 0$). Poiché \bar{f} è positivamente omogenea, per $\alpha > 0$ sufficientemente piccolo, si ha

$$\frac{\bar{f}(x + \alpha \lambda x) - \bar{f}(x)}{\alpha} = \frac{\alpha \lambda \bar{f}(x)}{\alpha} = \lambda \bar{f}(x)$$

Dunque $\bar{f}'(x, \lambda x) = \lambda \bar{f}(x)$. D'altra parte, poiché U e V stanno nell'iperpiano H_x^0 , si ha

$$\max_{l \in U + \frac{f(x)}{|x|^2} x} l \cdot \lambda x + \min_{l \in V} l \cdot \lambda x = \frac{f(x)}{|x|^2} x \cdot \lambda x = \lambda \bar{f}(x)$$

Ne segue che \bar{f} è quasidifferenziabile in x e il suo quasidifferenziale è dato da

$$\mathcal{D}\bar{f}(x) = \left[U + \frac{f(x)}{|x|^2} x, V \right]$$

□

Osservazione 3.2.4. Le due proposizioni precedenti ci permettono di dire che se $f : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$ è positivamente omogenea e quasidifferenziabile in un punto $x \in \mathring{\mathbb{R}}_+^n$ con $\mathcal{D}f(x) = [U, V]$, allora

$$\mathcal{D}f(x) = \left[\pi_x(U) + \frac{f(x)}{|x|^2}x, \pi_x(V) \right] \quad (3.2.5)$$

Infatti $f_1 = f|_{H_x \cap \mathring{\mathbb{R}}_+^n}$ è quasidifferenziabile in x con

$$\mathcal{D}f_1(x) = [\pi_x(U), \pi_x(V)]$$

e f è una estensione positivamente omogenea di f_1 a \mathbb{R}_+^n , dunque vale (3.2.5).

Introduciamo ora l'insieme delle quasisoluzioni di un gioco cooperativo generalizzato $([0, 1]^n, v)$ con funzione caratteristica quasidifferenziabile nel punto τ^N . Per brevità, d'ora in poi chiameremo questo tipo di gioco semplicemente gioco quasidifferenziabile.

Definizione 3.2.5. Sia $([0, 1]^n, v)$ un gioco quasidifferenziabile e sia $(U, V) \in \mathcal{D}v(\tau^N)$ un elemento del quasidifferenziale di v in τ^N . Allora la somma

$$S_{(U,V)}(v) = \left(\pi_{\tau^N}(U) + \frac{v(\tau^N)}{|\tau^N|^2} \tau^N \right) + \pi_{\tau^N}(V)$$

si dice un insieme di quasisoluzioni del gioco $([0, 1]^n, v)$.

Un insieme di quasisoluzioni è Pareto-ottimale, simmetrico e ha la proprietà del giocatore inattivo. Infatti se $(U, V) \in \mathcal{D}v(\tau^N)$ si ha

- Ottimalità di Pareto: Dati $x \in \pi_{\tau^N}(U) + \frac{v(\tau^N)}{|\tau^N|^2} \tau^N$ e $y \in \pi_{\tau^N}(V)$

$$\sum_{i \in N} (x_i + y_i) = (x + y) \cdot \tau^N = \frac{v(\tau^N)}{|\tau^N|^2} \tau^N \cdot \tau^N = v(\tau^N)$$

in quanto $\pi_{\tau^N}(U), \pi_{\tau^N}(V) \in H_{\tau^N}^0$.

- Simmetria: Data una permutazione $\theta : N \rightarrow N$ dei giocatori, $\theta * v$ è quasidifferenziabile e il suo quasidifferenziale in τ^N è dato da $\mathcal{D}(\theta * v)(\tau^N) = [\theta(U), \theta(V)]$. Infatti

$$(\theta * v)'(\tau^N, g) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{(\theta * v)(\tau^N + \alpha g) - (\theta * v)(\tau^N)}{\alpha} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{v(\tau^N + \alpha \theta^{-1} g) - v(\tau^N)}{\alpha} = v'(\tau^N, \theta^{-1} g) = \\
 &= \max_{l \in U} l \cdot \theta^{-1} g + \min_{l \in V} l \cdot \theta^{-1} g = \max_{l \in U} \theta l \cdot g + \min_{l \in V} \theta l \cdot g = \\
 &= \max_{l' \in \theta(U)} l' \cdot g + \min_{l' \in \theta(V)} l' \cdot g.
 \end{aligned}$$

Inoltre si può mostrare facilmente che $\pi_{\tau^N} \circ \theta = \theta \circ \pi_{\tau^N}$ e quindi

$$\pi_{\tau^N}(\theta(U)) + \frac{v(\tau^N)}{|\tau^N|^2} \tau^N + \pi_{\tau^N}(\theta(V)) = \theta \left(\pi_{\tau^N}(U) + \frac{v(\tau^N)}{|\tau^N|^2} \tau^N + \pi_{\tau^N}(V) \right).$$

Pertanto

$$S_{(U,V)}(\theta * v) = S_{(\theta(U), \theta(V))}(v) = \theta S_{(U,V)}(v).$$

- Proprietà del giocatore inattivo: Sia $i \in N$ un giocatore inattivo per v , allora per ogni $g \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$\begin{aligned}
 (\pi_{N \setminus \{i\}} * v)'(\tau^N, g) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{1}{\alpha} (v(\tau^{N \setminus \{i\}} + \alpha g^{N \setminus \{i\}}) - v(\tau^{N \setminus \{i\}})) = \\
 &= v'(\tau^{N \setminus \{i\}}, g^{N \setminus \{i\}}).
 \end{aligned}$$

Perciò $(U, V) = (\pi_{N \setminus \{i\}} * U, \pi_{N \setminus \{i\}} * V)$.

Dunque si ha

$$S_{(U,V)}(v) = S_{(\pi_{N \setminus \{i\}} * U, \pi_{N \setminus \{i\}} * V)}(\pi_{N \setminus \{i\}} * v)$$

ricordando che $\pi_{N \setminus \{i\}} * v$ è definita su \mathbb{R}_+^{n-1} si ottiene

$$S_{(U,V)}(v) = \pi_{\tau^N}(\pi_{N \setminus \{i\}} * U) + \frac{v(\tau^{N \setminus \{i\}})}{|\tau^{N \setminus \{i\}}|^2} \tau^{N \setminus \{i\}} + \pi_{\tau^N}(\pi_{N \setminus \{i\}} * V) =$$

$$\pi_{N \setminus \{i\}} * S_{(U,V)}(\pi_{N \setminus \{i\}} * v) = \pi_{N \setminus \{i\}} * S_{(U,V)}(v).$$

Osservazione 3.2.6. Ricordiamo che la differenza di insiemi non è l'operazione inversa della somma. In particolare date due coppie di insiemi convessi e compatti (U_1, V_1) e (U_2, V_2) equivalenti, cioè tali che $U_1 - V_2 = U_2 - V_1$, in generale $U_1 + V_1 \neq U_2 + V_2$. Pertanto l'insieme delle quasisoluzioni di un gioco quasidifferenziabile non è unico: $[U_1, V_1] = [U_2, V_2] = \mathcal{D}v(\tau^N)$ non implica $S_{(U_1, V_1)}(v) = S_{(U_2, V_2)}(v)$.

Proprio per questo motivo un insieme di quasisoluzioni non è un insieme di soluzioni del gioco. Ad esempio se consideriamo un gioco superadditivo, il

nucleo del gioco è un insieme di quasisoluzioni del gioco, infatti il quasidifferenziale di v in τ^N è $\mathcal{D}v(\tau^N) = [\{0\}, \bar{\partial}v(\tau^N)]$. Dunque per l'osservazione 3.2.4

$$[\pi_{\tau^N}(\{0\}) + \frac{v(\tau^N)}{|\tau^N|^2}\tau^N, \pi_{\tau^N}(\bar{\partial}v(\tau^N))] = [\{0\}, \bar{\partial}v(\tau^N)]$$

ossia

$$\bar{\partial}v(\tau^N) - \frac{v(\tau^N)}{|\tau^N|^2}\tau^N = \pi_{\tau^N}(\bar{\partial}v(\tau^N)).$$

Si verifica facilmente che $A - \{c\} = B$ se e solo se $A = B + \{c\}$, quindi

$$\bar{\partial}v(\tau^N) = \pi_{\tau^N}(\bar{\partial}v(\tau^N)) + \frac{v(\tau^N)}{|\tau^N|^2}\tau^N$$

e il secondo membro dell'ultima uguaglianza è l'insieme di quasisoluzioni $S_{(\{0\}, \bar{\partial}v(\tau^N))}(v)$.

D'altra parte ogni coppia di insiemi convessi e compatti (U, V) tale che

$$V = U - \bar{\partial}v(\tau^N)$$

appartiene a $\mathcal{D}v(\tau^N)$ e in generale $S_{(U, V)}(v) \neq S_{(\{0\}, \bar{\partial}v(\tau^N))}(v)$.

Dunque un gioco superadditivo può avere insiemi di quasisoluzioni che non coincidono con il nucleo del gioco.

Esempio 3.2.7. Consideriamo il gioco dell'esempio 2.2.4. La funzione caratteristica

$$v(\tau) = \max\{\tau_1, \tau_2\} - \frac{1}{3}|\tau_1 - \tau_2|$$

è direzionalmente derivabile in τ^N e si ha

$$v'(\tau^N, g) = \begin{cases} \frac{2}{3}g_1 + \frac{1}{3}g_2 & g_1 \geq g_2 \\ \frac{2}{3}g_2 + \frac{1}{3}g_1 & g_1 < g_2. \end{cases}$$

Possiamo quindi scrivere

$$v'(\tau^N, g) = \max_{u \in \{\frac{2}{3}e_1, \frac{2}{3}e_2\}} u \cdot g + \min_{v \in \{\frac{1}{3}e_1, \frac{1}{3}e_2\}} v \cdot g.$$

Dunque $\mathcal{D}v(\tau^N)$ è la classe di equivalenza di (U, V) con

$$U = co \left\{ \frac{2}{3}e_1, \frac{2}{3}e_2 \right\}, \quad V = co \left\{ \frac{1}{3}e_1, \frac{1}{3}e_2 \right\}. \quad (3.2.6)$$

Calcoliamo l'insieme di quasisoluzioni associato a questa coppia di insiemi.

$$\pi_{\tau^N}(U) = \left\{ \left(\frac{2}{3}\lambda, \frac{2}{3}(1-\lambda) \right) - \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right) \mid \lambda \in [0, 1] \right\} = U - \frac{1}{3}\tau^N$$

e analogamente

$$\pi_{\tau^N}(V) = V - \frac{1}{6}\tau^N.$$

Dunque l'insieme di quasisoluzioni associato a (U, V) è

$$S_{(U,V)}(v) = \left(U - \frac{1}{3}\tau^N \right) + \frac{1}{2}\tau^N + \left(V - \frac{1}{6}\tau^N \right) = U + V = \text{co}\{(1, 0), (0, 1)\}.$$

Osserviamo che la derivata direzionale di v è continua, perciò anche la coppia $(\partial_{C1}v(\tau^N), \{0\})$ è un elemento del quasidifferenziale. L'insieme di quasisoluzioni associato a questa coppia è diverso da quello che abbiamo trovato per la coppia data da (3.2.6), infatti

$$S_{(\partial_{C1}v(\tau^N), \{0\})} = \partial_{C1}v(\tau^N) = \text{co} \left\{ \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right) \right\}.$$

Pechersky, in [10], propone un altro tipo di soluzione che non dipende dall'elemento del quasidifferenziale scelto: la soluzione st .

Per poter definire la soluzione st e vedere quali proprietà ha, definiamo il punto di Steiner ed esponiamo le sue caratteristiche principali.

3.2.2 Il punto di Steiner

Definizione 3.2.8. Sia $K \subset \mathbb{R}^n$ un insieme convesso e compatto. Il punto di Steiner di K è il punto

$$s(K) = \frac{1}{\omega_n} \int_{S^{n-1}} y p_K(y) d\sigma(y) \in \mathbb{R}^n$$

dove $\omega_n = m_n(B(0, 1))$ è la misura n -dimensionale della palla unitaria in \mathbb{R}^n e $p_K : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è la funzione di supporto di K , cioè

$$p_K(y) = \max_{x \in K} x \cdot y \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Indichiamo con \mathcal{K}^n l'insieme dei $K \subset \mathbb{R}^n$ convessi e compatti. Possiamo considerare il punto di Steiner come un'applicazione

$$\begin{aligned} s : \mathcal{K}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ K &\mapsto s(K) \end{aligned}$$

Proposizione 3.2.9. $s : \mathcal{K}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è additiva e positivamente omogenea.

Dimostrazione. Siano K_1 e K_2 due insiemi convessi e compatti. La funzione di supporto di $K_1 + K_2$ è data da

$$\begin{aligned} p_{K_1+K_2}(y) &= \max_{v \in K_1+K_2} v \cdot y = \max_{v_1 \in K_1, v_2 \in K_2} (v_1 + v_2) \cdot y = \\ &= \max_{v_1 \in K_1} v_1 \cdot y + \max_{v_2 \in K_2} v_2 \cdot y = p_{K_1}(y) + p_{K_2}(y) \end{aligned}$$

per ogni $y \in \mathbb{R}^n$. Dunque

$$\begin{aligned} s(K_1 + K_2) &= \frac{1}{\omega_n} \int_{S^{n-1}} y p_{K_1+K_2}(y) d\sigma(y) = \\ &= \frac{1}{\omega_n} \int_{S^{n-1}} y p_{K_1}(y) d\sigma(y) + \frac{1}{\omega_n} \int_{S^{n-1}} y p_{K_2}(y) d\sigma(y) = s(K_1) + s(K_2). \end{aligned}$$

Vediamo che per ogni $\lambda > 0$ si ha $s(\lambda K) = \lambda s(K)$.

$$p_{\lambda K}(y) = \max_{v \in \lambda K} v \cdot y = \max_{v' \in K} \lambda v' \cdot y = \lambda p_K(y).$$

Da cui segue $s(\lambda K) = \lambda s(K)$, per $\lambda > 0$.

□

Proposizione 3.2.10. Per ogni trasformazione ortogonale T di \mathbb{R}^n si ha

$$s(T(K)) = T(s(K)), \quad \forall K \in \mathcal{K}^n.$$

Dimostrazione. Anzitutto osserviamo che per ogni $K \in \mathcal{K}^n$ e ogni $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ortogonale si ha

$$p_{T(K)}(y) = p_K(T^t y) \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Infatti $x \in T(K)$ se e solo se $T^t x \in K$, pertanto

$$\begin{aligned} p_{T(K)}(y) &= \max_{x \in T(K)} x \cdot y = \max_{x \in T(K)} (T(T^t x)) \cdot y = \max_{x \in T(K)} T^t x \cdot T^t y = \\ &= \max_{T^t x' \in T(K)} x' \cdot T^t y = \max_{x' \in K} x' \cdot T^t y = p_K(T^t y). \end{aligned}$$

Dunque il punto di Steiner di $T(K)$ è dato da

$$s(T(K)) = \frac{1}{\omega_n} \int_{S^{n-1}} y p_K(T^t y) d\sigma(y).$$

Effettuiamo il cambiamento di variabili $z = T^t y$.

Poiché $|\det T| = 1$ e $T(S^{n-1}) = S^{n-1}$, si ha

$$s(T(K)) = \frac{1}{\omega_n} \int_{S^{n-1}} (Tz) p_K(z) d\sigma(z) = T(s(K)),$$

che completa la dimostrazione.

□

Corollario 3.2.11. $s : \mathcal{K}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è lineare.

Dimostrazione. Abbiamo già visto che s è additiva e positivamente omogenea, ci basta quindi provare che $s(-K) = -s(K)$. Sia $T = -I$, dove $I : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è l'identità. Chiaramente T è una trasformazione ortogonale di \mathbb{R}^n , perciò per la proposizione precedente

$$-s(K) = T(s(K)) = s(T(K)) = s(-K).$$

Quindi s è lineare.

□

Vogliamo vedere che per ogni $K \in \mathcal{K}^n$ il punto di Steiner di K appartiene a K . Per prima cosa abbiamo bisogno di un risultato di approssimazione per gli elementi di \mathcal{K}^n .

Definizione 3.2.12. Un insieme della forma $K = \text{co}\{v_1, \dots, v_m\}$ con $v_i \in \mathbb{R}^n$ per $i = 1, \dots, m$ si chiama un politopo.

Chiaramente ogni politopo è un elemento di \mathcal{K}^n .

Per ogni $K \subset \mathbb{R}^n$ chiuso e per ogni $r > 0$ poniamo

$$K_r = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, K) < r\}.$$

Lemma 3.2.13. *L'applicazione*

$$\begin{aligned} \Delta : \mathcal{K}^n \times \mathcal{K}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (K, H) &\mapsto \delta_{K,H} + \delta_{H,K} \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned} \delta_{K,H} &= \inf\{r > 0 : H \subset K_r\} & e \\ \delta_{H,K} &= \inf\{r > 0 : K \subset H_r\} \end{aligned}$$

definisce una metrica su \mathcal{K}^n .

Lemma 3.2.14. Per ogni $K \in \mathcal{K}^n$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un politopo H tale che $K \subset H$ e $\Delta(K, H) < \varepsilon$.

Dimostrazione. Sia $K \in \mathcal{K}^n$ e sia $\varepsilon > 0$. Possiamo supporre che K abbia dimensione n (altrimenti basta prendere il sottospazio di dimensione $\dim K$ in cui K è contenuto). Poiché \overline{K}_ε è compatto esiste $R > 0$ tale che $\overline{K}_\varepsilon \subset B(0, R)$. Sia $V = \{v_1, \dots, v_m\} \subset B(0, R)$ tale che

$$B(0, R) \subset V_{\varepsilon/4}.$$

Definiamo

$$H = \text{co}(V \cap K_\varepsilon).$$

Chiaramente H è un politopo, inoltre, poiché K_ε è convesso, $H \subset K_\varepsilon$. Dunque $\delta_{K,H} < \varepsilon$.

Ci basta quindi provare che $K \subset H$, infatti in tal caso si avrebbe $\delta_{H,K} = 0$ e perciò $\Delta(H, K) = \delta_{K,H} < \varepsilon$.

Supponiamo per assurdo che esista $x \in K \cap (H)^c$. Allora esiste un iperpiano Π passante per x che non taglia H (cioè tale che non ci siano punti di H da entrambi le parti di Π), infatti per il teorema di Hahn-Banach esiste un iperpiano Π' che separa la parte interna di H e x e basta quindi prendere come Π l'iperpiano parallelo a Π' passante per x . Siano x_1 e x_2 i due punti a distanza $\varepsilon/2$ da x sulla retta passante per x e perpendicolare a Π . I due punti stanno entrambi in $\overline{K}_{\varepsilon/2} \subset B(0, R)$ dunque esistono $v_{i_1}, v_{i_2} \in V$ tali che

$$|v_{i_1} - x_1| < \varepsilon/4 \quad \text{e} \quad |v_{i_2} - x_2| < \varepsilon/4.$$

Quindi $v_{i_1}, v_{i_2} \in V \cap K_\varepsilon \subset H$ e stanno da parti opposte di Π , ossia Π taglia H , contro l'ipotesi iniziale. □

Lemma 3.2.15. $s : \mathcal{K}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è continua rispetto alla metrica Δ definita su \mathcal{K}^n .

Dimostrazione. Fissato $\varepsilon > 0$, siano $K, H \in \mathcal{K}^n$ tali che $\Delta(K, H) \leq \varepsilon$. In particolare abbiamo quindi $K \subset \overline{H}_\varepsilon$ e $H \subset \overline{K}_\varepsilon$. Dunque per ogni $y \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$\begin{aligned} p_K(y) - p_H(y) &= \max_{x \in K} x \cdot y - \max_{x \in H} x \cdot y \leq \max_{x \in \overline{H}_\varepsilon} x \cdot y - \max_{x \in H} x \cdot y = \\ &= \max_{x \in \overline{H}_\varepsilon} x \cdot y - \max_{x \in H} x \cdot y = \max_{x \in H} x \cdot y + \max_{x \in B(0, \varepsilon)} x \cdot y - \max_{x \in H} x \cdot y \\ &= \max_{x \in B(0, \varepsilon)} x \cdot y = \varepsilon |y| \end{aligned}$$

e analogamente

$$p_K(y) - p_H(y) \geq \max_{x \in K} x \cdot y - \max_{x \in \overline{K}_\varepsilon} x \cdot y = \max_{x \in K} x \cdot y - \max_{x \in K} x \cdot y - \max_{x \in B(0, \varepsilon)} x \cdot y =$$

$$= - \max_{x \in \overline{B(0, \varepsilon)}} x \cdot y = -\varepsilon|y|.$$

Pertanto $|p_K(y) - p_H(y)| \leq \varepsilon|y|$ per ogni $y \in \mathbb{R}^n$, da cui segue immediatamente

$$|s(K) - s(H)| \leq C\varepsilon$$

dove $C = C(n)$ dipende solo dalla dimensione n .

□

Teorema 3.2.16. *Per ogni $K \in \mathcal{K}^n$ si ha $s(K) \in K$.*

Dimostrazione. Ci basterà vedere che la tesi vale per i politopi. Infatti, se vale per i politopi, per il Lemma 3.2.14, per ogni $K \in \mathcal{K}^n$ possiamo trovare una successione di politopi $\{H_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tale che $K \subset H_i$ per ogni i e $\Delta(K, H_i) \rightarrow 0$. Pertanto per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\nu_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$s(H_i) \in H_i \subset \overline{K}_\varepsilon \quad \forall i \geq \nu_\varepsilon$$

e per il Lemma 3.2.15

$$d(s(K), K) \leq |s(K) - s(H_i)| + d(s(H_i), K) \leq C\varepsilon + \varepsilon.$$

Dunque $s(K) \in \overline{K}_{C'\varepsilon}$ per ogni $\varepsilon > 0$, ossia

$$s(K) \in \bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{K}_{C'\varepsilon} = K.$$

Vediamo quindi che se H è un politopo allora $s(H) \in H$.

Sia $H = \text{co}\{v_1, \dots, v_m\}$. Osserviamo che, per ogni $y \in \mathbb{R}^n$, se $p_H(y) = \bar{x} \cdot y$ allora $\bar{x} \in \{v_1, \dots, v_m\}$. Infatti

$$\begin{aligned} \max_{x \in H} x \cdot y &= \max_{\substack{(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in [0, 1]^m \\ \lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1}} (\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m) \cdot y \leq \\ &\leq \max_{\substack{(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in [0, 1]^m \\ \lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1}} (\lambda_1 + \dots + \lambda_m) \max_{j \in \{1, \dots, m\}} v_j \cdot y = \max_{j \in \{1, \dots, m\}} v_j \cdot y. \end{aligned}$$

D'altra parte $v_1, \dots, v_m \in K$ dunque $p_H(y) = \max_{j \in \{1, \dots, m\}} v_j \cdot y$.

Definiamo

$$S_j = \{y \in S^{n-1} : p_H(y) = v_j \cdot y\} \quad \text{e}$$

$$B_j = \{y \in B(0, 1) : y/|y| \in S_j\} \quad j = 1, \dots, m$$

Chiaramente per quanto abbiamo appena visto $\cup_{j=1}^m S_j = S^{n-1}$.

Inoltre $y \in S_j$ è il versore normale esterno $\nu(y)$ di S_j nel punto y . Pertanto

$$(s(H))_i = \frac{1}{\omega_n} \int_{S^{n-1}} p_H(y) y_i d\sigma(y) = \frac{1}{\omega_n} \sum_{j=1}^m \int_{S_j} (y \cdot v_j) \nu_i(y) d\sigma(y)$$

Gli S_j che sono non vuoti hanno parte interna relativa regolare (in quanto p_H è differenziabile in ogni punto dove il massimo è unico) e bordo regolare a tratti. Ne segue che anche il bordo di B_j sarà regolare a tratti, essendo formato da un numero finito di facce $(n-1)$ -dimensionali. Inoltre ogni faccia del bordo $\partial B_j \setminus S_j$ è comune ad un altro dei $\partial B_l \setminus S_l$.

Allora

$$\frac{1}{\omega_n} \sum_{j=1}^m \int_{S_j} (y \cdot v_j) \nu_i(y) d\sigma(y) = \frac{1}{\omega_n} \sum_{j=1}^m \int_{\partial B_j} (y \cdot v_j) \nu_i(y) d\sigma(y)$$

perché i contributi sulle facce $\cup_{j=1}^m (\partial B_j \setminus S_j)$ si cancellano fra loro dato che le normali esterne hanno segni opposti. Possiamo quindi applicare il teorema di Gauss-Green e si ha

$$\begin{aligned} (s(H))_i &= \frac{1}{\omega_n} \sum_{j=1}^m \int_{\partial B_j} (y \cdot v_j) \nu_i(y) d\sigma(y) = \frac{1}{\omega_n} \sum_{j=1}^m \int_{B_j} \frac{\partial}{\partial y_i} (y \cdot v_j) dy = \\ &= \frac{1}{\omega_n} \sum_{j=1}^m \int_{B_j} (v_j)_i dy = \sum_{j=1}^m \frac{m_n(B_j)}{\omega_n} (v_j)_i, \end{aligned}$$

cioè

$$s(H) = \sum_{j=1}^m \frac{m_n(B_j)}{\omega_n} v_j$$

che è una combinazione convessa dei punti v_1, \dots, v_m , poiché $\sum_{j=1}^m m_n(B_j) = \omega_n$, pertanto $s(H) \in H$.

□

Corollario 3.2.17. 1. Per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ si ha $s(\{x\}) = x$.

2. Per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ e ogni $r > 0$ si ha $s(\overline{B(x, r)}) = x$.

3.2.3 Le soluzioni st

Definizione 3.2.18. Sia $v : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione caratteristica di un gioco quasidifferenziabile e sia $\mathcal{D}v(\tau^N) = [U, V]$.

Il vettore

$$st(v) = s(U) + s(V),$$

dove $s : \mathcal{K}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è il punto di Steiner, si dice la soluzione st del gioco $([0, 1]^n, v)$.

Osserviamo che è una buona definizione, cioè che non dipende dall'elemento della classe di equivalenza $[U, V]$: infatti se $[U_1, V_1] = [U, V]$, cioè $U_1 - V = U - V_1$, allora per la linearità di s si ha

$$s(U_1) - s(V) = s(U) - s(V_1),$$

ossia

$$s(U) + s(V) = s(U_1) + s(V_1).$$

Teorema 3.2.19. *Sia $([0, 1]^n, v)$ un gioco quasidifferenziabile. Allora la soluzione $st(v)$ del gioco è Pareto-ottimale, simmetrica e ha la proprietà del giocatore inattivo. Inoltre*

- (i) *se $v \in V^n$ allora $st(v)$ coincide con il valore di Shapley generalizzato;*
- (ii) *se v è superadditiva allora $st(v)$ coincide con il punto di Steiner del nucleo del gioco.*

Dimostrazione. Le proprietà (i) e (ii) seguono facilmente dalla definizione di $st(v)$. Infatti:

- (i) se $v \in V^n$ allora $\mathcal{D}v(\tau^N) = [\{\nabla v(\tau^N)\}, \{0\}]$ perciò

$$st(v) = s(\{\nabla v(\tau^N)\}) + s(\{0\}) = \nabla v(\tau^N);$$

- (ii) se v è superadditiva allora $\mathcal{D}v(\tau^N) = [\{0\}, \bar{\partial}v(\tau^N)] = [\{0\}, \mathcal{C}(v)]$, perciò

$$st(v) = s(\{0\}) + s(\mathcal{C}(v)) = s(\mathcal{C}(v)).$$

Poiché $st(v)$ non dipende dalla coppia $(U, V) \in [U, V]$, per l'osservazione 3.2.4 e la linearità di s , $st(v)$ è il punto di Steiner di un insieme di quasisoluzioni, cioè $st(v) = s(S_{(U,V)}(v))$, per un $(U, V) \in [U, V]$ qualsiasi.

Quindi $st(v) \in S_{(U,V)}(v)$. Abbiamo visto che

- $S_{(U,V)}(v)$ è Pareto ottimale, quindi $\sum_{i \in N} (st(v))_i = v(\tau^N)$, cioè $st(v)$ è Pareto ottimale;
- $S_{(U,V)}(v)$ è simmetrico, quindi per ogni permutazione $\theta : N \rightarrow N$ si ha

$$st(\theta * v) = s(\theta(S_{(U,V)}(v)))$$

d'altra parte una permutazione θ di N (o meglio la permutazione degli indici degli elementi di \mathbb{R}^n associata a θ) è una trasformazione ortogonale, dunque per la proposizione 3.2.10 si ha

$$s(\theta(S_{(U,V)}(v))) = \theta s(S_{(U,V)}(v)),$$

cioè $st(v)$ è simmetrico;

- $S_{(U,V)}(v)$ ha la proprietà del giocatore inattivo, quindi se $i \in N$ è inattivo si ha

$$\begin{aligned} st(v) &= st(\pi_{N \setminus \{i\}} * v) = \\ &= s \left(S_{(\pi_{N \setminus \{i\}}(U), \pi_{N \setminus \{i\}}(V))}(\pi_{N \setminus \{i\}} * v) \right) = s \left(\pi_{N \setminus \{i\}} * S_{(U,V)}(v) \right). \end{aligned}$$

Per (1.3.12) gli elementi di $\pi_{N \setminus \{i\}} * S_{(U,V)}(v)$ hanno tutti l' i -esima componente nulla, perciò $(st(v))_i = 0$.

□

Corollario 3.2.20. *Per ogni gioco quasidifferenziabile $([0, 1]^n, v)$, $st(v)$ è una soluzione puntuale del gioco.*

Dimostrazione. Segue dai teoremi 3.2.19 e 3.2.16.

□

Esempio 3.2.21. Consideriamo il gioco dell'esempio 2.2.4. Abbiamo visto che un insieme di quasisoluzioni del gioco è dato da

$$K = \text{co}\{(1, 0), (0, 1)\}.$$

Per il corollario 3.2.17, il punto di Steiner di K è il punto di mezzo dell'intervallo $\{(\lambda, 1 - \lambda) | \lambda \in [0, 1]\}$, quindi

$$st(v) = s(K) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right).$$

Osservazione 3.2.22. Se la funzione caratteristica v è anche localmente lipschitziana (oltre ad essere quasidifferenziabile in τ^N) e la derivata direzionale di v è semicontinua (superiormente o inferiormente) in τ^N per ogni $g \in \mathbb{R}^n$, allora la soluzione $st(v)$ è il punto di Steiner del sottodifferenziale di Clarke $\partial_{Cl}v(\tau^N)$. Infatti in tal caso abbiamo visto che

- $\mathcal{D}v(\tau^N) = [\partial_{Cl}v(\tau^N), \{0\}]$, se $v'(\tau^N, g)$ è semicontinua superiormente in τ^N per ogni $g \in \mathbb{R}^n$;
- $\mathcal{D}v(\tau^N) = [\{0\}, \partial_{Cl}v(\tau^N)]$, se $v'(\tau^N, g)$ è semicontinua inferiormente in τ^N per ogni $g \in \mathbb{R}^n$.

In particolare quindi, per il Teorema 2.2.3 in questo caso la soluzione st è anche atomica.

3.2.4 Le soluzioni *st* di un gioco localmente lipschitziano

A questo punto è interessante vedere cosa succede se la funzione caratteristica è sia quasidifferenziabile sia localmente lipschitziana e il quasidifferenziale di v in τ^N non è degenerare (cioè la derivata direzionale non è semicontinua). Nel caso generale non è detto che la soluzione *st* sia un elemento dell'insieme di soluzioni del gioco localmente lipschitziano, però con delle ipotesi di regolarità più deboli della semicontinuità della derivata direzionale possiamo ottenere questo risultato.

Anzitutto vediamo che la soluzione *st*, $st(v)$, di un gioco quasidifferenziabile $([0, 1]^n, v)$ appartiene a un sottoinsieme di $U + V$ (dove $[U, V] = \mathcal{D}v(\tau^N)$).

Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ quasidifferenziabile in $x_0 \in \Omega$. Scriviamo

$$f'(x_0, g) = p_U(g) + q_V(g), \quad g \in \mathbb{R}^n$$

con $p_U(g) = \max_{l \in U} l \cdot g$ e $q_V(g) = \min_{l \in V} l \cdot g$, dove $[U, V] = \mathcal{D}f(x_0)$.

Sappiamo che p_U è una funzione sublineare e q_V è una funzione superlineare quindi, in particolare, sono entrambe localmente lipschitziane e pertanto quasi ovunque differenziabili.

Osserviamo che per ogni $g \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$\underline{\partial}p_U(g) = \{v \in U : v \cdot g = p_U(g)\}.$$

infatti per definizione

$$\underline{\partial}p_U(g) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid p_U(h) - p_U(g) \geq v \cdot h - v \cdot g, \forall h \in \mathbb{R}^n\}$$

quindi l'inclusione $\{v \in U : v \cdot g = p_U(g)\} \subset \underline{\partial}p_U(g)$ è immediata (basta ricordare che $U = \underline{\partial}p_U(0)$), viceversa se $v \in \underline{\partial}p_U(g)$, scegliendo $h = 0$ e $h = 2g$ otteniamo $v \cdot g = p_U(g)$, per cui sostituendo si ha

$$p(h) \geq v \cdot h \quad \forall h \in \mathbb{R}^n$$

cioè $v \in \underline{\partial}p_U(0) = U$.

Ora, poichè p_U è quasi ovunque differenziabile, per quasi ogni $g \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$\underline{\partial}p_U(g) = \{\nabla p_U(g)\}.$$

Analogamente $\bar{\partial}q_V(g) = \{v \in V : v \cdot g = q_V(g)\}$ e per quasi ogni $g \in \mathbb{R}^n$ vale $\bar{\partial}q_V(g) = \{\nabla q_V(g)\}$.

Siano $T_U \subset \mathbb{R}^n$ l'insieme dei punti dove p_U è differenziabile e $T_V \subset \mathbb{R}^n$

l'insieme dei punti dove q_V è differenziabile. Allora per ogni $g \in T_U \cap T_V$ si ha

$$f'(x_0, g) = (\nabla p_U(g) + \nabla q_V(g)) \cdot g.$$

Consideriamo l'insieme $S_0 = S^{n-1} \cap (T_U \cap T_V)$.

La misura di $(n-1)$ -dimensionale di $S^{n-1} \setminus S_0$ è nulla, infatti per la positiva omogeneità di p_U e q_V si ha

$$S_0 = \left\{ \frac{g}{|g|} \mid g \in T_U \cap T_V \right\}.$$

Inoltre, sempre per la positiva omogeneità di p_U e q_V , si ha

$$\{\nabla p_U(g) + \nabla q_V(g) \mid g \in T_U \cap T_V\} = \{\nabla p_U(g) + \nabla q_V(g) \mid g \in S_0\}.$$

Vediamo che il punto di Steiner di $U + V$ appartiene alla chiusura dell'involuppo convesso di questo insieme.

Lemma 3.2.23. *Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ quasidifferenziabile in $x_0 \in \Omega$. Con le notazioni precedenti si ha*

$$s(U + V) \in \overline{\text{co}\{\nabla p_U(g) + \nabla q_V(g) \mid g \in S_0\}}.$$

Dimostrazione. Anzitutto osserviamo che per la linearità di s si ha

$$\begin{aligned} s(U + V) &= s(U - (-V)) = \frac{1}{\omega_n} \int_{S^{n-1}} (p_U(y) - p_{-V}(y)) y d\sigma(y) = \\ &= \frac{1}{\omega_n} \int_{S^{n-1}} (p_U(y) + q_V(y)) y d\sigma(y). \end{aligned}$$

Supponiamo dapprima che p_U e q_V siano di classe C^1 su \mathbb{R}^n . Allora, detta $\nu(y)$ la normale esterna a S^{n-1} nel punto y , per il teorema di Gauss-Green si ha

$$\begin{aligned} s(U + V) &= \frac{1}{\omega_n} \int_{S^{n-1}} (p_U(y) + q_V(y)) \nu(y) d\sigma(y) \\ &= \frac{1}{\omega_n} \int_{B(0,1)} \nabla(p_U(y) + q_V(y)) dy. \end{aligned}$$

Quest'ultimo integrale è un integrale di Riemann, limite di somme finite del tipo

$$\sum_{h=1}^p \frac{1}{\omega_n} m(E_h) \nabla(p_U(y_h) + q_V(y_h)) \quad \text{con}$$

$$y_h \in E_h, \quad \cup_{h=1}^p E_h = B(0, 1), \quad E_h \cap E_k = \emptyset$$

le quali sono combinazioni convesse dei punti $\nabla(p_U(y_h) + q_V(y_h))$ e quindi appartengono a

$$\text{co}\{\nabla p_U(y) + \nabla q_V(y) \mid y \in B(0, 1)\}.$$

Perciò

$$s(U + V) \in \overline{\text{co}\{\nabla p_U(g) + \nabla q_V(g) \mid g \in B(0, 1)\}}.$$

Ora supponiamo che p_U e q_V siano solo quasi ovunque differenziabili in \mathbb{R}^n con ∇p_U e ∇q_V in $L^\infty(B(0, 1))$ (cosa che posso supporre perché le funzioni sono localmente lipschitziane e quindi lo sono anche i loro gradienti). Consideriamo per ogni $\varepsilon > 0$ la funzione

$$\varphi_\varepsilon(y) = \frac{1}{\varepsilon^n} \varphi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right), \quad y \in \mathbb{R}^n$$

dove $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ è non negativa con supporto in $B(0, 1)$ e tale che $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) dy = 1$.

La convoluzione di $(p_U + q_V)$ con φ_ε è di classe C^∞ , pertanto, posto

$$f_\varepsilon = (p_U + q_V) * \varphi_\varepsilon$$

si ha

$$\frac{1}{\omega_n} \int_{B(0,1)} \nabla f_\varepsilon(y) dy \in \overline{\text{co}\{\nabla f_\varepsilon(g) \mid g \in B(0, 1)\}}$$

Per il teorema di Gauss-Green si ha

$$\frac{1}{\omega_n} \int_{B(0,1)} \nabla f_\varepsilon(y) dy = \frac{1}{\omega_n} \int_{S^{n-1}} (f_\varepsilon(y)) y d\sigma(y)$$

dunque prendendo $\varepsilon \rightarrow 0$ otteniamo

$$\frac{1}{\omega_n} \int_{B(0,1)} \nabla f_\varepsilon(y) dy \rightarrow \frac{1}{\omega_n} \int_{S^{n-1}} (p_U(y) + q_V(y)) y d\sigma(y) = s(U + V)$$

D'altra parte, usando il fatto che ∇f_ε converge quasi ovunque a $\nabla(p_U + q_V)$ e la densità di $B_0 = B(0, 1) \cap (T_U \cap T_V)$ in $B(0, 1)$ si ha

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Delta \left(\overline{\text{co}\{\nabla f_\varepsilon(g) \mid g \in B(0, 1)\}}, \overline{\text{co}\{\nabla p_U(g) + \nabla q_V(g) \mid g \in B_0\}} \right) = 0$$

dove Δ è la metrica su \mathcal{K}^n introdotta nel lemma 3.2.13.

Ne segue

$$s(U + V) \in \overline{\text{co}\{\nabla p_U(g) + \nabla q_V(g) \mid g \in B_0\}},$$

ma per la positiva omogeneità di p_U e q_V questo insieme coincide con

$$\overline{\text{co}\{\nabla p_U(g) + \nabla q_V(g) \mid g \in S_0\}}.$$

□

Definizione 3.2.24. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto e sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione localmente lipschitziana su Ω e quasidifferenziabile in $x_0 \in \Omega$.

Scriviamo

$$f(x) = f(x_0) + h(x - x_0) + r(x), \quad x \in \Omega$$

con

$$\begin{aligned} h(z) &= f'(x_0, z) \\ r(x) &= f(x) - f(x_0) - h(x - x_0) = o(x - x_0). \end{aligned}$$

Si dice che f è d -regolare in x_0 se esiste un intorno U di x_0 tale che le funzioni f , h e r sono differenziabili in x per quasi ogni $x \in U$ e vale

$$\lim_{x' \rightarrow x_0} \nabla r(x') = 0. \quad (3.2.7)$$

Diciamo che f è cd -regolare in x_0 se esiste un intorno U di x_0 tale che le funzioni f , h e r sono di classe C^1 in x per quasi ogni $x \in U$ e vale (3.2.7).

Esempi 3.2.25. 1. La funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = |x|$ è cd -regolare in $x_0 = 0$.

Infatti f è di classe C^1 su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e

$$h(x) = f'(0, x) = |x| = f(x), \quad x \neq 0.$$

Dunque f , h e r sono quasi ovunque di classe C^1 .

Inoltre per ogni $x \neq 0$

$$r(x) = f(x) - f(0) - h(x) = 0$$

e quindi è soddisfatta la condizione (3.2.7).

2. La funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

non è d -regolare (e perciò nemmeno cd -regolare) in $x_0 = 0$. Infatti f è di classe C^1 su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, inoltre è derivabile in 0 e $f'(0) = 0$, dunque $h \equiv 0$. Pertanto le funzioni f , h e r sono quasi ovunque di classe C^1 , ma non è soddisfatta la condizione (3.2.7), infatti

$$\begin{aligned} r(x) &= f(x) - f(0) - h(x) = f(x) \\ r'(x) &= 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \not\rightarrow 0 \quad \text{per } x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Lemma 3.2.26. *Con le notazioni precedenti sia $S_0 = S^{n-1} \cap (T_U \cap T_V)$.*

(i) *Se f è d -regolare in x_0 allora*

$$\overline{\text{co}\{\nabla p_U(g) + \nabla q_V(g) \mid g \in S_0\}} \subset \partial_{Cl} f(x_0). \quad (3.2.8)$$

(ii) *Se f è cd -regolare in x_0 allora*

$$\overline{\text{co}\{\nabla p_U(g) + \nabla q_V(g) \mid g \in S_0\}} = \partial_{Cl} f(x_0). \quad (3.2.9)$$

Dimostrazione. (i) Sia $C(g) = \underline{\partial} p_U(g) + \overline{\partial} q_V(g)$ per ogni $g \in \mathbb{R}^n$ e sia $U(x_0)$ un intorno di x_0 dove f , h e r sono quasi ovunque differenziabili.

Definiamo $h_1(x) = f'(x_0, x - x_0)$.

Se

$$g(x) = \frac{x - x_0}{|x - x_0|} \in S_0$$

allora h_1 è differenziabile in $x \neq x_0$ e

$$\nabla h_1(x) = C(g(x)).$$

Ora, poiché f , h e r sono quasi ovunque differenziabili in $U(x_0)$, si ha

$$\nabla f(x) = \nabla h_1(x) + \nabla r(x) = C(g(x)) + \nabla r(x) \quad \text{per q.o. } x \in U(x_0).$$

Scelta una successione $\{\alpha_k\} \subset \mathbb{R}_+$ con $\alpha_k \rightarrow 0^+$ definiamo la successione $x_k = x_0 + \alpha_k g$ con $g \in S_0$. si ha

$$C(g(x_k)) = C(g).$$

pertanto per la condizione (3.2.7)

$$\nabla f(x_k) = C(g) + \nabla r(x_k) \rightarrow C(g) \quad (3.2.10)$$

e quindi per il corollario 2.1.16 $C(g) \subset \partial_{Cl} f(x_0)$.

Sia S_1 l'insieme dei $g \in S_0$ per cui esiste $\{x_k\}$ tale che $x_k = x_0 + \alpha_k g$, $\alpha_k \rightarrow 0^+$ e vale (3.2.10). Allora

$$\overline{\text{co}\{C(g) \mid g \in S_1\}} \subset \partial_{Cl} f(x_0).$$

D'altra parte $S_1 \subset S_0$ soddisfa $m(S_0 \setminus S_1) = 0$ pertanto

$$\overline{\text{co}\{C(g) \mid g \in S_0\}} = \overline{\text{co}\{C(g) \mid g \in S_1\}}$$

perciò ne segue

$$\overline{\text{co}\{\nabla p_U(g) + \nabla q_V(g) \mid g \in S_0\}} \subset \partial_{Cl} f(x_0).$$

(ii) Vediamo che se f è cd -regolare vale anche l'inclusione inversa.

Sia $T_1(f)$ l'insieme dei punti dove f è di classe C^1 e sia $v \in \partial_{Cl}f(x_0)$. Poiché f è quasi ovunque di classe C^1 in un intorno di x_0 , per il corollario 2.1.16 esiste una successione $\{x_k\} \subset T_1(f)$ tale che

$$x_k \rightarrow x_0, \quad \nabla f(x_k) \rightarrow v.$$

Sia $T(h)$ l'insieme dei punti dove h è differenziabile. Poiché h è quasi ovunque differenziabile in un intorno di x_0 e f è di classe C^1 in x_k , esiste una successione $\{\bar{x}_k\} \subset T_1(f) \cap T(h)$ tale che

$$\bar{x}_k \rightarrow x_0, \quad \nabla f(\bar{x}_k) \rightarrow v \quad \nabla r(\bar{x}_k) \rightarrow 0$$

D'altra parte poiché h è differenziabile in \bar{x}_k si ha $g(\bar{x}_k) = \frac{\bar{x}_k - x_0}{|\bar{x}_k - x_0|} \in S_0$ e

$$\nabla h_1(\bar{x}_k) = C(g(\bar{x}_k)) \in \overline{co\{\nabla p_U(g) + \nabla q_V(g) \mid g \in S_0\}} \quad \forall k.$$

Dunque

$$v = \lim_{k \rightarrow \infty} \nabla f(\bar{x}_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} C(g(\bar{x}_k)),$$

da cui segue immediatamente $v \in \overline{co\{\nabla p_U(g) + \nabla q_V(g) \mid g \in S_0\}}$.

□

Osservazione 3.2.27. Naturalmente questo lemma è ancora valido se all'ipotesi di cd -regolarità sostituiamo l'ipotesi che la derivata direzionale di f in x_0 sia semicontinua (superiormente o inferiormente) in x_0 per ogni $g \in \mathbb{R}^n$. Infatti se ad esempio $f'(x_0, g)$ è semicontinua superiormente in x_0 allora $\mathcal{D}f(x_0) = [\partial_{Cl}f(x_0), \{0\}]$. D'altra parte se p_U è la funzione supporto di U allora

$$U_0 \equiv \overline{co\{\nabla p_U(g) \mid g \in S_0\}} = U.$$

Infatti $\{\nabla p_U(g) \mid g \in S_0\} \subset U$ e U è convesso e compatto dunque $U_0 \subset U$.

D'altra parte, per la sublinearità di p_U si ha $U = \underline{\partial}p_U(0) = \partial_{Cl}p_U(0)$, quindi per il corollario 2.1.16

$$U = co\{l \mid \exists \{g_i\} \subset T_U, g_i \rightarrow 0, \nabla p_U(g_i) \rightarrow l\} \subset \overline{co\{\nabla p_U(g) \mid g \in T_U\}}$$

e poiché p è positivamente omogenea, quest'ultimo insieme coincide con U_0 . Dunque se $f'(x_0, g)$ è semicontinua superiormente in x_0 si ha

$$\overline{co\{\nabla p_U(g) + \nabla q_V(g) \mid g \in S_0\}} = \overline{co\{\nabla p_U(g) \mid g \in S_0\}} = U = \partial_{Cl}f(x_0).$$

Osservazione 3.2.28. In generale se f non è cd -regolare in x_0 non è verificata la (3.2.9). Infatti basta vedere la funzione nell'esempio 3.2.25(2.): la derivata direzionale è identicamente nulla in $x_0 = 0$ e quindi

$$\overline{\text{co}\{\nabla p_U(g) + \nabla q_V(g) \mid g \in S_0\}} = \{0\}$$

mentre il sottodifferenziale di Clarke è formato da tutti i punti limite di $\nabla f(x)$ per $x \rightarrow 0$, ossia

$$\partial_{Cl}f(0) = [-1, 1].$$

Pertanto, per l'osservazione precedente, se f non è cd -regolare in x_0 , in generale la sua derivata direzionale in x_0 non sarà semicontinua.

Teorema 3.2.29. *Sia $([0, 1]^n, v)$ un gioco quasidifferenziabile e localmente lipschitziano. Se v è d -regolare in τ^N allora la soluzione $st(v)$ è un elemento dell'insieme di soluzioni $S(v) = \partial_{Cl}v(\tau^N)$ del gioco.*

Dimostrazione. Segue dai lemmi 3.2.23 e 3.2.26. Infatti per 3.2.23 si ha

$$st(v) \in \overline{\text{co}\{\nabla p_U(g) + \nabla q_V(g) \mid g \in S_0\}},$$

dove $[U, V] = \mathcal{D}v(\tau^N)$.

D'altra parte se f è d -regolare, per il lemma 3.2.26

$$\overline{\text{co}\{\nabla p_U(g) + \nabla q_V(g) \mid g \in S_0\}} \subset \partial_{Cl}v(\tau^N) = S(v).$$

□

Concludendo, la soluzione st fornisce una soluzione puntuale per i giochi quasidifferenziabili e, se la funzione caratteristica è anche localmente lipschitziana e d -regolare, allora la soluzione st è anche una soluzione puntuale per i giochi localmente lipschitziani.

Bibliografia

- [1] P. Acquistapace. *Appunti di Analisi Convessa*.
www.dm.unipi.it/~acquistp
- [2] J.P. Aubin. *Locally Lipschitz cooperative games*. Journal of Mathematical Economics 8 (1981) 241-262.
- [3] J.P. Aubin. *Mathematical Methods of Game and Economic Theory*. North-Holland, Amsterdam, 1979.
- [4] J.P. Aubin. *Cooperative fuzzy games*. Mathematics of Operations Research 6 (1981) 1-13.
- [5] R.Brânzei et al. *Convex fuzzy games and participation monotonic allocation schemes*. Fuzzy sets and Systems, Vol. 139, Ed. 2a (2003) 267-281.
- [6] V.F. Demyanov e A.M. Rubinov. *Constructive Nonsmooth Analysis*. Lang, Frankfurt am Main, 1995.
- [7] H.G. Eggleston. *Convexity*. Cambridge University Press, Cambridge, 1958.
- [8] T.S. Ferguson. *Game Theory*.
<http://www.math.ucla.edu/~tom/gamescourse.html>
- [9] G.Ferrari, M.Margiocco. *Giochi cooperativi*.
http://www.diptem.unige.it/patrone/decisori_razionali_interagenti/altro_materiale/gfmmTUvf.pdf
- [10] S.L. Pechersky. *Positively homogeneous quasidifferentiable functions and their applications in cooperative game theory*. Mathematical Programming Study 29 (1985) 135-144.