CONTROLLI IN DIMENSIONE INFINITA

Consideriamo il problema lineare-quadratico:

Minimizzare il funzionale

$$J(u) = \int_0^T \left[\langle My(t), y(t)\rangle_Y + \langle Nu(t), u(t)\rangle_U \right] dt + \langle P_0 y(T), y(T)\rangle_Y$$

al variare di $u \in L^2(0,T;U)$, con y data da

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + Bu(t) & t \in]0,T] \\ y(0) = y_0 . \end{cases}$$

Le ipotesi sono le seguenti:

- Y, U sono spazi di Hilbert separabili (lo spazio degli stati e lo spazio dei controlli);
- $y_0 \in Y$, $B \in \mathcal{L}(U,Y)$, $M \in \mathcal{L}(Y)$ con $M = M^* \geq 0$, $N \in \mathcal{L}(U)$ con $N = N^* \geq \delta I$, ove $\delta > 0$; $A : D(A) \subseteq Y \to Y$ è un operatore lineare chiuso, generatore infinitesimale di un semigruppo fortemente continuo, che denoteremo con e^{tA}: si avrà di conseguenza,

$$\|e^{tA}\|_{\mathcal{L}(Y)} \leq He^{\omega t} \quad \forall t \geq 0,$$

con $H \geq 1$, $\omega \in \mathbb{R}$ opportuni.

Prima di affrontare questo problema, anche per chiarire l'ipotesi fatta su A, occorrono alcuni fatti preliminari.

Semigruppi di operatori

Sia X uno spazio di Banach e sia

$$\mathcal{L}(X) = \left\{ T : X \to X,\ T \text{ lineare},\ \|T\| = \sup_{\|x\|_X \le 1} \|Tx\|_X < \infty \right\}.$$

Cominciamo con l'osservare che se $A \in \mathcal{L}(X)$ il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = A\,y(t), & t \geq 0 \\ y(0) = y_0 \in X \end{cases}$$

ha l'unica soluzione

$$y(t) = e^{tA} y_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k y_0 ,$$

e si ha

$$\|y(t)\|_X \le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|t|^k}{k!} \|A\|^k \|y_0\|_X \le e^{|t|\|A\|} \|y_0\|_X .$$

La famiglia $\{e^{tA}\}_{t\in\mathbb{R}}$ è un gruppo di operatori lineari e continui, ossia $e^{tA} \in \mathcal{L}(X)$ e $e^{(t+s)A} = e^{tA} e^{sA}$ $\forall t,s \in \mathbb{R}$. Inoltre $t \mapsto e^{tA}$ è un'applicazione di classe C^1 da $[0,\infty[$ in $\mathcal{L}(X)$, con

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Ma non tutti i gruppi di operatori hanno queste proprietà.

<u>Esempio</u> (Traslazioni in $L^p(\mathbb{R})$). Per $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \le p \le \infty$, poniamo

$$[G(t)f](x) = f(x+t), \qquad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}$$

La famiglia $G = \{G(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ è un gruppo di operatori lineari e continui su $L^p(\mathbb{R})$: infatti per ogni $f \in L^p(\mathbb{R})$ vale

$$\|G(t)f\|_{L^p(\mathbb{R})} = \left[\int_{\mathbb{R}} |f(x+t)|^p dx\right]^{1/p} = \left[\int_{\mathbb{R}} |f(\xi)|^p d\xi\right]^{1/p} = \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}$$

e quindi

$$\|G(t)\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}))} = 1,$$

ed è immediato verificare che $G(t+s) = G(t)G(s)$ per ogni $s,t \in \mathbb{R}$.
Risulta inoltre

$$\lim_{t \to 0} \|G(t)f - f\|_{L^p(\mathbb{R})} = 0$$

in virtù della continuità delle traslazioni in $L^p(\mathbb{R})$, $1 \le p < \infty$, mentre se $p = \infty$ si ha

$$\|G(t) I_{[0,1]} - I_{[0,1]}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Dunque il gruppo G è fortemente continuo se $1 \le p < \infty$, non lo è se $p = \infty$ (grazie alla proprietà di gruppo, basta verificare queste proprietà per $t = 0$).

Si noti però che $t \mapsto G(t)$ non è continua da $\mathbb{R}$ a $\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}))$, perché fissato $n \in \mathbb{N}^+$ e scegliendo

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \left[\frac{2k-2}{2n}, \frac{2k-1}{2n}\right[\\ -1 & \text{se } x \in \left[\frac{2k-1}{2n}, \frac{2k}{2n}\right[\\ 0 & \text{se } x \notin [0,1[, \end{cases} \quad , k = 1, \dots, n$$

si ha

$$\|G(\tfrac{1}{n}) - I\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}))} \ge \frac{\|G(\frac{1}{n})f_n - f_n\|_{L^p}}{\|f_n\|_{L^p}} = \left[\frac{\int_{-t}^{1} |f_n(x+t) - f_n(x)|^p dx}{\int_0^1 |f_n(x)|^p dx}\right]^{\frac{1}{p}} \ge 1.$$

Osservazione. Se $X = L^p(0,\infty)$, possiamo considerare solo traslazioni a destra: dunque la famiglia $G = \{G(t)\}_{t\geq 0}$,

$$[G(t)f](x) = f(x+t) \qquad \forall x \geq 0, \forall t \geq 0, \forall f \in L^p(0,\infty)$$

è un semigruppo, e non un gruppo; si ha ancora

$$t \mapsto G(t)f \quad \text{continua da } [0,\infty[\text{ in } L^p(0,\infty) \quad \text{se } 1 \leq p < \infty,$$

mentre non vale tale proprietà per $p = \infty$.

Similmente, in $L^p(0,T)$ la famiglia $G = \{G(t)\}_{t\geq 0}$, ove

$$[G(t)f](x) = \begin{cases} f(x+t) & \text{se } 0 \leq x+t \leq T, \text{ ossia } x \in [0,T-t] \\ 0 & \text{se } x+t > T, \text{ ossia } x > T-t, \end{cases}$$

è un semigruppo fortemente continuo (ossia $\lim_{t\to 0} \|G(t)f - f\|_{L^p(0,\infty)} = 0$ per ogni $f \in L^p(0,\infty)$) quando $p \in [1,\infty[$, mentre non lo è per $p = \infty$.

<u>Definizione</u> Una famiglia di operatori $G = \{G(t)\}_{t\geq 0} \subseteq \mathcal{L}(X)$ è un semigruppo fortemente continuo (abbreviato: sgfc) se

(i) $G(t)G(s) = G(t+s) \quad \forall t,s \geq 0$

(ii) $\lim_{t\to 0^+} \|G(t)x - x\|_X = 0 \quad \forall x \in X$.

Sia G un sgfc in X. Per $h > 0$ è definito l'operatore

$$\frac{G(h) - I}{h} \in \mathcal{L}(X).$$

Nel caso particolare in cui $G(t) = e^{tA}$, con $A \in \mathcal{L}(X)$, si ha

$$\frac{e^{hA}-I}{h}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{h^{k-1}}{k!}A^k \longrightarrow A \text{ in } \mathcal{L}(X) \text{ per } h\to 0;$$

in particolare

$$\frac{e^{hA}-I}{h}x \to Ax \quad \text{in } X \text{ per } h\to 0, \quad \forall x\in X.$$

Questo non accade per il semigruppo delle traslazioni, in cui

$$\left[\frac{G(h)-I}{h}f\right](x)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}:$$

in generale per $f\in L^p(\mathbb{R})$ l'espressione sopra scritta per $h\to 0^+$ non converge, né in $L^p(\mathbb{R})$, né puntualmente.

<u>Definizione</u> Sia G un sgfc. Il <u>generatore infinitesimale</u> di G è un operatore $A: D(A)\subseteq X\to X$ lineare, in generale non limitato, dato da

$$\begin{cases} D(A)=\left\{x\in X: \ \exists \lim_{h\to 0^+}\frac{G(h)-I}{h}x\right\} \\ Ax=\lim_{h\to 0}\frac{G(h)-I}{h}x \quad \forall x\in D(A). \end{cases}$$

<u>Proposizione 1</u> $\overline{D(A)}=X$.

<u>dim.</u> Poniamo

$$R_{at}x=\frac{1}{t}\int_a^{a+t}G(s)x\,ds, \quad a\geq 0,\ t\geq 0,\ x\in X.$$

Questo è un <u>integrale di Bochner</u>, per il quale si rimanda al §3.1 del capitolo 3 degli appunti di Analisi convessa, sulla pagina web http://www.dm.unipi.it/~acquistp/anacon.pdf.

Per continuità, per $x\in X$ fissato si ha

$$\lim_{t\to 0^+} R_{at}\, x = G(a)x \quad \forall a \geq 0,\ \forall x \in X.$$

In particolare $R_{0t}x \to x$ per $t \to 0^+$; basta allora mostrare che $R_{0t}x \in D(A)$ per ogni $t > 0$. Infatti

$$\frac{G(h)-I}{h} R_{0t}\, x = \frac{1}{h}[G(h)-I]\, \frac{1}{t}\int_0^t G(s)x\, ds =$$

$$= \frac{1}{t}\left[\frac{1}{h}\int_0^t G(s+h)x\, ds - \frac{1}{h}\int_0^t G(s)x\, ds\right] =$$

$$= \frac{1}{t}\left[\frac{1}{h}\int_h^{t+h} G(\sigma)x\, d\sigma - \frac{1}{h}\int_0^t G(\sigma)x\, d\sigma\right] =$$

$$= \frac{1}{t}\left[\frac{1}{h}\int_t^{t+h} G(\sigma)x\, d\sigma - \frac{1}{h}\int_0^h G(\sigma)x\, d\sigma\right]$$

da cui, per $h \to 0^+$,

$$\frac{G(h)-I}{h} R_{0t}\, x \;=\; \frac{1}{t}(G(t)x - x).$$

Dunque $R_{0t}x \in D(A)$ (e $AR_{0t}x = \frac{G(t)-I}{t}x$). $\square$

<u>Osservazione</u> Se $G(t) = e^{tA}$ con $A \in \mathcal{L}(X)$, allora A è il generatore infinitesimale (abbreviato g.i.) di e^{tA}. Viceversa, se $\{G(t)\} \subseteq \mathcal{L}(X)$ è un gruppo, tale che $t \mapsto G(t)$ è continua da $\mathbb{R}$ in $\mathcal{L}(X)$, allora esiste un unico $A \in \mathcal{L}(X)$ tale che $G(t) = e^{tA}$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Infatti, posto
$$V(t) = \int_0^t G(s)\, ds \in \mathcal{L}(X), \quad t \in \mathbb{R},$$
si ha
$$\frac{1}{t}V(t) \longrightarrow I_X \quad \text{per } t \to 0,$$
quindi esiste $t_0 > 0$ tale che $\left[\frac{V(t)}{t}\right]^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ per $t \in [-t_0, t_0] \setminus \{0\}$.

Di conseguenza $V(t)^{-1} = \frac{1}{t}\left[\frac{V(t)}{t}\right]^{-1}$ esiste in $\mathcal{L}(X)$ per ogni $t \in [-t_0, t_0] \setminus \{0\}$, e pertanto possiamo scrivere

$$G(t) = V(t_0)^{-1} V(t_0) G(t) = V(t_0)^{-1} \int_0^{t_0} G(s+t)\, ds =$$
$$= V(t_0)^{-1} \int_t^{t+t_0} G(\sigma)\, d\sigma = V(t_0)^{-1} \left[V(t+t_0) - V(t) \right].$$

Dunque, essendo $V(t)$ derivabile in $\mathcal{L}(X)$, tale è $G(t)$, con

$$G'(t) = V(t_0)^{-1} \left[G(t+t_0) - G(t) \right] = V(t_0)^{-1} [G(t_0) - I]\, G(t).$$

Pertanto, scelto $t=0$,

$$\exists \lim_{h \to 0} \frac{G(h) - I}{h} = G'(0) = V(t_0)^{-1} [G(t_0) - I],$$

ossia, il g.i. di $G(t)$ è $A = V(t_0)^{-1} [G(t_0) - I] \in \mathcal{L}(X)$. Si noti che allora

$$\begin{cases} G'(t) = A G(t), & t \geq 0 \\ G(0) = I \end{cases}$$

e dunque, per unicità, $G(t) = e^{tA}$. □

<u>Proposizione 2</u> Sia G un sgfc in X, sia A il suo g.i. Se $x \in D(A)$, allora $G(t)x \in D(A)$ e

$$A G(t) x = G(t) A x.$$

<u>dim</u> Si ha per $x \in D(A)$

$$\frac{G(h) - I}{h} G(t) x = \frac{G(t+h) - G(t)}{h} x = G(t) \frac{G(h) - I}{h} x \longrightarrow G(t) A x \quad \text{per } h \to 0^+,$$

da cui la tesi. □

<u>Proposizione 3</u> Sia G un sgfc in X. Per ogni $T > 0$ esiste $B_T > 0$ tale che

$$\| G(t) \|_{\mathcal{L}(X)} \leq B_T \quad \forall t \in [0, T].$$

<u>dim</u> Se $x\in X$, sappiamo che $t\mapsto G(t)x$ è continua su $[0,T]$ a valori in X; dunque $t\mapsto\|G(t)x\|_X$ è continua su $[0,T]$ a valori in $\mathbb{R}$. Perciò

$$\|G(t)x\|_X \le B_{Tx} \quad \forall t\in[0,T],\ \forall x\in X$$

con B_{Tx} costante opportuna. Per il teorema di Banach-Steinhaus, esiste $B_T>0$ tale che

$$\|G(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \le B_T \quad \forall t\in[0,T]. \quad \square$$

<u>Proposizione 4</u> Sia G un sgfc in X, sia A il suo gi. Si ha

$$\frac{d}{dt}G(t)x = AG(t)x = G(t)Ax \quad \forall x\in D(A),\ \forall t\ge 0.$$

<u>dim</u> Sia $t_0\ge 0$. Per $h>0$ e $x\in D(A)$, per la Proposizione 2 si ha

$$\frac{G(t_0+h)-G(t_0)}{h}x = \frac{G(h)-I}{h}G(t_0)x \longrightarrow AG(t_0)x = G(t_0)Ax \quad \text{per } h\to 0.$$

Dunque

$$\exists\left[\frac{d^+}{dt^+}G(t)x\right]_{t=t_0} = AG(t_0)x = G(t_0)Ax.$$

Sia $t_0>0$. Per $h\in\,]0,t_0]$ e $x\in D(A)$, si ha

$$\frac{G(t_0-h)-G(t_0)}{-h}x - G(t_0)Ax =$$

$$= G(t_0-h)\left[\frac{G(h)-I}{h}x - Ax\right] + \left[G(t_0-h)-G(t_0)\right]Ax;$$

per la Proposizione 3 e la forte continuità di G si ottiene per $h\to 0^+$

$$\left\|\frac{G(t_0-h)-G(t_0)}{-h}x - G(t_0)Ax\right\|_X \le B_{t_0}\left\|\frac{G(h)-I}{h}x - Ax\right\|_X + \left\|\left[G(t_0-h)-G(t_0)\right]Ax\right\|_X \to 0,$$

ossia
$$\exists \left[\frac{d^-}{dt^-} G(t)x\right]_{t=t_0} = G(t_0)Ax = AG(t_0)x. \quad \square$$

<u>Proposizione 5</u> Sia G un sgfc in X e sia A il suo gi. Allora A è un operatore chiuso

<u>dim</u> Fissati $x, y \in X$, sia $\{x_n\} \subseteq D(A)$ tale che $x_n \to x$ e $Ax_n \to y$ in X per $n \to \infty$. Per la Proposizione 4,
$$G(t)x_n - x_n = \int_0^t \frac{d}{ds} G(s)x_n\, ds = \int_0^t G(s)Ax_n\, ds,$$
da cui
$$\frac{G(t)x_n - x_n}{t} = \frac{1}{t}\int_0^t G(s)Ax_n\, ds.$$
Per $n \to \infty$, grazie alla convergenza dominata del 2° membro,
$$\frac{G(t)x - x}{t} = \frac{1}{t}\int_0^t G(s)y\, ds,$$
e per $t \to 0^+$, otteniamo $x \in D(A)$ e $Ax = y$. $\square$

<u>Esempi</u> (1) Sia $X = L^p(\mathbb{R})$, $[G(t)f](x) = f(x+t)$. Se $1 \le p < \infty$, G è un gruppo fortemente continuo. Il suo generatore è
$$\begin{cases} D(A) = W^{1,p}(\mathbb{R}) \\ Af = f'. \end{cases}$$
Infatti se $f \in D(A)$, deve esistere $\lim_{t\to 0} \frac{f(\cdot+t) - f(\cdot)}{t} = g$ in $L^p(\mathbb{R})$. Allora se $u \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ si ha
$$\int_{\mathbb{R}} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} u(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} f(\xi) \frac{u(\xi - t) - u(\xi)}{t}\, d\xi;$$

ora, se $t \to 0$ il 1° membro tende a $\int_{\mathbb{R}} g(x)u(x)dx$, mentre il 2° membro tende a $-\int_{\mathbb{R}} f(x)u'(x)dx$. Ne segue

$$-\int_{\mathbb{R}} f(x)\,u'(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} g(x)u(x)\,dx \quad \forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}),$$

e ciò implica che esiste la derivata debole di f in $L^p(\mathbb{R})$, e che $f'=g$. Perciò $f \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ e $Af=f'$. Viceversa, se $f\in W^{1,p}(\mathbb{R})$ allora è chiaro che $\lim_{t\to 0} \frac{f(\cdot+t)-f(\cdot)}{t} = f'$ in $L^p(\mathbb{R})$ e quindi $f\in D(A)$ e $Af=f'$.

(2) Se $X=L^p(0,\infty)$ e $[G(t)f](x)=f(x+t)$, $t\geq 0$, vale lo stesso risultato: il g.i. di G è

$$\begin{cases} D(A)=W^{1,p}(0,\infty) \\ Af=f' \quad \forall f\in W^{1,p}(0,\infty) \end{cases}$$

(3) Se $X=L^p(0,T)$, e $[G(t)f](x)=\begin{cases} f(x+t) & \text{se } x\in[0,T-t] \\ 0 & \text{se } x\in\,]T-t,T] \end{cases}$, il g.i. di G è

$$\begin{cases} D(A)=\{f\in W^{1,p}(0,T) : f(0)=0\} \\ Af=f' \quad \forall f\in D(A). \end{cases}$$

Se $f\in D(A)$, posto $g=\lim_{t\to 0^+}\frac{G(t)f-f}{t}$, si ha per ogni $u\in C^\infty[0,T]$:

$$\int_0^T \frac{[G(t)f](x)-f(x)}{t}\,u(x)\,dx = \int_0^{T-t}\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\,u(x)\,dx - \frac{1}{t}\int_{T-t}^T f(x)u(x)\,dx =$$

$$= \int_t^T \frac{f(\xi)\,u(\xi-t)}{t}\,d\xi - \frac{1}{t}\int_0^T f(\xi)u(\xi)\,d\xi =$$

$$= \int_t^T f(\xi)\,\frac{u(\xi-t)-u(\xi)}{t}\,d\xi - \frac{1}{t}\int_0^t f(\xi)u(\xi)\,d\xi\,;$$

dunque, per $t \to 0^+$ si ottiene

$$\int_0^T g(x)u(x)\,dx = -\int_0^T f(x)u'(x)\,dx - f(0)u(0) \quad \forall u \in C^\infty[0,T].$$

Se scegliamo $u \in C_0^\infty(0,T]$, deduciamo subito che esiste la derivata debole di f in $L^p(0,T)$ e che $f' = g$; se a questo punto scegliamo $u \in C^\infty[0,T]$ arbitrario, ricaviamo

$$f(0)u(0) = 0,$$

e dunque, per l'arbitrarietà di $u(0)$, si deduce $f(0) = 0$. Il viceversa è facile.

Stime asintotiche

Sia $G = \{G(t)\}_{t \geq 0}$ un sgfc. in X. Poniamo

$$\omega_0 = \inf_{t>0} \frac{\ln \|G(t)\|_{\mathcal{L}(X)}}{t}$$ (ω_0 è detto il tipo, o la soglia di crescita, di G)

Proposizione 6 Si ha

$$\omega_0 = \lim_{t\to\infty} \frac{\ln \|G(t)\|_{\mathcal{L}(X)}}{t}.$$

dim Per definizione di ω_0 basta provare che

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\ln \|G(t)\|_{\mathcal{L}(X)}}{t} \leq \omega_0.$$

Sia $\varepsilon > 0$ e sia $t_\varepsilon > 0$ tale che

$$\frac{\ln \|G(t_\varepsilon)\|_{\mathcal{L}(X)}}{t_\varepsilon} < \omega_0 + \varepsilon.$$

Poniamo, per $t>0$, (120)

$$t = n t_\varepsilon + r$$

ove $n = n_t = \left[\frac{t}{t_\varepsilon}\right]$ e $r = r_t = t - n t_\varepsilon \in [0, t_\varepsilon[$. Per la Proposizione 3

$$\frac{\ln \|G(t)\|_{\mathcal{L}(X)}}{t} = \frac{\ln \|G(t_\varepsilon)^n G(r)\|_{\mathcal{L}(X)}}{n t_\varepsilon + r} \le$$

$$\le \frac{n \ln \|G(t_\varepsilon)\|_{\mathcal{L}(X)} + \ln \|G(r)\|_{\mathcal{L}(X)}}{n t_\varepsilon + r} = \frac{\ln \|G(t_\varepsilon)\|_{\mathcal{L}(X)} + \frac{1}{n} \ln B_{t_\varepsilon}}{t_\varepsilon + \frac{r}{n}}$$

e per $t \to \infty$

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\ln \|G(t)\|_{\mathcal{L}(X)}}{t} \le \frac{\ln \|G(t_\varepsilon)\|_{\mathcal{L}(X)}}{t_\varepsilon} \le \omega_0 + \varepsilon,$$

da cui la tesi. □

Esempio Per i sg di traslazione si ha:

- per $X = L^p(\mathbb{R})$ o $X = L^p(0,\infty)$, $\|G(t)\|_{\mathcal{L}(X)} = 1 \ \forall t \ge 0$ e dunque $\omega_0 = 0$;
- per $X = L^p(0,T)$ si ha $\|G(t)\|_{\mathcal{L}(X)} = 0 \ \forall t \ge T$, e dunque $\omega_0 = -\infty$
- per $X = \mathbb{C}^2$, $G(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ossia $G(t)\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z + tw \\ w \end{pmatrix}$, si verifica che G è un sg, ovviamente continuo in $\mathcal{L}(X)$, e che il suo g.i. è $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Si ha

$$\|G(t)\|^2_{\mathcal{L}(X)} = \sup_{(z,w)\in\mathbb{C}^2} \frac{|z+tw|^2 + |w|^2}{|z|^2+|w|^2} \le \sup_{(z,w)\in\mathbb{C}^2} \frac{|z|^2 + |w|^2(1+t^2) + 2t \operatorname{Re} z\bar{w}}{|z|^2+|w|^2} \le$$

$$\le 1 + t^2 + t,$$

e d'altra parte

$$\|G(t)\|^2_{\mathcal{L}(X)} \geq \frac{\left\|G(t)\binom{i}{i}\right\|^2_X}{2} = \frac{(1+t)^2+1}{2} = 1+\frac{t^2}{2}+t .$$

Ciò mostra che

$$\lim_{t\to\infty} \|G(t)\|_{\mathcal{L}(X)} = +\infty, \quad \lim_{t\to\infty} \frac{\ln \|G(t)\|_{\mathcal{L}(X)}}{t} = 0,$$

e dunque $\omega_0 = 0$ benché $\|G(t)\|_{\mathcal{L}(X)}$ non sia limitata superiormente. In particolare, ω_0 è un inf che non è un minimo.

- Se $X = L^1(\mathbb{R})$, e poniamo

$$[G(t)f](x) = \begin{cases} 2\, f(x+t) & \text{se } x\in[-t,0] \\ f(x+t) & \text{se } x\notin[-t,0] \end{cases},$$

si verifica (faticosamente) che G è un sgfc. Inoltre, ovviamente,

$$\|G(t)\|_{\mathcal{L}(X)} = 2 \quad \forall t\geq 0,$$

visto che $\|G(t) I_{[0,t]}\|_X = 2$. Dunque $\omega_0 = 0$.

<u>Proposizione 7</u> Sia G un sgfc. in X e sia ω_0 il tipo di G. Allora per ogni $\varepsilon>0$ esiste $H_\varepsilon \geq 1$ tale che

$$\|G(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq H_\varepsilon\, e^{t(\omega_0+\varepsilon)} \quad \forall t\geq 0.$$

<u>dim</u>. Sia $\varepsilon>0$. Per la Proposizione 6, esiste $t_\varepsilon>0$ tale che

$$\frac{\ln \|G(t)\|_{\mathcal{L}(X)}}{t} < \omega_0+\varepsilon \quad \forall t\geq t_\varepsilon .$$

Quindi

$$\|G(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq e^{t(\omega_0+\varepsilon)} \qquad \forall t \geq t_\varepsilon.$$

D'altronde, per la Proposizione 3,

$$\|G(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq B_{t_\varepsilon} \qquad \forall t \in [0, t_\varepsilon].$$

Scelta allora $H_\varepsilon \geq 1$, tale che

$$H_\varepsilon e^{t(\omega_0+\varepsilon)} \geq B_{t_\varepsilon} \quad \forall t \in [0, t_\varepsilon],$$

otteniamo

$$\|G(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq H_\varepsilon e^{t(\omega_0+\varepsilon)} \quad \forall t \geq 0. \;\square$$

Dunque, tutti i sgfc hanno crescita al più esponenziale.
Poniamo allora, per $H \geq 1$ e $w \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{G}(H, w) = \{G : G \text{ è sgfc in } X,\ \|G(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq He^{wt}\ \forall t \geq 0\}.$$

La seguente proposizione mette in relazione la crescita esponenziale di G con lo spettro del suo generatore.

<u>Proposizione 8</u> Sia $G \in \mathcal{G}(H, w)$ e sia A il gi di G. Si ha

(i) $\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > w\}$

(ii) $R(\lambda, A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} G(t)x\, dt \quad \forall x \in X, \ \forall \lambda \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re}\lambda > w$.

Ricordiamo che $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ e che $\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)\}$.

<u>dim</u>. Sia $z\in X$, sia $\mathrm{Re}\,\lambda > \omega$. L'equazione
$$\lambda x - Ax = z$$
ha l'unica soluzione
$$x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} G(t) z \, dt :$$
infatti
$$\frac{G(h)-I}{h} x = \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}[G(t+h)-G(t)] z\, dt =$$
$$= \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda(t+h)} G(t+h) z\, dt - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t} G(t) z\, dt =$$
$$= \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_h^\infty e^{-\lambda s} G(s) z\, ds - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda s} G(s) z\, ds =$$
$$= \frac{e^{\lambda h}-1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda s} G(s) z\, ds - \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^h e^{-\lambda s} G(s) z\, ds$$
e pertanto, per $h\to 0^+$, $x\in D(A)$ e
$$Ax = \lambda\int_0^\infty e^{-\lambda s} G(s) z\, ds - z = \lambda x - z.$$
Se poi $x'\in D(A)$ è un altro elemento tale che $\lambda x' - Ax' = z$, allora integrando per parti si trova
$$x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} G(t) z\, dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} G(t)[\lambda x' - Ax']\, dt = \lambda\int_0^\infty e^{-\lambda t} G(t) x'\, dt - \int_0^\infty e^{-\lambda t}\frac{d}{dt}G(t) x'\, dt =$$
$$= \lambda\int_0^\infty e^{-\lambda t} G(t) x'\, dt - \left[e^{-\lambda t} G(t) x'\right]_0^\infty - \lambda\int_0^\infty e^{-\lambda t} G(t) x'\, dt = x',$$
e ciò prova che $\lambda\in\rho(A)$ e che $R(\lambda,A)z = \int_0^\infty e^{-\lambda t} G(t) z\, dt$. $\square$