Università di Pisa

Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Corso di Laurea in Matematica

Anno Accademico 2008/2009

L'EQUILIBRIO DI WALRAS

Candidato
Alessia Depetris

Relatore
Prof. Paolo Acquistapace

Capitolo 1

Introduzione

La teoria dell'equilibrio economico generale è una branca della microeconomia, che ha per obiettivo spiegare la determinazione congiunta delle scelte di produzione e di consumo, e dei prezzi, nell'intera economia.
L'idea alla base della teoria dell'equilibrio economico generale è che in un sistema di mercato, i prezzi e le scelte di produzione e di consumo dei diversi beni (ivi compresi "beni" quali il denaro, o "prezzi" quali il tasso d'interesse) siano interrelati. Un cambiamento nel prezzo di un bene, ad esempio il pane, potrebbe influenzare un altro prezzo, ad esempio il salario dei panettieri. A seconda delle preferenze dei panettieri, la domanda di pane sarà allora influenzata dalla variazione nel salario dei panettieri, andando a incidere nuovamente sul prezzo del pane, e così via. Dunque, la determinazione del prezzo di un singolo bene risulta potenzialmente collegata a quella del prezzo di qualunque altro bene nell'intera economia.
La teoria dell'equilibrio generale spiega come un'economia decentralizzata, composta da numerosi agenti indipendenti che agiscono secondo il loro interesse, sia compatibile con un equilibrio su tutti i mercati. Questo equilibrio è ottenuto senza che ci sia un organismo che si occupa della logistica economica. Si cita sovente il caso di una grande città dove nessuno è incaricato della distribuzione del pane e del latte. Ciononostante, c'è abbastanza pane e latte per tutti gli abitanti. Adam Smith parla di una mano invisibile che conduce gli agenti verso un equilibrio che ha molte proprietà interessanti. L'esistenza dell'equilibrio generale è stata studiata per la prima volta da Léon Walras.
Walras aveva osservato che la domanda dipende solo dai prezzi relativi. Se un contadino si reca al mercato per vendere delle mele e comperare del pane e i prezzi raddoppiano, la sua domanda e la sua offerta non cambiano. Infatti, la spesa raddoppia ma pure il ricavo. La domanda e l'offerta possono essere allora espressi in termini di prezzi relativi. In parole povere, ciò che viene oggi chiamata la legge di Walras, afferma l'esistenza di un equilibrio tra la

domanda e l'offerta.
Lo scopo di questa tesi è quello di mostrare l'esistenza di tale equilibrio. Per raggiungere tale obiettivo utilizzeremo principalmente nozioni di analisi convessa e di teoria dei giochi.

Iniziamo quindi col considerare il caso di un gioco con un singolo giocatore, osservando che un giocatore può rappresentare una squadra di giocatori. In tal caso, la regola generale per scegliere una strategia è risolvere un problema di ottimizzazione definito dai seguenti elementi:

1. un insieme U, che rappresenta un insieme di **strategie** (o decisioni) **libere**;

2. un sottoinsieme X di U, che rappresenta un insieme di **strategie** (o decisioni) **ammissibili**;

3. una funzione $f : X \to \mathbf{R}$, che associa ad ogni strategia (o decisione) x una **spesa** $f(x)$ (o costo). Chiamiamo $-f(x)$ un **ricavo** (o profitto).

Allora, il problema di ottimizzazione equivale a selezionare una strategia $\bar{x} \in X$ che minimizzi la funzione di spesa $f(x)$ allorché x varia all'interno dell'insieme delle strategie X.
In altre parole, si deve trovare un $\bar{x}$ tale che

$$\begin{cases} (i) & \bar{x} \in X, \\ (ii) & f(\bar{x}) = \inf_{x \in X} f(x). \end{cases}$$

Chiameremo $\bar{x}$ una **strategia ottimale**.

Un problema di ottimizzazione può essere visto in un problema di distribuzione di prodotti disponibili tra parti concorrenti come una procedura di selezione per scegliere il prodotto che minimizza una data funzione di spesa f (nel caso in cui tali prodotti minimizzanti esistano).

In seguito descriveremo lo spazio dei prodotti U come uno spazio di dimensione finita $\mathbf{R}^l$. Se gli l beni sono etichettati con $i = 1, \cdots, l$, un vettore dei prodotti $x = \{x_1, \cdots, x_l\} \in \mathbf{R}^l$ rappresenta x_1 unità del primo prodotto, ..., x_l unità dell'l-esimo prodotto.
Gli elementi $e^i = \{0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0\}$ della base canonica di $\mathbf{R}^l$ sono dei "prodotti unitari", poiché e^i rappresenta un'unità dell'i-esimo bene. Possiamo scrivere il vettore dei prodotti $x = \sum_{i=1}^{l} x_i e^i$ come somma di x_1 unità del primo bene unitario, ... , di x_l unità dell'l-esimo bene unitario.

Allora il duale $\mathbf{R}^{l*}$ di $\mathbf{R}^l$ può essere visto come lo spazio dei prezzi p; un prezzo associa (linearmente) ad ogni prodotto $x \in \mathbf{R}^l$ il suo valore $\langle p, x \rangle = p(x)$. La base canonica duale di $\mathbf{R}^{l*}$ è composta da forme e_i^* definite da

$$e_i^*(e^k) = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq i \\ 1 & \text{se } k = i \end{cases}$$

Dunque $e_i^*(x) = x_i$ per ogni $x \in \mathbf{R}^l$. Ogni $p \in \mathbf{R}^{l*}$ può essere scritto nella forma

$$p = \sum_{i=1}^{l} p^i e_i^*, \quad p^i = \left\langle p, e^i \right\rangle .$$

In altre parole, la i-esima componente p^i denota il valore di un'unità dell'i-esimo bene, cioè ciò che normalmente viene chiamato **prezzo dell'i-esimo bene**, o prezzo unitario dell'i-esimo bene.
La coppia duale può essere scritta

$$\langle p, x \rangle = p(x) = \sum_{i=1}^{l} p^i x_i.$$

Capitolo 2

Nozioni preliminari

In questa tesi ci occuperemo di problemi di minimizzazione della forma seguente: $\alpha = \inf_{x \in X} f(x)$ nel quale X è considerato come l'insieme delle strategie e f come la funzione di spesa. Nei modelli economici, X spesso descrive un insieme di prodotti disponibili. Il problema di minimizzazione può essere visto come un metodo per selezionarne uno. Generalmente tali problemi di minimizzazione vengono dati in modo più esplicito.
Per motivi di semplicità, le funzioni di spesa che prenderemo in considerazione ammetteranno il valore $+\infty$. Se $f : U \mapsto]-\infty, +\infty]$ e $X = Dom f = \{x \in U : f(x) < +\infty\}$, la restrizione a X è una funzione ordinaria da X in $\mathbf{R}$. In altre parole, una funzione di spesa da U in $]-\infty, +\infty]$ implica la descrizione sia dell'insieme delle strategie X sia della funzione di spesa attuale f.

Raccogliamo in questo capitolo tutti i risultati che saranno utili nel seguito.

2.1 Spazi vettoriali topologici

Sia dato uno spazio vettoriale X su un corpo $\mathbf{K}$, che nel seguito sarà sempre $\mathbf{R}$. Fra le varie topologie che si possono scegliere su X, sono particolarmente importanti quelle compatibili con la struttura vettoriale di X.

Definizione 2.1.1 *Uno **spazio vettoriale topologico** (o **spazio topologico lineare**) è uno spazio vettoriale X su un corpo $\boldsymbol{K}$ munito di topologia tale che l'addizione e la moltiplicazione scalare siano entrambe simultaneamente continue su entrambe le variabili. Più precisamente, devono essere continue:*

- *la funzione addizione, da $X \times X$, munito della topologia prodotto, in*

X, data da $(x,y) \mapsto x+y$ per ogni x e y in X.

- *la funzione prodotto, da $\boldsymbol{K} \times X$ munito della topologia prodotto, in X, data da $(a,x) \mapsto ax$ per ogni a in $\boldsymbol{K}$ e per ogni x in X.*

*La topologia di uno spazio vettoriale topologico è chiamata **topologia vettoriale**.*

Allora una topologia per uno spazio vettoriale è la topologia vettoriale se e solo se addizione e moltiplicazione sono continue, e uno spazio vettoriale topologico è uno spazio vettoriale munito di topologia vettoriale.

Le nozioni di dualità sono le più importanti nell'ambito dello studio degli spazi topologici vettoriali.

Definizione 2.1.2 *Dato uno spazio topologico vettoriale X, è naturale considerare il suo **spazio duale** X^*, ossia l'insieme i cui elementi sono tutti i funzionali lineari continui su X, ossia tutti gli operatori lineari e continui da X in $\boldsymbol{K}$.*

Si noti che la continuità di un operatore lineare su X dipende dalla topologia τ, quindi X^* dipende a sua volta da τ e dovremmo denotarlo con X^*_τ; tuttavia se τ si pensa fissata, la notazione X^* non si presta ad equivoci.
Di per sé, X^* è uno spazio vettoriale privo di una propria topologia naturale (salvo che nel caso in cui X sia uno spazio normato). I sottoinsiemi di X^* determinano altre topologie su X, diverse da τ. Tra di queste citiamo la topologia debole, di cui si parlerà in maniera più approfondita in seguito assieme alla topologia debole*, notevole per il fatto che rende X^* uno spazio vettoriale topologico localmente convesso.

Definizione 2.1.3 *Sia X uno spazio vettoriale su $\boldsymbol{R}$ o su $\boldsymbol{C}$. Un **sottoinsieme** $E \subseteq X$ si dice **convesso** se si ha*

$$\lambda x + (1-\lambda)x' \in E \qquad \forall \lambda \in [0,1]\,,\ \forall x, x' \in E.$$

Definizione 2.1.4 *Un **sottoinsieme** E di uno spazio vettoriale X si dice **bilanciato**, o **cerchiato**, se risulta $\alpha E \subseteq E$ per $|\alpha| \leqslant 1$.*

Definizione 2.1.5 *Un **cono** è un sottoinsieme C di uno spazio vettoriale X chiuso rispetto alla moltiplicazione per scalari positivi, cioè*

$$v \in C,\ \lambda > 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda v \in C.$$

Perché questa definizione abbia senso è necessario che il campo degli scalari sia ordinato.

Definizione 2.1.6 *Un* ***cono*** *C si dice* ***convesso*** *se $\lambda v + \mu w \in C$ per ogni v, $w \in C$ e per ogni λ, $\mu > 0$.*

Definizione 2.1.7 *Sia X uno spazio vettoriale. Una* ***funzione*** *$f : X \to \overline{\boldsymbol{R}} = [-\infty, +\infty]$ si dice* ***convessa*** *se risulta*

$$f((1-t)x + ty) \leqslant (1-t)f(x) + tf(y) \quad \forall t \in [0,1],$$

per ogni coppia x, $y \in X$ per i quali il secondo membro sia ben definito (ossia non risulti $f(x) = -f(y) = \pm\infty$). Se, limitatamente agli x, y per i quali ha senso, la disuguaglianza è stretta per ogni $t \in]0,1[$ e $x \neq y$, la ***funzione*** *si dice* ***strettamente convessa****.*
La ***funzione*** *si dice* ***concava****, o* ***strettamente concava****, se $-f$ è convessa o strettamente convessa.*

Osservazione 2.1.8 *Se $f : X \to \overline{\boldsymbol{R}}$ è convessa, allora gli* ***insiemi di sottolivello***

$$S(f, \lambda) = \{x \in X : f(x) \leqslant \lambda\}, \qquad \lambda \in \boldsymbol{R},$$

sono convessi. Il viceversa è falso, come mostra l'esempio della funzione x^3 in $\boldsymbol{R}$.

Definizione 2.1.9 *Se $f : X \to \overline{\boldsymbol{R}}$ è una* ***funzione*** *i cui insiemi di sottolivello sono convessi, essa si dice* ***quasi convessa****; f si dirà* ***quasi concava*** *se $-f$ è quasi convessa.*

2.2 Funzioni indicatrici e di supporto

Certe proprietà dei sottoinsiemi di uno spazio vettoriale topologico U sono descritte da opportune funzioni da U in $]-\infty, +\infty]$.

Definizione 2.2.1 *Sia X un sottoinsieme di U spazio vettoriale topologico. Diremo che la funzione $\psi_X = \psi(X; \cdot\,)$ da U in $[0, +\infty]$ definita da*

$$\psi(X; x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in X \\ +\infty & \text{se } x \notin X \end{cases}$$

è la ***funzione indicatrice*** *del sottoinsieme X.*

La seguente proposizione è ovvia.

Proposizione 2.2.2 *La funzione indicatrice di X è convessa (risp. inferiormente semicontinua) se e solo se X è convesso (risp. chiuso).*
Essa inoltre soddisfa

$$\psi(X;x) + \psi(Y;x) = \psi(X \cap Y;x).$$

Definizione 2.2.3 *Siano U uno spazio vettoriale topologico e U^* il suo duale. Sia inoltre X un sottoinsieme non vuoto di U. Associamo ad ogni $p \in U^*$*

$$\sigma^\sharp_X(p) = \sigma^\sharp(X;p) = \sup_{x\in X} \langle p, x\rangle \in \,]-\infty, +\infty]$$

e

$$\sigma^\flat_X(p) = \sigma^\flat(X;p) = \inf_{x\in X} \langle p, x\rangle \in [-\infty, +\infty[\,.$$

*Diremo che le funzioni $p \mapsto \sigma^\sharp(X;p)$ e $p \mapsto \sigma^\flat(X;p)$ sono rispettivamente le **funzioni di supporto superiore ed inferiore** di X.*

La funzione di supporto $\sigma^\sharp_X$ è chiaramente inferiormente semicontinua, convessa e positivamente omogenea, poiché è estremo superiore di funzioni continue lineari. È non negativa se $0 \in X$.
Inoltre $\sigma^\sharp_X$ è legata alla funzione indicatrice di X dalla relazione

$$\sigma^\sharp(X;p) = \sup_{x\in U} \left[\langle p, x\rangle - \psi(X;x)\right].$$

Proposizione 2.2.4 *Le funzioni supporto superiore e inferiore sono legate dalla relazione*

$$\sigma^\sharp(X;p) = -\sigma^\flat(X;-p)$$

La funzione di supporto superiore soddisfa le seguenti proprietà. Se λ e μ sono positivi, allora

1. $\sigma^\sharp(\lambda X + \mu Y;p) = \lambda\sigma^\sharp(X;p) + \mu\sigma^\sharp(Y;p)$

2. $\sigma^\sharp(X - Y;p) = \sigma^\sharp(X;p) - \sigma^\flat(Y;p)$

3. *Se $X \subset Y$, allora*
$$\sigma^\sharp(X;p) \leqslant \sigma^\sharp(Y;p).$$

4. *Se $\{X_i\}_{i\in I}$ è una famiglia di sottoinsiemi di U spazio vettoriale topologico, allora*
$$\sigma^\sharp\Big(\bigcup_{i\in I} X_i;p\Big) = \sup_{i\in I} \sigma^\sharp(X_i;p). \tag{2.2.1}$$

Dim. Poiché le prime proprietà sono ovvie, dimostriamo solo l'ultima. Poiché $X_i \subset X = \bigcup_{i \in I} X_i$, $\sigma^\sharp(X_i; p) \leqslant \sigma^\sharp(X; p)$ ed allora,

$$\sup_{i \in I} \sigma^\sharp(X_i; p) \leqslant \sigma^\sharp(X; p)$$

Inoltre, sia $x \in X = \bigcup_{i \in I} X_i$. Allora $x \in X_i$ per qualche $i \in I$. Allora $\langle p, x \rangle \leqslant \sigma^\sharp(X_i; p) \leqslant \sup_{i \in I} \sigma^\sharp(X_i; p)$. Quindi $\sigma^\sharp(X; p) = \sup_{x \in X} \langle p, x \rangle \leqslant \sup_{i \in I} \sigma^\sharp(X_i; p)$. □

Definizione 2.2.5 *Chiamiamo i sottoinsiemi chiusi e convessi dello spazio vettoriale topologico U*

$$\begin{cases} (i) & X^\sharp = \{p \in U^* : \sigma^\sharp(X; p) \leqslant 1\} \\ (ii) & X^\flat = \{p \in U^* : \sigma^\flat(X; p) \geqslant -1\} \end{cases}$$

rispettivamente ***sottoinsieme polare superiore e inferiore*** *di X; mentre*

$$P(X^\sharp) = \{p \in U^* : \sigma^\sharp(X; p) < +\infty\} = Dom\, \sigma_X^\sharp$$

è il ***cono barriera*** *di X.*

Definizione 2.2.6 *Chiamiamo i sottoinsiemi chiusi e convessi del duale U^* dello spazio vettoriale topologico U*

$$\begin{cases} (i) & F_\sharp = \{x \in U : \sigma^\sharp(F; x) \leqslant 1\} \\ (ii) & F_\flat = \{x \in U : \sigma^\flat(F; x) \geqslant -1\} \end{cases}$$

rispettivamente ***sottoinsieme polare superiore e inferiore di*** *F ; mentre*

$$P(F_\sharp) = \{x \in U : \sigma^\sharp(F; x) < +\infty\} = Dom\, \sigma_F^\sharp$$

è il ***cono barriera di*** *F .*

Definizione 2.2.7 *Sia X un sottoinsieme di U spazio vettoriale topologico. Chiamiamo $X^0 = X^\sharp \cap X^\flat$* ***sottoinsieme polare di*** *X.*
Sia F un sottoinsieme di U^* duale dello spazio vettoriale topologico U. Chiamiamo $F_0 = F_\sharp \cap F_\flat$ ***sottoinsieme polare di*** *F.*

Definizione 2.2.8 *Sia X un sottoinsieme di U spazio vettoriale topologico. Diciamo che*

$$\begin{cases} (i) & X^+ = \{p \in U^* : \langle p, x \rangle \geqslant 0 \ \forall x \in X\}, \\ (ii) & X^- = \{p \in U^* : \langle p, x \rangle \leqslant 0 \ \forall x \in X\} \end{cases}$$

sono i ***coni polari positivi e negativi di*** *X e il sottoinsieme chiuso*

$$X^\perp = \{p \in U^* : \langle p, x \rangle = 0 \ \forall x \in X\}$$

è il ***complemento ortogonale di*** *X.*

Definizione 2.2.9 *Sia F un sottoinsieme di U^* duale dello spazio vettoriale topologico U. Diciamo che*

$$\begin{cases} (i) & F_+ = \{x \in U : \langle x, p \rangle \geqslant 0 \ \forall p \in F\}, \\ (ii) & F_- = \{x \in U : \langle x, p \rangle \leqslant 0 \ \forall p \in F\} \end{cases}$$

sono i ***coni polari positivi e negativi di*** *X e il sottoinsieme chiuso*

$$F_\perp = \{x \in U : \langle x, p \rangle = 0 \ \forall p \in F\}$$

è il ***complemento ortogonale di*** *F.*

Sono banali i seguenti risultati:

$$\begin{cases} (i) & X^\perp \subset X^- \subset X^\sharp \\ (ii) & X^\flat = -X^\sharp, \quad X^- = -X^+, \quad X^\perp = X^- \cap X^+. \end{cases} \tag{2.2.2}$$

È altrettanto chiaro che, se $X \subset Y$, allora

$$Y^\sharp \subset X^\sharp, \qquad Y^+ \subset X^+, \qquad Y^\perp \subset X^\perp.$$

Proposizione 2.2.10 *Supponiamo che sia X sia Y contengano 0. Allora*

$$(X + Y)^+ = X^+ \cap Y^+.$$

Dim. Sia $p \in X^+ \cap Y^+$ e $x + y \in X + Y$, dove $x \in X$ e $y \in Y$. Allora $\langle p, x + y \rangle = \langle p, x \rangle + \langle p, y \rangle \geqslant 0$ cioè $p \in (X + Y)^+$.
Viceversa, se $p \in (X + Y)^+$, allora $\langle p, x + y \rangle \geqslant 0$ per ogni $x \in X$ e $y \in Y$. Prendendo $y = 0$, deduciamo che $p \in X^+$, e prendendo $x = 0$, che $p \in Y^+$. Allora $p \in X^+ \cap Y^+$. □

Osservazione 2.2.11 *Se X è un cono, chiaramente $X^- = X^\sharp$ e se X è uno spazio vettoriale topologico, allora $X^\perp = X^- = X^\sharp$.*

Proposizione 2.2.12 *Supponiamo che X sia un cono convesso nello spazio vettoriale topologico U. Allora*

$$\sigma^\sharp(X; p) = \psi(X^-; p) = \begin{cases} 0 & \textit{se } p \in X^- \\ +\infty & \textit{se } p \notin X^- \end{cases}$$

Dim. Per iniziare, osserviamo che $\sigma^\sharp(X, p) = \sup_{x \in X} \langle p, x \rangle \geqslant 0$ poiché 0 appartiene a X. Se $p \in X^-$, allora $\langle p, x \rangle \leqslant 0$ per ogni $x \in X$ e quindi $\sigma^\sharp(X, p) \leqslant 0$. Di conseguenza, $\sigma^\sharp(X, p) = 0$ se $p \in X^-$.
Se $p \notin X^-$, allora esiste $x \in X$ tale che $\langle p, x \rangle = \vartheta > 0$. Poiché X è un cono, $\lambda x \in X$ per ogni $\lambda > 0$. Quindi

$$\sigma^\sharp(X, p) \geqslant \sup_{\lambda > 0} \langle p, \lambda x \rangle = \sup_{\lambda > 0} \lambda \vartheta = +\infty.$$

□

2.3 Altre topologie su uno spazio vettoriale topologico

2.3.1 La topologia debole

In uno spazio vettoriale topologico (X, τ) è possibile definire, accanto alla sua topologia naturale, un'altra topologia meno fine: la topologia debole. È però necessaria una definizione preliminare:

Definizione 2.3.1 *Una **seminorma** nello spazio vettoriale X è una funzione $p : X \to [0, \infty[$ tale che*

$$\begin{cases} (i) \quad p(\lambda x) = |\lambda| p(x) \text{ per ogni } \lambda \in \boldsymbol{R} \text{ e per ogni } x \in X; \\ (ii) \quad p(x + x') \leqslant p(x) + p(x') \text{ per ogni } x, x' \in X. \end{cases}$$

Definizione 2.3.2 *Sia X uno spazio vettoriale topologico. Si chiama **topologia debole** su X la topologia generata dalla famiglia di seminorme $\{p_\varphi\}_{\varphi \in X^*}$ così definite:*

$$p_\varphi(x) = |\varphi x| \qquad x \in X.$$

La topologia debole si denota con i simboli w ("weak") oppure $\sigma(X, X^*)$.

Dunque un sistema fondamentale di w-intorni di 0 è dato dagli insiemi della forma

$$V_{\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \varepsilon} = \{x \in X : |\varphi_i x| \leqslant \varepsilon, \ i = 1, \ldots, n\},$$

al variare di $n \in \mathbf{N}^+$, $\varepsilon > 0$ e $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in X^*$. La topologia debole dipende dalla topologia originaria τ di cui è dotato X attraverso la scelta dei funzionali X^*: cambiando τ cambia lo spazio X^* dei funzionali lineari τ-continui. Dalla definizione segue che la topologia debole w è la topologia meno fine su X che rende continui tutti i funzionali $\varphi \in X^*$; poiché tutti gli elementi di X^* sono continui per la topologia naturale di X, la topologia debole è meno fine di quest'ultima. Tuttavia, se X ha dimensione finita, le due topologie coincidono. In particolare, ogni insieme debolmente chiuso (cioé chiuso rispetto a w) è chiuso, mentre il viceversa non è vero in generale.
Ad esempio, nello spazio di Banach l^2 l'insieme $\sum = \{x \in l^2 : \|x\|_2 = 1\}$ è chiuso ma non debolmente chiuso: infatti, ricordando che la successione $\{e^{(n)}\}_{n \in \mathbf{N}}$ è contenuta in $\sum$ e converge debolmente a 0 in l^2, si deduce che 0 appartiene alla chiusura debole di $\sum$ perché ogni suo w-intorno della forma $V_{\varphi_1, \ldots, \varphi_p, \varepsilon}$ contiene necessariamente qualcuno degli $e^{(n)}$.

Se X è uno spazio normato, da un corollario del teorema di Hahn-Banach, segue che, per ogni $x \in X \setminus \{0\}$ esiste $\varphi \in X^*$ tale che $\varphi(x) \neq 0$; quindi la topologia debole rende X uno spazio vettoriale topologico localmente convesso e di Hausdorff. In generale, 0 non ha un sistema fondamentale di intorni numerabile e lo spazio (X, w) non è metrizzabile.

Definizione 2.3.3 *Sia X uno spazio vettoriale topologico, sia X^* il suo duale. Si chiama **topologia debole*** su X^* la topologia generata dalla famiglia di seminorme $\{p_x\}_{x\in X}$ così definite:*

$$p_x(\varphi) = |\varphi x| \qquad \forall \varphi \in X^*.$$

La topologia debole si denota con i simboli w^* oppure $\sigma(X^*, X)$.*

Un sistema fondamentale di w^*-intorni di 0 è fatto dagli insiemi della forma

$$V_{x_1,\dots,x_n,\varepsilon} = \{\varphi \in X^* : |\varphi x_i| \leqslant \varepsilon, i = 1, \dots, n\}.$$

Dato che, ovviamente, per ogni $\varphi \in X^* \setminus \{0\}$ esiste $x \in X$ tale che $\varphi x \neq 0$, le seminorme p_x separano i punti di X^* e dunque (X^*, w^*) è uno spazio vettoriale topologico localmente convesso e di Hausdorff. Se in particolare X è uno spazio di Banach, (X^*, w^*) è anche completo.

Quando X è uno spazio di Banach, ricordando com'è definita l'immersione canonica $J : X \to X^{**}$, possiamo scrivere le seminorme che generano la topologia $\sigma(X^*, X)$ nel modo seguente:

$$p_x(\varphi) = |\varphi x| = |J_x\varphi| \qquad \forall \varphi \in X^*.$$

Quindi, la topologia debole* $\sigma(X^*, X)$ è la topologia meno fine su X^* che rende continui tutti i funzionali $J_x \in J(X)$, mentre, per definizione, tutti gli elementi di X^{**} sono continui su X^* per la topologia $\sigma(X^*, X^{**})$ (la topologia debole relativa alla topologia indotta dalla norma di X^*). Ne segue che su X^* la topologia debole* $\sigma(X^*, X)$ è meno fine della topologia debole $\sigma(X^*, X^{**})$, che a sua volta è meno fine di quella indotta dalla norma di X^*. Le due topologie deboli su X^* coincidono se e solo se $J(X) = X^{**}$, ossia se e solo se X è riflessivo.

2.3.2 La topologia di Mackey

Definizione 2.3.4 *Sia U uno spazio vettoriale topologico. La **topologia di Mackey** su U (o topologia relativamente forte o massimale), denominata in tal modo per George Mackey, è la topologia che ha per base di intorni di 0 i polari F_0 di tutti i sottoinsiemi $F \subseteq U^*$ w^*-compatti, convessi e cerchiati.*

Riguardo alle principali proprietà di tale topologia, il lettore interessato potrà trovarne in *Charalambos D. Aliprantis,Kim C. Border, Infinite dimensional analysis: a hitchhiker's guide* [2] e in *Kelley-Namioka, Linear Topological Spaces* [4].

2.4 Inviluppo convesso

Definizione 2.4.1 *Sia E un sottoinsieme dello spazio vettoriale X.*
*L'**inviluppo convesso** di E è l'insieme*

$$co(E) = \{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \ : \ n \in \boldsymbol{N}^+, \ x_k \in E, \ \lambda_k \geqslant 0, \ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1\}.$$

Dunque $co(E)$ è l'intersezione di tutti gli insiemi convessi contenenti E, quindi è il più piccolo insieme convesso contenente E.

Osservazione 2.4.2 *Poiché p è una forma lineare,*

$$\sup_{x \in X} \langle p, x \rangle = \sup_{x \in co(X)} \langle p, x \rangle ,$$

dove $co(X)$ indica l'inviluppo convesso di X. Poiché p è continua,
$\sup_{x \in X} \langle p, x \rangle = \sup_{x \in \bar{X}} \langle p, x \rangle$, *dove $\bar{X}$ indica la chiusura di X.*
Quindi,

$$\sigma^\sharp(X; p) = \sigma^\sharp(\overline{co}(X); p)$$

*dove $\overline{co}(X)$ indica l' **inviluppo chiuso convesso di** X.*

Il teorema di separazione di Hahn-Banach permette di caratterizzare i sottoinsiemi chiusi convessi tramite le loro funzioni di supporto.

Teorema 2.4.3 *Sia X un sottoinsieme di U spazio localmente convesso di Hausdorff. Allora*

$$\overline{co}(X) = \begin{cases} \{x \in U : \langle p, x \rangle \leqslant \sigma^\sharp(X; p) \ \forall p \in U^*\}, \\ \{x \in U : \langle p, x \rangle \geqslant \sigma^\flat(X; p) \ \forall p \in U^*\}. \end{cases}$$

Dim. Denotiamo con $M = \bigcap_{p \in U} K_p$ l'intersezione dei sottoinsiemi

$$K_p = \{x \in U : \langle p, x \rangle \leqslant \sigma^\sharp(X; p)\}.$$

Notiamo che i sottoinsiemi K_p sono chiusi e convessi. Allora, M è un sottoinsieme chiuso e convesso. Poiché, per definizione di supporto superiore, X è

contenuto in K_p per ogni p, ne deduciamo che $X \subset M$. Allora, $\overline{co}(X) \subset M$. Supponiamo che $\overline{co}(X) \neq M$, cioè che esista $x \in M$ che non appartenga a $\overline{co}(X)$.
Il teorema di separazione di Hahn-Banach afferma che esistono $p \in U^*$ diverso da zero e $\varepsilon > 0$ tali che

$$\forall y \in \overline{co}(X), \quad \langle p, y \rangle \leqslant \langle p, x \rangle - \varepsilon$$

Ciò implica che $\sigma^\sharp(X; p) \leqslant \langle p, x \rangle - \varepsilon \leqslant \sigma^\sharp(X; p) - \varepsilon$ che è assurdo. □

Teorema 2.4.4 (teorema bipolare) *Sia X un sottoinsieme di U spazio vettoriale topologico localmente convesso di Hausdorff. Il bipolare $(X^\sharp)_\sharp$ di X è l'inviluppo chiuso convesso di $X \cup \{0\}$. Il cono bipolare $(X^+)_+$ di X è il cono chiuso convesso generato da X. Il biortogonale $(X^\perp)_\perp$ di X è lo spazio vettoriale chiuso generato da X.*

Dim. Poiché $X^\perp \subset X^- \subset X^\sharp$ (vedi i risultati (2.2.2)), ne deduciamo che $(X^\sharp)_\sharp \subset (X^-)_\sharp = (X^-)_- \subset (X^\perp)_\sharp = (X^\perp)_\perp$. D'altra parte, $X \cup \{0\}$ è contenuto in $(X^\sharp)_\sharp$.

1. L'insieme $\overline{co}(X \cup \{0\})$ è contenuto nel sottoinsieme chiuso convesso $(X^\sharp)_\sharp$. Supponiamo che esista $x \in (X^\sharp)_\sharp$ che non appartenga a $\overline{co}(X \cup \{0\})$ ed otteniamo una contraddizione. Per il teorema di separazione di Hahn-Banach, esiste $p \in U^*$, $p \neq 0$ e $\varepsilon > 0$ tali che

$$\langle p, y \rangle \leqslant \langle p, x \rangle - 2\varepsilon \qquad \forall y \in \overline{co}(X \cup \{0\}).$$

Se si prende $y = 0$, si ottiene $\langle p, x \rangle \geqslant 2\varepsilon > \varepsilon$.
Poniamo $q = p/(\langle p, x \rangle - \varepsilon)$. Se ne deduce che

$$\langle q, y \rangle \leqslant \frac{\langle p, x \rangle - 2\varepsilon}{\langle p, x \rangle - \varepsilon} \leqslant 1 \qquad \forall y \in X.$$

Quindi, $\sup_{y \in X} \langle q, y \rangle \leqslant 1$, cioè $q \in X^\sharp$. Poiché $x \in X^\sharp$, $\langle q, x \rangle \leqslant 1$.
Ma $\langle q, x \rangle = \langle p, x \rangle / (\langle p, x \rangle - \varepsilon) > 1$ per definizione di q. Questa è la contraddizione richiesta.

2. Il cono chiuso convesso P generato da X è contenuto in $(X^-)_-$. Supponiamo che esista $x \in (X^-)_-$ che non appartenga a P ed otteniamo una contraddizione.
Per il teorema di Hahn-Banach, esiste $p \in U^*$, $p \neq 0$ e $\varepsilon > 0$ tali che

$$\langle p, y \rangle \leqslant \langle p, x \rangle - \varepsilon \qquad \forall y \in P.$$

Prendendo $y = 0$, se ne deduce che $0 < \varepsilon \leqslant \langle p, x \rangle$. D'altra parte, $\sup_{y \in P} \langle p, y \rangle = 0$ poiché tale estremo superiore è finito (vedi Proposizione 2.2.12). Allora $p \in X^-$ e $\langle p, x \rangle \leqslant 0$ poiché $x \in (X^-)_-$. È questa la contraddizione richiesta.

3. Si dimostra l'ultima affermazione del teorema come nel punto precedente con la differenza che P viene preso come il sottospazio chiuso generato da X e $(X^-)_-$ è sostituito da $(X^\perp)_\perp$.

□

2.5 Coni di recessione e barriera

Dato un sottoinsieme X di uno spazio vettoriale topologico U, tale che $0 \in X$, è utile considerare i seguenti sottoinsiemi di U:

Definizione 2.5.1

$$\begin{cases} (i) & P(X) = \bigcup_{\lambda \geqslant 0} \lambda X & \textit{\textbf{cono generato da X}}, \\ (ii) & P_\infty(X) = \bigcap_{\lambda \geqslant 0} \lambda X & \textit{\textbf{cono di recessione di X}}, \\ (iii) & P(X^\sharp) = \bigcup_{\lambda \geqslant 0} \lambda X^\sharp & \textit{\textbf{cono barriera di X}}. \end{cases}$$

Proposizione 2.5.2 *Supponiamo che X sia un sottoinsieme chiuso e convesso tale che $0 \in X$. Allora $P_\infty(X) = P(X^\sharp)_-$.*

Dim. Sia $x \in P_\infty(X)$ e $p \in P(X^\sharp)$. Poiché $\lambda x \in X$ per ogni $\lambda > 0$, se ne deduce che $\lambda \langle p, x \rangle \leqslant \sigma^\sharp(X, p) < +\infty$ per ogni $\lambda > 0$. Ciò implica che $\langle p, x \rangle \leqslant 0$.
Cerchiamo ora l'implicazione opposta. Sia $x \in P(X^\sharp)_-$. Dimostriamo che $\lambda x \in X$ per ogni $\lambda > 0$. Poiché $P(X^\sharp)$ è un cono, allora $\lambda x \in P(X^\sharp)_-$ per ogni $\lambda > 0$. Allora $\lambda x \in P(X^\sharp)_\sharp$ poiché $P(X^\sharp)_- \subset (X^\sharp)_- \subset (X^\sharp)_\sharp$.
Poiché $0 \in X$ e X è chiuso, $(X^\sharp)_\sharp = X$. Allora, $\lambda x \in X$ per ogni $\lambda > 0$. □

La relazione opposta di $P(X^\sharp) = P_\infty(X)^-$ è vera sotto ulteriori ipotesi. Per tale scopo, si usa il teorema bipolare:

Teorema 2.5.3 *Supponiamo che X sia un insieme chiuso e convesso contenente 0 e che la parte interna del suo cono di recessione sia non vuota (con la topologia di Mackey). Allora il suo cono barriera $P(X^\sharp)$ è chiuso e $P(X^\sharp) = P_\infty(X)^-$.*
Inoltre, $P(X^\sharp)$ è generato dai sottoinsiemi compatti della forma
$P_{\tilde{x}} = \{p \in P(X^\sharp) : \langle p, \tilde{x} \rangle = -1\}$, *dove $\tilde{x} \in Int P_\infty(X)$.*

Dim. Supponiamo che $\tilde{x}$ appartenga alla parte interna del cono di recessione $P_\infty(X)$. Esiste allora un intorno K_0 di 0 tale che $\tilde{x} + K_0 \subset P_\infty(X)$. Tale intorno è il polare di un sottoinsieme debolmente compatto convesso contenente 0.
Per cominciare, osserviamo che se $p \in P(X^\sharp)$ si ha $\sup_{K \in P_\infty(X)} \langle p, x \rangle \leqslant 0$ poiché $P_\infty(X) = P(X^\sharp)_-$ per il teorema precedente.
Proviamo che

$$\langle p, \tilde{x} \rangle < 0 \quad \text{se } p \in P(X^\sharp),\ p \neq 0.$$

Esiste altrimenti $p_0 \in P(X^\sharp)$, $p_0 \neq 0$ tale che $\langle p, \tilde{x} \rangle = 0$. Ciò implica che

$$\sup_{x \in \tilde{x} + K^\sharp} \langle p_0, x \rangle \leqslant \sup_{x \in P_\infty(X)} \langle p_0, x \rangle \leqslant 0.$$

Ma ciò è impossibile perché $\sup_{x \in K^\sharp} \langle p_0, x \rangle > 0$. Infatti, poiché in realtà abbiamo $p_0 \neq 0$, esiste allora y che appartiene a X tale che $\langle p_0, y \rangle \neq 0$. Se considero ora $\pm\varepsilon y \in K^\sharp$, con l'opportuno segno troverò $\langle p_0, \pm\varepsilon y \rangle > 0$ e quindi $\sup_{x \in K^\sharp} \langle p_0, x \rangle > 0$, da cui si ottiene $\sup_{x \in \tilde{x} + K^\sharp} \langle p_0, x \rangle > 0$.
Controlliamo in secondo luogo che $P = \{p \in P(X^\sharp) : \langle p, \tilde{x} \rangle = -1\}$, dove $\tilde{x} \in IntP_\infty(X)$, generi $P(X^\sharp)$. Se $p \in P(X^\sharp)$, $\langle p, \tilde{x} \rangle = -\lambda$, dove $\lambda > 0$, e allora $p = \lambda \bar{p}$ dove $\bar{p} = p / \langle p, \tilde{x} \rangle \in P$.
Dimostriamo ora che P è debolmente compatto. A tale scopo, osserviamo che l'inclusione $\tilde{x} + K^\sharp \subset P_\infty(X)$ implica che, se $p \in P$, allora

$$-1 + \sigma^\sharp(K^\sharp; p) = \sigma^\sharp(\tilde{x} + K^\sharp; p) \leqslant \sigma^\sharp(P_\infty(X); p) \leqslant 0$$

poiché $\langle p, \tilde{x} \rangle = -1$ e $p \in P_\infty(X) = P(X^\sharp)_-$.
Allora $\sigma^\sharp(K^\sharp; p) \leqslant 1$, cioè $p \in (K^\sharp)_\sharp = K$ per il teorema bipolare 2.4.4 poiché K è un sottoinsieme debolmente compatto convesso.
Dimostriamo infine che $P(X^\sharp)$ è chiuso. Sia $\{p_\mu\}$ una generica successione di elementi $p_\mu \in P(X^\sharp)$ convergente a p. Dimostriamo che p appartiene a $P(X^\sharp)$. Si può avere o $p = 0 \in P(X^\sharp)$ o $p \neq 0$. Supponiamo $p_\mu \neq 0$ per ogni μ. Allora $q_\mu = -p_\mu / \langle p_\mu, \tilde{x} \rangle$ appartiene al sottoinsieme compatto P. Quindi una sottosuccessione q_ν converge verso un elemento $q \in P$. D'altra parte, la sottosuccessione $\langle p_\nu, \tilde{x} \rangle$ converge verso $\langle p, \tilde{x} \rangle \leqslant 0$. Allora la sottosuccessione $p_\nu = -\langle p_\nu, \tilde{x} \rangle q_\nu$ converge verso $p = -\langle p, \tilde{x} \rangle q$ che appartiene a $P(X^\sharp)$. $\square$

2.6 Funzioni continue e funzioni proprie

Dati due spazi topologici X e Y, analizzeremo le proprietà di continuità di alcune importanti classi di funzioni. Per tale scopo avremo bisogno di alcune definizioni preliminari.

Sia $f : U \to \,]-\infty, +\infty]$ una funzione con dominio X.
Chiamiamo

$$\alpha = \inf_{x \in U} f(x) = \inf_{x \in X} f(x)$$

il **valore minimo di f** e

$$\mathcal{M}^\flat(f) = \{x \in U : f(x) = \alpha\}$$

l' **insieme minimale di f**, cioè il sottoinsieme delle soluzioni minimali del problema di minimizzazione.
Allo stesso modo, se $f : U \to [-\infty, +\infty[$, funzione con dominio X, chiamiamo

$$\beta = \sup_{x \in U} f(x) = \sup_{x \in X} f(x)$$

il **valore massimo di f** e

$$\mathcal{M}^\sharp(f) = \{x \in U : f(x) = \beta\}$$

l' **insieme massimale di f**, cioè il sottoinsieme delle soluzioni massimali del problema di massimizzazione.
È chiaro che l'insieme minimale di f è uguale a

$$\mathcal{M}^\flat(f) = \bigcap_{\lambda > \alpha} S(f, \lambda), \tag{2.6.1}$$

dove $S(f, \lambda) = \{x : f(x) \leqslant \lambda\}$ insieme di sottolivello di f. Quindi, ogni proprietà dei sottoinsiemi che si conservi per intersezione, soddisfatta dagli insiemi di sottolivello di f, è anche soddisfatta dal sottoinsieme minimale $\mathcal{M}^\flat(f)$.

Definizione 2.6.1 *Sia $f : U \to \,]-\infty, +\infty]$ (risp. $[-\infty, +\infty[$). Se U è uno spazio topologico, diremo che*

1. *f è **inferiormente semicontinua** (risp. **superiormente semicontinua**) se i suoi insiemi di sottolivello $S(f, \lambda)$ (risp. $S^\sharp(f, \lambda)$) sono chiusi.*

2. *f è **inferiormente semicompatta** (risp. **superiormente semicompatta**) se i suoi insiemi di sottolivello $S(f, \lambda)$ (risp. $S^\sharp(f, \lambda)$) sono relativamente compatti.*

Dall'equazione (2.6.1) e dalla definizione precedente, deduciamo il seguente teorema.

Teorema 2.6.2 (Weierstrass) *Sia U uno spazio topologico e sia f una funzione da U a $]-\infty, +\infty]$ con dominio $X \neq \emptyset$. Se f è inferiormente semicontinua e inferiormente semicompatta, allora l'insieme minimale $\mathcal{M}^b$ di f è non vuoto e compatto.*

Dim. Poiché f è sia inferiormente semicontinua che inferiormente semicompatta, gli insiemi $S(f, \lambda)$ sono sottoinsiemi compatti per $\lambda > \alpha$. Poiché $\bigcap_{i=1}^{n} S(f, \lambda_i) = S(f, \min_{i=1,\cdots,n} \lambda_i)$, ogni intersezione finita degli insiemi di sottolivello $S(f, \lambda)$ è non vuota. Quindi l'intersezione $\mathcal{M}^\flat(f) = \bigcap_{\alpha<\lambda} S(f, \lambda)$ è non vuota e compatta. $\square$

In virtù del teorema precedente, si possono studiare condizioni sufficienti affinché f sia inferiormente semicontinua o inferiormente semicompatta, tali condizioni saranno chiamate **condizioni di continuità** e **condizioni di compattezza**.

Osserviamo che le ipotesi di continuità e di compattezza sono dirette in direzioni opposte. Più è forte la topologia definita su U, più funzioni inferiormente continue e meno funzioni inferiormente semicompatte ci sono. Quando U è un sottoinsieme di uno spazio vettoriale di dimensione finita, non ci sono problemi poiché tutte le topologie vettoriali sono equivalenti. Altrimenti, il problema dell'esistenza di una soluzione ottimale si trasforma nel trovare una topologia sull'insieme delle strategie U abbastanza forte da assicurare l'inferiore semicontinuità della funzione di spesa f e abbastanza debole per assicurare l'inferiore semicompattezza di f.

Analizzeremo ora come le ipotesi di convessità possano implicare l'unicità della soluzione minimale.

Proposizione 2.6.3 *Se $f : U \to \boldsymbol{R}$ è quasi convessa, allora l'insieme minimale $\mathcal{M}^\flat(f)$ è convesso.*

Le funzioni convesse sono anche quasi convesse.

Proposizione 2.6.4 *Se f è una funzione strettamente convessa da un sottoinsieme convesso X a $\boldsymbol{R}$, allora esiste al più una soluzione minimale.*

Dim. Se x e y sono soluzioni minimali, allora $f(x) = f(y) = \alpha$. Poiché f è strettamente convessa, allora $f((1-t)x + ty) < (1-t)f(x) + tf(y) = (1-t)\alpha + t\alpha = \alpha$. Ma $\mathcal{M}^b(f)$ è convesso. Allora $(1-t)x + ty \in \mathcal{M}^b(f)$. Quindi, $f((1-t)x + ty) = \alpha$ ed abbiamo così ottenuto una contraddizione a meno che $x = y$. $\square$

2.6.1 Funzioni proprie

Proposizione 2.6.5 *Siano X e Y due spazi vettoriali topologici e sia L una funzione continua da X a Y. Le due affermazioni seguenti sono equivalenti:*

1. *L è chiusa e per ogni $y \in Y$, $L^{-1}(y)$ è compatto.*
2. *Per ogni successione x_μ di X tale che $L(x_\mu)$ converga a y, possiamo estrarre una sottosuccessione convergente.*

Dim. Dimostriamo inizialmente che (2) implica (1). Sia B un sottoinsieme chiuso di X. Sia $\{L(x_\mu)\}$ una generica successione di elementi di $L(B)$ convergente a y. Possiamo estrarne una sottosuccessione $x_{\mu_\nu} \in B$ convergente a x, che appartiene a B poiché B è chiuso. Allora $y = L(x) \in L(B)$ poiché L è continua. Quindi $L(B)$ è chiuso.
Sia ora x_μ una generica successione estratta dalla controimmagine $L^{-1}(y)$. Poiché $L(x_\mu)$ converge a y, possiamo estrarne una sottosuccessione x_{μ_ν} che converga ad un elemento x tale che $L(x) = y$ poiché L è continua. Quindi L^{-1} è compatto.
Dimostriamo ora l'implicazione opposta, supponiamo quindi che valga (1). Sia $y = \lim L(x_\mu)$. Allora $y \in \bigcap_\mu \overline{L(V_\mu)}$ dove $V_\mu = \{x_\nu\}_{\nu \geqslant \mu}$. Poiché L è chiusa e continua, $L(\overline{V}_\mu) = \overline{L(V_\mu)}$. Poiché $y \in \bigcap_\mu L(\overline{V}_\mu)$, i sottoinsiemi $L^{-1}(y) \cap \overline{V}_\mu$ sono dei compatti non vuoti, con intersezione finita. Quindi $L^{-1}(y) \cap \bigcap_\mu \overline{V}_\mu$ è non vuoto. Ogni elemento x appartenente a tale sottoinsieme soddisfa $L(x) = y$ ed è un punto di accumulazione della successione $\{x_\mu\}$. $\square$

Definizione 2.6.6 *Ogni funzione continua L da X in Y che soddisfi una delle due equivalenti affermazioni precedenti è detta **propria**.*

Proposizione 2.6.7 *Sia L una funzione propria da X a Y. Allora la controimmagine $L^{-1}(K)$ di ogni sottoinsieme compatto K di Y è compatto.*

Dim. Sia $\{x_\mu\}$ una generica successione di $L^{-1}(K)$. Possiamo estrarre una generica sottosuccessione convergente dalla successione $L(x_\mu)$ contenuta nel sottoinsieme compatto K. Poiché L è propria, possiamo estrarre una sottosuccessione da $\{x_\mu\}$ che converga ad un elemento x. Il limite appartiene a $L^{-1}(K)$, poiché $L^{-1}(K)$ è chiuso dal momento che L è continua. $\square$

Proposizione 2.6.8 *Se X è compatto, ogni funzione continua definita su X è propria. Se X è compatto, la proiezione da $X \times Y$ in Y è propria.*

Specializziamoci adesso al caso finito-dimensionale.

Proposizione 2.6.9 *Consideriamo n sottoinsiemi* $R^i \subset \boldsymbol{R}^l$ *chiusi ed inferiormente limitati. Allora la funzione* $x \in \prod_{1 \leqslant i \leqslant n} R^i \mapsto \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} x^i \in \boldsymbol{R}^l$ *è propria. In particolare,* $\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} R^i$ *è chiuso.*

Osservazione 2.6.10 *Denotiamo con* $\boldsymbol{R}^n_+$ *il cono dei vettori non negativi* $a = \{a_1, \cdots, a_n\}$ *(cioè tali che* $a_i \geqslant 0$ *per ogni i). Poniamo* $a \geqslant b$ *se* $a - b \in \boldsymbol{R}^n_+$ *(a non è più piccolo di b). Infine, se A è un sottoinsieme di* $\boldsymbol{R}^n$*, scriviamo* $A_+ = A + \boldsymbol{R}^n_+$.

Dim. Siano $\{x^i_m\}_{m \in N}$ n successioni di elementi $x^i_m \in R^i$ tali che $y_m = \sum_{i=1}^n x^i_m$ converge verso $y \in \mathbf{R}^l$. Poiché $R^i \subset \xi^i + \mathbf{R}^l_+$, si ottiene che, per ogni i,

$$\xi^i \leqslant x^i_m = y_m - \sum_{j \neq i} x^i_m \leqslant y_m - \sum_{j \neq i} \xi^j.$$

Poiché y_m converge, è limitato ed allora anche la successione $\{x^i_m\}$ è limitata. Possiamo estrarre delle sottosuccessioni x^i_m convergenti verso $x^i \in R^i$ (poiché R^i è chiuso). Quindi $y = \sum_{i=1}^n x^i$ e la funzione $\{x^i\}_{1 \leqslant i \leqslant n} \mapsto \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} x^i$ è propria. □

Proposizione 2.6.11 *Sia R un sottoinsieme chiuso di* $\boldsymbol{R}^l$ *limitato inferiormente, e sia Y un sottoinsieme di* $\boldsymbol{R}^l$ *che soddisfi*

$$\begin{cases} (i) & Y \textit{ è convesso e chiuso,} \\ (ii) & \exists \omega \in Y \textit{ tale che } (Y - \omega) \cap \boldsymbol{R}^l_+ = \{0\}. \end{cases}$$

Allora la funzione $\{x, y\} \in R \times Y \to x - y \in \boldsymbol{R}^l_+$ *è propria.*

Dim. Sia $u_k = x_k - y_k$ una successione convergente a u in $\mathbf{R}^l$, dove $x_k \in R$ e $y_k \in Y$. Iniziamo col dimostrare che una sottosuccessione di y_k converge verso y. Se così non fosse, esisterebbe una sottosuccessione y_k tale che $\|y_k\| \to \infty$. Sia $z_k = \dfrac{y_k}{\|y_k\|}$ nella sfera unitaria $S^1 \subset \mathbf{R}^l$. Poiché S^1 è compatto esiste una sottosuccessione z_k che converge verso un elemento $\bar{z} \in S^1$. Poiché u_k converge verso u, è limitato ed esiste $m \in \mathbf{R}^l$ tale che $u_k \leqslant m$. Inoltre, poiché R è limitato inferiormente, $R \subset \xi + \mathbf{R}^l_+$. Allora, $y_k = x_k - u_k \geqslant \xi - m$. Quindi, le disuguaglianze $z_k \leqslant (\xi - m)/\|y_k\|$ implicano che $\bar{z} \in \mathbf{R}^l_+$.
D'altra parte, poiché $\|y_k\| \geqslant 1$ per k abbastanza grande, e poiché $\omega \in Y$, si ha

$$(\frac{1}{\|y_k\|})y_k + (1 - \frac{1}{\|y_k\|})\omega \in Y$$

poiché Y è convesso. Facendo tendere k all'infinito, otteniamo che $\bar{z} + \omega \in Y$, perché Y è chiuso.

Abbiamo quindi dimostrato che $\bar{z} \in (Y - \omega) \cap \mathbf{R}^l_+$. Dalle ipotesi si deduce che $\bar{z} = 0$ e ciò è assurdo. Allora una sottosuccessione $\{y_k\}$ converge ad un elemento $y \in Y$, che è chiuso. Perciò la sottosuccessione $u_{k'} = x_{k'} - y_{k'}$ converge verso $x = u + y$ che è in X dato che X è chiuso. $\square$

Le ultime due proposizioni implicano il seguente risultato.

Proposizione 2.6.12 *Supponiamo che per ogni $i = 1, \cdots, n$, $R^i \subset \boldsymbol{R}^l$ sia chiuso e limitato inferiormente e che Y soddisfi le seguenti proprietà:*

$$\begin{cases} (i) & Y \text{ è convesso e chiuso,} \\ (ii) & \exists \omega \in Y \text{ tale che } (Y - \omega) \cap \boldsymbol{R}^l_+ = \{0\}. \end{cases}$$

Allora la funzione $\{x^1, \cdots, x^n, y\} \in \prod_{i=1}^n R^i \times Y \mapsto \sum_{i=1}^n x_i - y \in \boldsymbol{R}^l$ è propria. In particolare, il sottoinsieme $\sum_{i=1}^n R^i - Y$ è chiuso, il sottoinsieme $X = \{x \in \prod_{i=1}^n R^i : \sum_{i=1}^n x_i \in Y\}$ è compatto e le sue proiezioni $\tilde{R}^i = R^i \cap (Y - \sum_{j \neq i} R^j)$ sono compatte.

Teorema 2.6.13 (Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz) *Consideriamo $n+1$ sottoinsiemi chiusi F_i di un simplesso co $\{x^0, x^1, \cdots, x^n\}$ tali che ogni faccia co $\{x^{i_0}, x^{i_1}, \cdots, x^{i_n}\}$ sia contenuta nell'unione $F_{i_0} \cup F_{i_1} \cup \cdots F_{i_s}$. Allora l'intersezione $\bigcap_{i=0}^n F_i$ è non vuota.*

Per la dimostrazione si rimanda a *J.P. Aubin, Mathematical methods of games and economic theory* [3].

2.7 Multifunzioni

In questa sezione indaghiamo sulla stabilità nei problemi di minimizzazione con parametro. Sia U uno spazio vettoriale topologico reale, Y uno spazio topologico e sia f una funzione definita su $\bigcup_{y \in Y} (S(y) \times \{y\}) \subseteq U \times Y$, a valori reali.

Gli insiemi $S(y)$ sono gli insiemi delle strategie ammissibili relative al parametro y; ci interessa stabilire la regolarità della funzione $\alpha : Y \to \mathbf{R}$ definita da

$$\alpha(y) = \inf_{x \in S(y)} f(x, y) \tag{2.7.1}$$

e della multifunzione $\mathcal{M}^\flat : Y \to \mathcal{P}(X)$ definita da

$$\mathcal{M}^\flat(y) = \{x \in X : \alpha(y) = f(x, y)\}. \tag{2.7.2}$$

Definizione 2.7.1 *Siano X, Y insiemi. Una* ***multifunzione*** *è un'applicazione $S : X \to \mathcal{P}(Y)$. L'insieme $S(X)$, per un fissato $x \in X$ è il* ***valore*** *o* ***immagine*** *di x. Gli insiemi*

$$D(S) = \{x \in X : S(X) \neq \emptyset\}, \qquad R(S) = S(X) = \bigcup_{x \in X} S(x)$$

sono rispettivamente il ***dominio*** *e l'****immagine*** *di S. Il* ***grafico*** *è l'insieme*

$$G(S) = \{(x, y) \in X \times Y : y \in S(x)\}.$$

*Se A è un sottoinsieme di X, l'****immagine di*** *A* ***mediante*** *S è l'insieme $S(A) = \bigcup_{x \in A} S(x)$; se B è un sottoinsieme di Y, la* ***controimmagine di*** *B* ***mediante*** *S è l'insieme*

$$S^{-1}(B) = \{x \in X : S(X) \cap B \neq \emptyset\}.$$

Definizione 2.7.2 *Siano X, Y spazi topologici e sia $S : X \to \mathcal{P}(Y)$ una multifunzione. Diciamo che S è* ***semicontinua superiormente nel punto*** *$x_0 \in X$ se per ogni aperto $A \supseteq S(x_0)$ esiste un intorno U di x_0 in X tale che $S(U) \subseteq A$.*
Diciamo che S è ***semicontinua superiormente in*** *X se S è semicontinua superiormente in ogni punto di X.*

Si noti che se S è una funzione questa definizione si riduce alla usuale nozione di continuità.

Definizione 2.7.3 *Siano X, Y spazi topologici e sia $S : X \to \mathcal{P}(Y)$ una multifunzione. Diciamo che S è* ***semicontinua inferiormente nel punto*** *$x_0 \in X$ se per ogni $y_0 \in S(x_0)$ e per ogni intorno N di y_0 in Y esiste un intorno U di x_0 in X tale che $S(x) \cap N \neq \emptyset$ per ogni $x \in U$.*
Diciamo che S è ***semicontinua inferiormente in*** *X se S è semicontinua inferiormente in ogni punto di X.*

Anche questa definizione, allorché S è una funzione, si riduce a quella di continuità, in quanto la condizione $S(x) \cap N \neq \emptyset$ diventa $S(x) \in N$.

Definizione 2.7.4 *Siano X, Y spazi topologici e sia $S : X \to \mathcal{P}(Y)$ una multifunzione. Diciamo che S è* ***continua nel punto*** *$x_0 \in X$ se S è sia semicontinua superiormente che semicontinua inferiormente nel punto x_0.*
Diciamo che S è ***continua in*** *X se S è continua in ogni punto di X.*

Teorema 2.7.5 *Sia $f : R \times Y \to]-\infty, +\infty]$. Supponiamo i fatti seguenti:*

1. *la funzione f è inferiormente semicontinua su $R \times Y$;*

2. *$S : Y \to \mathcal{P}(R)$ è superiormente semicontinua in $y_0 \in Y$;*

3. *$S(y_0)$ è compatto e le immagini $S(y)$ sono non vuote quando $y \in Y$.*

Allora la funzione α definita in (2.7.1) è inferiormente semicontinua in y_0.

Dim. Dobbiamo dimostrare che, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un intorno $N(y_0)$ di y_0 tale che

$$\alpha(y_0) - \varepsilon \leqslant \alpha(y) \qquad \forall y \in N(y_0).$$

Poiché f è inferiormente semicontinua in ogni coppia (x, y_0), possiamo associare ad ogni x degli intorni (aperti) $N(x)$ di x e $N_x(y_0)$ di y_0 tali che

$$f(x, y_0) - \varepsilon \leqslant f(z, y) \quad \forall z \in N(x), \forall y \in N_x(y_0). \tag{2.7.3}$$

Poiché $S(y_0)$ è un sottoinsieme compatto non vuoto di U, possiamo trovare un ricoprimento finito di n intorni $N(x_i)$. Allora, $N(S(y_0)) = \bigcup_{i=1}^n N(x_i)$ è un intorno di $S(y_0)$. Poiché S è superiormente semicontinua in y_0, esiste un intorno $N_0(y_0)$ tale che

$$\forall y \in N_0(y_0), \qquad S(y) \subset \bigcup_{i=1}^{n} N(x_i). \tag{2.7.4}$$

Consideriamo l'intorno $N(y_0) = N_0(y_0) \cap \bigcap_{i=1}^n N_{x_i}(y_0)$ di y_0. Quando $y \in N_0(y_0)$ e $x \in S(y)$, x appartiene ad un intorno $N(x_i)$ (per (2.7.4)) ed allora, per (2.7.3), otteniamo

$$f(x_i, y_0) - \varepsilon \leqslant f(x, y)$$

poiché $x \in N(x_i)$ e $y \in N_{x_i}(y_0)$.
Allora

$$\alpha(y_0) - \varepsilon \leqslant \min_{1 \leqslant i \leqslant n} f(x_i, y_0) - \varepsilon \leqslant f(x, y)$$

quando $y \in N(y_0)$ e $x \in S(y)$. Possiamo quindi dedurre che $\alpha(y_0) - \varepsilon \leqslant \alpha(y)$ per ogni $y \in N(y_0)$. □

Proposizione 2.7.6 *Sia S una multifunzione, con immagine non vuota, da uno spazio topologico Y in uno spazio vettoriale topologico di Hausdorff U localmente convesso, munito di topologia debole. Se S è superiormente semicontinuo, allora è superiormente emicontinua, ossia per ogni $p \in U$, la funzione $y \mapsto \sigma^\sharp(S(y), p)$ è semicontinua superiormente (rispetto alla topologia debole).*

Dim. Sia $p \in U^*$ e $B = \varepsilon\{-p, p\}^\sharp$, che è un intorno di 0 in U per la topologia debole. Poiché S è superiormente semicontinua, esiste un intorno $N(y_0)$ di y_0 tale che $S(y) \subset S(y_0) + B$ per ogni $y \in N(y_0)$. Perciò

$$\sigma^\sharp(S(y), p) \leqslant \sigma^\sharp(S(y_0), p) + \sigma^\sharp(B, p) \leqslant \sigma^\sharp(S(y_0), p) + \varepsilon.$$

Ciò dimostra che $y \mapsto \sigma^\sharp(S(y), p)$ è superiormente semicontinua. $\square$

Teorema 2.7.7 *Sia $f : R \times Y \to]-\infty, +\infty]$. Supponiamo che:*

1. *la funzione f sia superiormente semicontinua su $R \times Y$;*

2. *la multifunzione $S : Y \to \mathcal{P}(R)$ sia inferiormente semicontinua in $y_0 \in Y$;*

3. *le immagini $S(y)$ siano non vuote quando $y \in Y$.*

Allora la funzione α definita in (2.7.1) è superiormente semicontinua in y_0.

Dim. Dobbiamo dimostrare che, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un intorno $N(y_0)$ di y_0 tale che

$$\alpha(y) \leqslant \alpha(y_0) + \varepsilon \qquad \forall y \in N(y_0).$$

Scegliamo un elemento $x_0 \in S(y_0)$ tale che

$$f(x_0, y_0) \leqslant f(y_0) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Poiché f è superiormente semicontinua, esistono degli intorni aperti $N_0(y_0)$ e $N(x_0)$ tali che

$$f(x, y) \leqslant f(x_0, y_0) + \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x \in N(x_0),\ \forall y \in N_0(y_0). \tag{2.7.5}$$

Poiché S è inferiormente semicontinua, possiamo associare all'intorno $N(x_0)$ un intorno $N_1(y_0)$ tale che $S(y) \cap N(x_0) \neq \emptyset$ per ogni $y \in N_1(y_0)$. Consideriamo l'intorno $N(y_0) = N_0(y_0) \cap N_1(y_0)$. Se $y \in N(y_0)$, esiste $x \in S(y)$ che appartiene a $N(x_0)$ e che soddisfa (2.7.5). Quindi

$$\begin{aligned} \alpha(y) &= \inf_{u \in S(y)} f(u, y) \leqslant f(x, y) \\ &\leqslant f(x_0, y_0) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \alpha(y_0) + \frac{2\varepsilon}{2} = \alpha(y_0) + \varepsilon. \end{aligned}$$

$\square$

2.7.1 Multifunzioni chiuse

Abbiamo finora visto sufficienti condizioni per la continuità della funzione α . Vogliamo ora provare che l'insieme minimale $\mathcal{M}^\flat(y)$, dato da (2.7.2), definisce una multifunzione superiormente semicontinua.

Teorema 2.7.8 *Sia $f : R \times Y \to]-\infty, +\infty]$. Supponiamo che:*

1. *la funzione f sia continua su $R \times Y$;*

2. *la multifunzione S sia continua su Y;*

3. *i sottoinsiemi $S(y)$ siano non vuoti e compatti.*

Allora la funzione α, definita in (2.7.1) è continua e la multifunzione $\mathcal{M}^\flat(y)$, definita da (2.7.2) è superiormente semicontinua.

Dim. La continuità segue direttamente dai teoremi 2.7.5 e 2.7.7.
Per dimostrare la semicontinuità superiore della multifunzione $\mathcal{M}^\flat$, scriviamo $\mathcal{M}^\flat = S(y) \cap T(y)$, dove $T(y) = \{x \in U : f(x, y) - \alpha(y) \leqslant 0\}$.
Poiché le funzioni f e α sono continue rispettivamente su $R \times Y$ ed Y, il sottoinsieme $G(T) = \{(y, x) \in Y \times R : x \in T(y)\}$ è un sottoinsieme chiuso di $Y \times R$ perché può essere scritto come $G(T) = \{(y, x) \in Y \times U : f(x, y) - \alpha(y) \leqslant 0\}$. $\square$

Quest'ultimo teorema è quindi una diretta conseguenza della definizione e della proposizione seguenti.

Definizione 2.7.9 *Una multifunzione S viene chiamata* ***chiusa*** *se il suo grafico $G(S)$ è un sottoinsieme chiuso di $Y \times R$.*

Proposizione 2.7.10 *Siano S e T due multifunzioni da uno spazio topologico Y ad uno spazio topologico R. Supponiamo che*

1. *la multifunzione S sia superiormente semicontinua in y_0*

2. *la multifunzione T sia chiusa*

3. *$S(y_0)$ sia compatto e i sottoinsiemi $S(y) \cap T(y)$ siano non vuoti per ogni $y \in Y$.*

Allora la multifunzione $S \cap T : y \to S(y) \cap T(y)$ è superiormente semicontinua in y_0.

Dim. Dobbiamo associare ad ogni intorno aperto $N[S(y_0) \cap T(y_0)]$ di $S(y_0) \cap T(y_0)$, un intorno $N(y_0)$ di y_0 tale che

$$S(y) \cap T(y) \subset N[S(y_0) \cap T(y_0)], \qquad \forall y \in N(y_0).$$

Se $N[S(y_0) \cap T(y_0)]$ contiene $S(y_0)$, allora la relazione precedente segue dalla semicontinuità superiore di S in y_0. Introduciamo altrimenti il sottoinsieme non vuoto

$$K = S(y_0) \cap N[S(y_0) \cap T(y_0)]$$

che è compatto poiché $S(y_0)$ lo è per ipotesi.
Dal momento che $K \cap T(y_0)$ è vuoto per definizione di K, allora, per ogni $x \in K$, le coppie (y_0, x) non appartengono a $G(T)$.
Quindi, poiché il grafico $G(T)$ di T è chiuso, possiamo associare ad ogni $x \in K$ degli intorni aperti $N_x(y_0)$ e $N(x)$ di y_0 e x rispettivamente, tali che $G(T) \cap (N_x(y_0) \times N(x)) = \emptyset$.
Si ottiene quindi che tali intorni soddisfano $N(x) \cap T(y) = \emptyset$ per ogni $y \in N_x(y_0)$.
Poiché K è compatto, esiste una successione finita $\{x_1, \cdots, x_n\}$ di elementi x_i di K tale che $K \subset N(K) = \bigcup_{i=1}^n N(x_i)$. Quindi, $T(y) \cap N(K) = \emptyset$ quando $y \in \bigcap_{i=1}^n N_{x_i}(y_0)$.
D'altra parte, $N(K) \cup N[S(y_0) \cap T(y_0)]$ è un sottoinsieme aperto contenente $S(y_0)$. Poiché S è superiormente semicontinua in y_0, esiste un intorno $N_0(y_0)$ tale che $S(y) \subset N(K) \cup N[S(y_0) \cap T(y_0)]$ quando $y \in N_0(y_0)$.
Se scriviamo $N(y_0)$ come $N(y_0) = N_0(y_0) \cap \bigcap_{i=1}^n N_{x_i}(y_0)$, allora, per ogni $y \in N(y_0)$,

$$\begin{cases} (i) & S(y) \subset N(K) \cup N[S(y_0) \cap T(y_0)] \\ (ii) & T(y) \cap N(K) = \emptyset \end{cases} \tag{2.7.6}$$

Abbiamo così concluso, in quanto (2.7.6) implica

$$S(y) \cap T(y) \subset N[S(y_0) \cap T(y_0)], \qquad y \in N(y_0).$$

come desiderato. □

Quest'ultima proposizione è spesso usata nel seguente caso particolare.

Proposizione 2.7.11 *Ogni multifunzione chiusa T da Y nelle parti di uno spazio compatto R è superiormente semicontinua.*

Dim. Prendiamo S come la multifunzione costante definita da $S(y) = R$ per ogni $y \in Y$. □

Capitolo 3

Introduzione alla teoria dei giochi

In questa sezione, descriviamo i concetti e le definizioni fondamentali della teoria dei giochi con due giocatori.

3.0.2 Descrizione del gioco

Siano Xavier e Yvette i nomi dei due giocatori. Descriviamo il gioco con due giocatori in **forma strategica** o **forma normale** nei seguenti termini:

$$\begin{cases} (i) & \text{l'insieme delle strategie di Xavier } X, \\ (ii) & \text{l'insieme delle strategie di Yvette } Y, \\ (iii) & \text{la funzione di perdita di Xavier } f : X \times Y \to \mathbf{R}, \\ (iv) & \text{la funzione di perdita di Yvette } g : X \times Y \to \mathbf{R}, \end{cases}$$

Associamo ad ogni coppia $\{x, y\} \in X \times Y$ di strategie, la perdita $f(x, y)$ di Xavier e la perdita $g(x, y)$ di Yvette. Denotiamo con
$F(x, y) = \{f(x, y), g(x, y)\} \in \mathbf{R}^2$ la **doppia perdita** associata alla coppia delle strategie $\{x, y\}$ e chiamiamo la funzione $F : \{x, y\} \in X \times Y \mapsto F(x, y) \in \mathbf{R}^2$ l' **operatore della doppia perdita**.
Può succedere che non tutte le coppie di strategie siano realizzabili, ma solo quelle che appartengono al sottoinsieme $U \subset X \times Y$ delle strategie possibili.
La descrizione del gioco in forma strategica può essere riassunta nella forma (U, F) dove $U \subset X \times Y$ e $F : U \to \mathbf{R}^2$.

3.0.3 Il minimo ombra

Scriviamo
$$\alpha_X = \inf_{\{x,y\}\in U} f(x,y); \quad \alpha_Y = \inf_{\{x,y\}\in U} g(x,y).$$

Definizione 3.0.12 *Diremo che il gioco è* ***limitato inferiormente*** *se sia α_X che α_Y sono finiti. In tal caso diremo che la doppia perdita $\alpha = \{\alpha_X, \alpha_Y\}$ è il* ***minimo ombra*** *del gioco.*

Nel caso in cui esista $\{\bar{x}, \bar{y}\} \in U$ tale che
$$\alpha_X = f(\bar{x}, \bar{y}); \quad \alpha_Y = g(\bar{x}, \bar{y})$$
la coppia $\{\bar{x}, \bar{y}\}$ produce la perdita minima sia a Xavier che a Yvette, cioè $F(\bar{x}, \bar{y}) = \alpha$ è il minimo (relativo ad un ordinamento appropriato su $\mathbf{R}^2$) di $F(x,y)$ con $\{x,y\}$ che varia su U. Una tale coppia $\{\bar{x}, \bar{y}\}$ può ragionevolmente essere considerata una soluzione, ma esiste solo in situazioni eccezionali.

Definizione 3.0.13 *Questo è il motivo per cui chiamiamo il vettore α* ***minimo ombra*** *o* ***minimo virtuale****.*

Si ha che $F(U) \subset \alpha + \mathbf{R}^2_+$.
Poiché in molti casi il minimo ombra non appartiene a $F(U)$, siamo portati ad introdurre altri concetti di soluzione.

3.0.4 Soluzioni conservative e valori del gioco

Consideriamo il caso in cui $U = X \times Y$.
Introduciamo le funzioni $f^\sharp$ e $g^\sharp$ definite da
$$\begin{cases} (i) & f^\sharp(x) = \sup_{y\in Y} f(x,y), \\ (ii) & g^\sharp(x) = \sup_{x\in X} g(x,y). \end{cases}$$

Poiché $f(x,y)$ è la perdita di Xavier quando Xavier sceglie x e Yvette y, $f^\sharp(x)$ è la **perdita peggiore** possibile per Xavier quando sceglie la strategia $x \in X$.
Una politica coerente per Xavier quando non ha informazioni sulla strategia scelta da Yvette, è quella di associare ad ogni strategia $x \in X$ la conseguente perdita peggiore $f^\sharp(x)$. Allo stesso modo, quando Yvette non ha informazioni sulla scelta di Xavier, può associare ad ogni strategia $y \in Y$ la conseguente perdita peggiore $g^\sharp(y)$.
Allora, sotto queste ipotesi di comportamento, Xavier sceglierà una strategia $x^\sharp$ che minimizzerà $f^\sharp$ su X e Yvette una strategia $y^\sharp$ che minimizzerà $g^\sharp$ su Y.

Definizione 3.0.14 *Diremo che una strategia $x^\sharp$ che soddisfa*

$$f^\sharp(x^\sharp) = v_X^\sharp = \inf_{x\in X} f^\sharp(x)$$

(rispettivamente $y^\sharp$ tale che $g^\sharp(y^\sharp) = v_Y^\sharp = \inf_{y\in Y} g^\sharp(y)$)
*è una **soluzione conservativa** per Xavier (rispettivamente Yvette).*
*Il vettore $v^\sharp = \{v_X^\sharp, v_Y^\sharp\}$ è chiamato **valore conservativo** del gioco.*

I valori conservativi sono usati come esempi di "monito", nel senso seguente. Xavier rifiuterà ogni strategia x che porta ad una perdita $f(x,y)$ maggiore di $v_X^\sharp = \inf_{x\in X} f^\sharp(x)$, poiché $v_X^\sharp$ è la perdita che può essere ottenuta da un'azione unilaterale, qualsiasi cosa l'altro giocatore decida di fare.
La maggior parte delle volte tali moniti non sono fattibili.

Sia f la funzione di perdita di Xavier, che manda $X\times Y$ in $\mathbf{R}$. Supponiamo che

$$\begin{cases} (i) & \forall y\in Y, x\mapsto f(x,y) \text{ è inferiormente semicontinua,}\\ (ii) & \exists y_0\in Y \text{ tale che } x\mapsto f(x,y_0) \text{ è inferiormente semicompatta.}\end{cases}$$

Vedremo allora che esiste una soluzione conservativa $\bar{x}\in X$, cioè

$$\sup_{y\in Y} f(\bar{x},y) = \inf_{x\in X}\sup_{y\in Y} f(x,y) = v^\sharp$$

e inoltre che

$$v^\sharp \text{ è uguale a } \hat{v} = \sup_{K\in S}\inf_{x\in X}\max_{y\in K} f(x,y),$$

dove S indica l'insieme dei sottoinsiemi finiti di Y. Useremo questo risultato per dimostrare che, sotto l'ulteriore ipotesi

$$\forall x\in X, \qquad y\mapsto f(x,y) \text{ è concava,} \tag{3.0.1}$$

si ha che

$$v^\sharp = \inf_{C\in\mathcal{C}(Y,X)}\sup_{y\in Y} f(C(y),y),$$

dove $\mathcal{C}(Y,X)$ indica l'insieme delle regole di decisione continue di Xavier. Quest'uguaglianza significa che, se Yvette non è propensa a rischiare (nel senso che vale (3.0.1)), allora Xavier non può migliorare il suo valore conservativo neanche se informato della strategia che utilizzerà Yvette. Allora la regola di decisione costante $\bar{x}$ realizza la minor perdita.
Nel caso generale, una **regola di decisione ottimale** $\bar{C}$ soddisfa

$$\forall y\in Y, \quad f(\bar{C}(y),y) = \inf_{x\in X} f(x,y).$$

Se tale regola di decisione ottimale è continua, allora
$\inf_{C \in \mathcal{C}(Y,X)} \sup_{y \in Y} f(C(y), y) = v^\sharp$ e quindi $v^\sharp = v^\flat = \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} f(x, y)$.
Ma questa seconda identità può essere ottenuta sotto altre ipotesi. Se al posto di assumere la continuità di $\bar{C}$ si assume che

$$\forall y \in Y, \quad x \mapsto f(x, y) \text{ è convessa}$$

si ottiene che

$$v^\sharp = \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} f(x, y).$$

Vedremo inoltre il teorema di Ky-Fan, il principale argomento di questo paragrafo, dal quale si deducono molti teoremi d'esistenza. Come vedremo in seguito, questo afferma che sotto opportune ipotesi topologiche e di concavità, esiste un $\bar{x} \in X$ tale che

$$\sup_{y \in X} f(\bar{x}, y) \leqslant \sup_{y \in X} f(y, y).$$

3.0.5 Esistenza di soluzioni conservative

Consideriamo la funzione di perdita di Xavier $f : X \times X \mapsto \mathbf{R}$. Esiste una soluzione conservativa quando le funzioni $x \mapsto f(x, y)$ sono inferiormente semicontinue e alcune funzioni $x \mapsto f(x, y_0)$ sono inferiormente semicompatte, poiché in tal caso la perdita peggiore $f^\sharp$ è inferiormente semicontinua ed inferiormente semicompatta.
In realtà è possibile provare un risultato più forte.
Supponiamo che X sia un sottoinsieme di uno spazio topologico U e denotiamo con $f_X(x, y)$ l'estensione di f a U definita da

$$f_X(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{se } x \in X \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Inoltre, introduciamo il seguente "valore"

$$\hat{v} = \sup_{K \in S} \inf_{x \in X} \max_{y \in K} f(x, y)$$

dove S denota la famiglia di sottoinsiemi finiti $K = \{y_1, \cdots, y_n\}$ di Y. È chiaro che $v^\flat \leqslant \hat{v} \leqslant v^\sharp$.
Poiché ogni $y \in Y$ forma un sottoinsieme finito $K = \{y\}$, ovviamente si ha $v^\flat = \sup_{\{y\}} \inf_{x \in X} \max_{y \in \{y\}} f(x, y) \leqslant \hat{v}$. D'altra parte, poiché
$\inf_{x \in X} \max_{y \in K} f(x, y) \leqslant v^\sharp$, vale la diseguaglianza $\hat{v} \leqslant v^\sharp$.

Teorema 3.0.15 *Supponiamo che*

$$\forall y \in Y, \quad x \mapsto f_X(x,y) \text{ è inferiormente semicontinua su } U \tag{3.0.2}$$

(ipotesi di continuità) e che

$$\exists\, y_0 \in Y \text{ tale che } x \mapsto f_X(x,y_0) \text{ è inferiormente semicompatta su } V \tag{3.0.3}$$

(ipotesi di compattezza).
Allora esiste una soluzione conservativa $\bar{x}$ e $v^\sharp = \hat{v}$. In altre parole,

$$\sup_{y\in Y} f(\bar{x},y) = \hat{v} \tag{3.0.4}$$

Dim. Sia $S(y) = \{x \in V : f(x,y) \leqslant \hat{v}\}$. Allora l'insieme delle soluzioni (3.0.4) è $S = \bigcap_{y\in Y} S(y)$. I sottoinsiemi $S(y)$ sono chiusi per (3.0.2) e $S(y_0)$ è compatto per (3.0.3). Allora S è non vuoto se vale la proprietà di intersezione finita, cioè $S_K = S(y_0) \cap \bigcap_{i=1}^n S(y_i) \neq \emptyset$ per ogni sottoinsieme finito $K = \{y_1, \cdots, y_n\}$ di Y.
Poiché $S(y_0)$ è compatto e $x \mapsto \max_{i=0,\cdots,n} f(x,y)$ è inferiormente semicontinua, esiste $\bar{x}$ che minimizza questa funzione. Quindi

$$\max_{i=0,\cdots,n} f(\bar{x},y^i) = \inf_{x\in X} \max_{i=0,\cdots,n} f(x,y^i) \leqslant \sup_{K\in S} \inf_{x\in X} \sup_{y\in K} f(x,y) = \hat{v}.$$

Ciò implica che $\bar{x}$ appatiene a S_K.
Abbiamo provato che S non è vuoto, cioè che esiste una soluzione $\bar{x}$ che soddisfi $\sup_{y\in Y} f(\bar{x},y) \leqslant \hat{v}$.
Ciò implica che $v^\sharp \leqslant \sup_{y\in Y} f(\bar{x},y) \leqslant \hat{v} \leqslant v^\sharp$.
Allora (3.0.4) vale e $\hat{v} = v^\sharp$. □

Osservazione 3.0.16 *Più in generale, possiamo sostituire l'ipotesi (3.0.3) con l'ipotesi più debole "esistono $y_1, \cdots, y_n \in Y$ tali che $x \mapsto \max_{i=0,\cdots,n} f_X(x,y_i)$ è inferiormente semicompatto su V". Con l'ipotesi (3.0.2) ciò implica che il sottoinsieme $S_0 = \bigcap_{i=1}^n S(y_i)$ sia compatto. Inoltre non è vuoto. La dimostrazione del teorema 3.0.15 con $S(y_0)$ sostituito da S_0 implica il risultato seguente.*

Proposizione 3.0.17 *Supponiamo che*

$$\forall y \in Y, \quad x \mapsto f_X(x,y)$$

sia inferiormente semicontinua su U e che esistano $y_1, \cdots, y_n \in Y$ tali che

$$x \mapsto \max_{i=0,\cdots,n} f_X(x,y_i) \text{ sia inferiormente semicompatto su } V.$$

Allora esiste una soluzione conservativa $\bar{x}$ e $v^\sharp = \hat{v}$.

Questo risultato è utile nel seguente esempio.

Esempio 3.0.18 *Consideriamo il caso in cui*

$$\begin{cases} (i) & X = \prod_{i=1}^n X^i \text{ dove } X^i \subset U^i, \\ (ii) & f(x,y) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i, y) \text{ dove } f_i \text{ è definita su } X^i \times Y. \end{cases}$$

Al posto di assumere che esista $y_0 \in Y$ tale che la funzione $x \mapsto f(x, y_0)$ sia inferiormente semicompatta, ipotizziamo che per ogni $i = 0, \cdots, n$ esista $y_i \in Y$ tale che

$$\begin{cases} (a) & f_j^\flat(y_i) = \inf_{x_j \in X^j} f_j(x_j, y_i) < +\infty, \quad \forall j \neq i, \\ (b) & x_i \mapsto f_i(x_i, y_i) \text{ è inferiormente semicompatta.} \end{cases}$$

Allora

$$f_{i,X^i}(x^i, y) = \begin{cases} f_i(x^i, y) & \text{se } x^i \in X^i, \\ +\infty & \text{se } x^i \notin X^i. \end{cases}$$

Proposizione 3.0.19 *Si abbia*

$$\begin{cases} (i) & X = \prod_{i=1}^n X^i \text{ dove } X^i \subset U^i, \\ (ii) & f(x,y) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i, y) \text{ dove } f_i \text{ è definita su } X^i \times Y, \end{cases}$$

l'ipotesi di compattezza

$$\begin{cases} (a) & f_j^\flat(y_i) = \inf_{x_j \in X^j} f_j(x_j, y_i) < +\infty, \quad \forall j \neq i, \\ (b) & x_i \mapsto f_i(x_i, y_i) \text{ è inferiormente semicompatta} \end{cases}$$

e l'ipotesi di continuità

$$\forall y \in Y, \quad \forall i = 1, \cdots, n, \quad x^i \mapsto f_{i,X^i}(x^i, y)$$

è inferiormente semicontinua su U^i, allora esiste una soluzione conservativa $\bar{x} = \{\bar{x}^1, \cdots, \bar{x}^n\}$ e $\hat{v} = v^\sharp$.

Dim. Dobbiamo mostrare che esistono $y_1, \cdots, y_n$ appartenenti a Y tali che $x \mapsto \max_{i=0,\cdots,n} f_X(x, y_i)$ sia inferiormente semicompatto su V (ipotesi della proposizione 3.0.17).
Prendendo $K = \{y_1, \cdots, y_n\}$, controlliamo che $x \mapsto \max_{1 \leqslant i \leqslant n} f(x, y_i)$ sia inferiormente semicompatto. Se $x = (x_1, \cdots, x_n)$ soddisfa $\max_{1 \leqslant i \leqslant n} f(x, y_i) \leqslant \lambda$, allora, per ogni i,

$$f_i(x_i, y_i) \leqslant \lambda - \sum_{j \neq i} f_j(x_j, y_i) \leqslant \lambda - \sum_{j \neq i} f_j^\flat(y_i)$$

Quindi, per ogni i, x_i appartiene ad un sottoinsieme relativamente compatto. □

3.0.6 Regole di decisione

Supponiamo ora che Xavier venga informato della scelta di strategia di Yvette. Al posto di scegliere delle strategie "pure" $x \in X$, Xavier può scegliere delle **regole di decisione** $C : Y \mapsto X$.
La perdita peggiore associata ad una tale regola di decisione C è definita da

$$f^\sharp(C) = \sup_{y \in Y} f(C(y), y).$$

Perciò, Xavier dovrà scegliere una $\bar{C}$, da un sottoinsieme di regole di decisione possibili, che minimizzi $C \mapsto f^\sharp(C)$.
Il nostro risultato richiede che X e Y siano spazi topologici e che l'insieme delle regole di decisione possibili sia l'**insieme delle regole di decisione continue** $\mathcal{C}(Y, X)$.
Poiché ogni strategia pura $x \in X$ può essere identificata con la regola di decisione costante (continua) $C_x : y \mapsto C_x(y) = x$ è chiaro che

$$v_1 = \inf_{C \in \mathcal{C}(Y,X)} f^\sharp(C) \leqslant \inf_{x \in X} \sup_{y \in Y} f(x, y) = v^\sharp. \tag{3.0.5}$$

Ciò significa che la perdita minore si ha quando Xavier viene informato della strategia di Yvette.

Comunque, si può provare che quest'informazione è superflua (nel senso che vale l'eguaglianza in (3.0.5)) quando la funzione di perdita f è concava rispetto a y.

Osservazione 3.0.20 *Nel caso di giochi a somma zero, la concavità di f rispetto a y descrive "il comportamento cauto di Yvette".*

Prima di enunciare e dimostrare il teorema sopracitato, osserviamo che, quando la topologia di Y è rafforzata, l'insieme $\mathcal{C}(Y, X)$ delle regole di decisione continue per Xavier aumenta. Quindi la minore tra le perdite peggiori $\inf_{C \in \mathcal{C}(Y,X)} f^\sharp(C)$ dovrebbe decrescere. L'identità $v^\sharp = \inf_{C \in \mathcal{C}(Y,X)} f^\sharp(C)$ è quindi più potente quando la topologia di Y è più forte.
Utilizziamo il commento precedente introducendo la "topologia finita" su un insieme convesso Y, che definiremo fra poco. Ogni funzione affine da Y ad uno spazio vettoriale U è continua se sia Y che U sono muniti di topologia finita.

3.0.7 Topologia finita su sottoinsiemi convessi

Supponiamo che Y sia un sottoinsieme convesso di uno spazio vettoriale V. Associamo ad ogni sottoinsieme finito $K = \{y_1, \cdots, y_n\}$ di Y la mappa affine

β_K che va da $\mathcal{M}^n = \{(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in [0,1]^n : \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1\}$, ove la cardinalità dell'insieme K è n, in Y, definita da

$$\lambda \in \mathcal{M}^n \mapsto \beta_K(\lambda) = \sum_{i=1}^n \lambda^i y_i.$$

Definizione 3.0.21 *La **topologia finita** su un sottoinsieme convesso Y è la topologia più forte per la quale le funzioni β_K sono continue quando K varia nella famiglia S dei sottoinsiemi finiti di Y.*
Una funzione A da Y in uno spazio topologico Z è continua quando Y è munita della topologia finita se e solo se le funzioni

$$A\beta_K : \mathcal{M}^n \mapsto Z \textit{ sono continue} \quad \forall K \in S.$$

Proposizione 3.0.22 *La topologia finita di Y è più forte di ogni altra topologia τ che renda Y uno spazio vettoriale topologico. Ogni operatore affine L da Y in uno spazio vettoriale U è continuo quando sia Y che U sono muniti di topologia finita.*

Dim. Supponiamo che Z sia lo spazio vettoriale Y munito di una topologia vettoriale e che A sia la funzione iniettiva canonica da Y in Z. Dobbiamo dimostrare che A è continua. Ciò segue dal fatto che, per ogni $K = \{y_1, \cdots, y_n\}$, la funzione $\lambda \in \mathcal{M}^n \mapsto A\beta_K(\lambda) = \sum_{i=1}^n \lambda^i y_i$ è continua essendo τ compatibile con la struttura vettoriale di Y. Prendiamo $Z = U$ e $A = L$, dove L è un operatore affine. Dobbiamo dimostrare che per ogni $K = \{y_1, \cdots, y_n\}$, la funzione $L\beta_K : \lambda \in \mathcal{M}^n \mapsto L\beta_K(\lambda) = L(\sum_{i=1}^n \lambda^i y_i) = \sum_{i=1}^n \lambda^i L(y^i) = \beta_{L(K)}(\lambda) \in U$ è continua. Ma $L\beta_K = \beta_{L(K)}$ è continua per definizione di topologia finita su U. □

3.0.8 Esistenza di una regola di decisione ottimale

Teorema 3.0.23 *Sia X un sottoinsieme di uno spazio topologico U e sia Y un sottoinsieme convesso di uno spazio vettoriale V, munito di topologia finita. Ipotizzando la continuità (3.0.2), la compattezza (3.0.3), e la concavità*

$$\forall x \in X, \quad y \mapsto f(y,x) \textit{ è quasi-concava,}$$

allora esistono strategie conservative $\bar{x}$ che, viste come regole di decisione, minimizzano $C \mapsto f^\sharp(C)$ su $\mathcal{C}(Y,X)$, cioè

$$\sup_{y \in Y} f(\bar{x}, y) = \inf_{C \in \mathcal{C}(Y,X)} \sup_{y \in Y} f(C(y), y) = v^\sharp.$$

Dim. Per il teorema 3.0.15, la dimostrazione si riduce a mostrare che

$$\hat{v} \leqslant \inf_{C \in \mathcal{C}(Y,X)} \sup_{y \in Y} f(C(y), y),$$

cioè per ogni $K = \{y_1, \cdots, y_n\}$ ed ogni $C \in \mathcal{C}(Y, X)$,

$$\inf_{x \in X} \max_{i=1,\cdots,n} f(x, y_i) \leqslant \sup_{y \in Y} f(C(y), y) = c.$$

Dobbiamo infatti dimostrare che esiste $\tilde{x} \in X$ tale che

$$\max_{i=1,\cdots,n} f(\tilde{x}, y_i) \leqslant c. \tag{3.0.6}$$

A questo scopo, introduciamo la funzione $\varphi : \mathcal{M}^n \times Y \mapsto \mathbf{R}$ definita da

$$\varphi(\lambda, y) = f(C(\sum_{i=1}^{n} \lambda^i y_i), y)$$

e gli insiemi

$$F_i = \{\lambda \in \mathcal{M}^n : \varphi(\lambda, y_i) \leqslant c\}.$$

È sufficiente dimostrare che esiste $\tilde{y} \in \bigcap_{i=1}^n F_i$. In tal caso, $\tilde{x} = C(\sum_{i=1}^n \tilde{\lambda}^i y_i)$ chiaramente soddisfa (3.0.6).
Per provare che gli n sottoinsiemi F_i di $\mathcal{M}^n$ hanno intersezione non vuota, usiamo il lemma di Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz.
Dobbiamo controllare che

$$\begin{cases} (i) & \text{gli } n \text{ sottoinsiemi } F_i \text{ di } \mathcal{M}^n \text{ sono chiusi,} \\ (ii) & \forall \lambda \in \mathcal{M}^n, \lambda \in \bigcup_{i \in A_\lambda} F_i, \end{cases} \tag{3.0.7}$$

dove $A_\lambda = \{i : \lambda^i > 0\}$.
I sottoinsiemi F_i sono chiusi perché $\lambda \in \mathcal{M}^n \mapsto C(\sum_{i=1}^n \lambda^i y_i) \in X$ è continua (Y munita di topologia finita) e $x \mapsto f_X(x, y)$ è inferiormente semicontinua.
Resta da provare che vale la proprietà (3.0.7)(ii).
Se così non fosse, esisterebbe $\lambda_0 \in \mathcal{M}^n$ tale che, per ogni $i \in A_0 = \{i : \lambda_0^i > 0\}$,

$$\varphi(\lambda_0, y_i) = f(C(\sum_{j=1}^{n} \lambda_0^j y_j, y_i)) > c.$$

Ciò significa che, per ogni $i \in A_0$, y_i appartiene alla sezione aperta superiore della funzione $y \mapsto f(C(\sum_{j=1}^n \lambda_0^j y_j, y_i))$, che è convessa per ipotesi. Perciò $\sum_{j=1}^n \lambda_0^j y_j$ appartiene alla sezione. Quindi $f(C(\sum_{j=1}^n \lambda_0^j y_j), \sum_{j=1}^n \lambda_0^j y_j) > c$. Ma ciò è in contraddizione con la definizione di $c = \sup_{y \in Y} f(C(y), y)$. $\square$

3.0.9 La diseguaglianza di Ky-Fan

Si deduce dal teorema 3.0.23 la diseguaglianza di Ky-Fan.

Teorema 3.0.24 (Ky-Fan) *Supponiamo che X sia un sottoinsieme compatto e convesso di uno spazio topologico U e che la funzione $f : X \times X \mapsto \boldsymbol{R}$ soddisfi*

$$\begin{cases} (i) & \forall y \in X, x \mapsto f(x,y) \ \textit{è inferiormente semicontinua,} \\ (ii) & \forall x \in X, y \mapsto f(x,y) \ \textit{è quasi concava,} \\ (iii) & \sup_{y \in X} f(y,y) \leqslant 0. \end{cases}$$

Allora esiste $\bar{x} \in X$ che soddisfa

$$\sup_{y \in X} f(\bar{x}, y) \leqslant 0.$$

Dim. Poiché la funzione identità I è continua da X, munito di topologia finita, a X (che è compatto per la topologia di spazio vettoriale), possiamo dedurre dal teorema 3.0.23 l'esistenza di $\bar{x} \in X$ che soddisfa

$$\sup_{y \in X} f(\bar{x}, y) = \inf_{C \in \mathcal{C}(X,X)} \sup_{y \in X} f(C(y), y) \leqslant \sup_{y \in X} f(I(y), y) = \sup_{y \in X} f(y,y) \leqslant 0.$$

$\square$

Capitolo 4

Il modello economico fondamentale: l'equilibrio di Walras

Questo capitolo è dedicato alla descrizione di un modello economico fondamentale. Definiremo gli equilibri di Walras e di pre-Walras e dimostreremo diversi teoremi di esistenza.
Brevemente, il problema è questo. Ci sono n consumatori $(i = 1, 2, \cdots, n)$ che devono scegliere dei beni di consumo $x^i \in R^i \subset \mathbf{R}^l$ in modo che la somma $\sum_{i=1}^n x^i$ dei loro consumi appartenga ad un dato sottoinsieme $Y \subset \mathbf{R}^l$ di prodotti disponibili. Ciascun consumatore utilizza un meccanismo di selezione chiamato "multifunzione di domanda" che associa ad ogni prezzo $p \in \mathbf{R}^{l*}$ e ricchezza $r \in \mathbf{R}$ un sottoinsieme $D_i(p, r)$ di un insieme di bilancio $B_i(p, r) = \{x \in \mathbf{R}^i : \langle p, x\rangle \leqslant r\}$.
Quando la ricchezza totale $r(p) = \sup_{y\in Y}\langle p, y\rangle$ viene adattata distribuendo ad ogni consumatore i una rendita $r_i(p)$ tale che $\sum_{i=1}^N r_i(p) = r(p)$ per tutti i p, il problema evolverà nella ricerca, se possibile, di un prezzo $\bar{p}$ e di un consumo $\bar{x}^i$ tale che

$$\begin{cases} (i) & \bar{x}^i \in D_i(\bar{p}, r_i(\bar{p})),\ i = 1, 2, \cdots, n \\ (ii) & \sum_{i=1}^n \bar{x}^i \in Y. \end{cases}$$

Quando queste condizioni sono soddisfatte, diremo che $\bar{p}$ e $\bar{x}^i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ costituiscono un pre-equilibrio di Walras.
Il concetto di equilibrio di Walras è una soluzione ad un meccanismo statico per ottenere una distribuzione in maniera decentralizzata. È anche possibile escogitare un meccanismo dinamico nel quale i consumatori sono rappresentati da opportune "funzioni istantanee di domanda" δ_i che portano a formulare

un'equazione differenziale per la funzione dei beni $x_i(t)$. In questa tesi, non tratteremo questo caso, per il quale rimandiamo a *J.P. Aubin, Mathematical methods of game and economic theory* [3].
Dopo aver dimostrato un teorema d'esistenza, la cui principale asserzione è che le multifunzioni di domanda sono superiormente semicontinue, studieremo il caso in cui tali multifunzioni di domanda sono determinate dalla funzione per la minimizzazione delle spese $x \mapsto f(x,p)$ (che può dipendere dal prezzo p).
Tali teoremi d'esistenza verranno dedotti da un risultato generale sulla surgettività delle multifunzioni che segue direttamente dal teorema di Ky-Fan.
Il risultato concerne una multifunzione superiormente semicontinua S che mappa gli elementi p di un sottoinsieme compatto convesso $P \subset U^*$ in sottoinsiemi compatti convessi $S(p) \subset U$ che soddisfano la generale **legge di Walras**:

$$\forall p \in P, \quad \sigma^\flat(S(p),p) = \inf_{y \in S(p)} \langle p, y \rangle \leqslant 0.$$

La conclusione sarà che il problema di trovare

$$\bar{x} \in S(\bar{p}) \cap -P^+$$

ammette soluzione $\{\bar{x}, \bar{p}\}$.

4.1 Descrizione del modello

In questa sezione definiamo il modello, il pre-equilibrio e l'equilibrio di Walras; descriveremo inoltre diversi esempi di appropriazione di insiemi di prodotti disponibili.

Consideriamo lo spazio dei prodotti $\mathbf{R}^l$. Iniziamo la descrizione di un'economia con il sottoinsieme $Y \subset \mathbf{R}^l$ dei prodotti disponibili.
Consideriamo un insieme $N = \{1, \cdots, n\}$ di n consumatori (famiglie) denotate con $i = 1, \cdots, n$. Ad ogni consumatore $i \in N$ associamo il suo **sottoinsieme dei consumi** $R^i \subset \mathbf{R}^i$, che è supposto una volta per tutte convesso, chiuso e limitato inferiormente.
Il problema base è quello di distribuire i prodotti disponibili $y \in Y$ tra i consumatori. Una "distribuzione" tra consumatori in N è un elemento $x = \{x^1, \cdots, x^n\}$ che appartiene a $R^N = \prod_{i=1}^n R^i$ tale che il corrispondente consumo totale $\sum_{i=1}^n x^i$ sia un prodotto disponibile. Denotiamo con $X(N) \subset R^N$ il sottoinsieme delle distribuzioni definite da

$$X(N) = \{x \in R^N : \sum_{i \in N} x^i \in Y\}. \tag{4.1.1}$$

La funzione supporto superiore di Y verrà denotata con

$$r(p) = \sigma^\sharp(Y;p) = \sup_{y \in Y} \langle p, y \rangle \, . \tag{4.1.2}$$

Interpretiamo $r(p)$ come la **funzione profitto** dell'economia, dove $p \in \mathbf{R}^{l*}$ è visto come un prezzo (che associa ad ogni $y \in Y$ il suo valore $\langle p, y\rangle \in \mathbf{R}$). Denotiamo il cono barriera di Y con $P(Y^\sharp) = \{p \in \mathbf{R}^{l*} : r(p) < +\infty\}$. In molti esempi, assumeremo l'esistenza di un vettore non nullo $\xi \in Int(-P_\infty(Y))$ che possiamo chiamare **numéraire**.
In tal caso, il cono $P(Y^\sharp)$ è generato dal sottoinsieme

$$P = \{p \in P(Y^\sharp) : \langle p, \xi\rangle = 1\} \tag{4.1.3}$$

dei prezzi normalizzati. In questo caso, il teorema 2.5.3 implica che P è un sottoinsieme compatto convesso di $\mathbf{R}^{l*}$ e che $P^+ = -P_\infty(Y)$ è il negativo del cono di recessione.
Ricordiamo che r è inferiormente semicontinua, convessa e positivamente omogenea. Se si suppone Y chiuso, convesso e che soddisfi $Y = Y + P_\infty(Y)$, allora Y è caratterizzata dalla sua funzione di massimo profitto, cioè

$$Y = \{y \in \mathbf{R}^l : \langle p, y\rangle \leqslant r(p) \;\; \forall p \in P\}. \tag{4.1.4}$$

Se

$$0 \in Y, \tag{4.1.5}$$

allora r è una funzione non-negativa su P.

Per escogitare un meccanismo decentralizzato che disponga un prodotto disponibile $y \in Y$, assumiamo che il sottoinsieme Y dei prodotti disponibili sia "appropriato". Ciò significa che i consumatori $i \in N$ sono dotati di sottoinsiemi $Y(i)$ di prodotti tali che

$$Y = \sum_{i \in N} Y(i), \quad Y(i) \subset \mathbf{R}^l \tag{4.1.6}$$

In altre parole, ogni prodotto disponibile $y = \sum_{i \in N} y^i \in Y$ è supposto essere appropriato nel senso che ogni consumatore $i \in N$ ha diritto ad un prodotto disponibile $y^i \in Y(i)$.
Potremmo dire che $Y(i)$ è la **dotazione iniziale dei prodotti disponibili**. Se Y è appropriato la funzione profitto può essere condivisa tra i consumatori, cioè

$$\forall p \in P, \quad r(p) = \sum_{i=1}^{n} r_i(p) \tag{4.1.7}$$

dove

$$r_i(p) = \sigma^\sharp(Y(i); p) = \sup_{y \in Y(i)} \langle p, y \rangle \tag{4.1.8}$$

denota il profitto massimo che il consumatore i ottiene dalla sua dotazione iniziale $Y(i)$. Tale profitto $r_i(p)$ è usato come rendita. Se definiamo l'**insieme di bilancio** $B_i(p, r)$ del consumatore i come

$$B_i(p, r) = \{x \in R^i : \langle p, x \rangle \leqslant r\}, \tag{4.1.9}$$

l'insieme di bilancio del giocatore i, definito dalla configurazione $Y = \sum_{i=1}^n Y(i)$, è $B_i(p, r_i(p))$.

Una volta che l'insieme dei prodotti disponibili sia appropriato, ogni consumatore conosce il suo insieme di bilancio $B_i(p, r_i(p))$ quando il prezzo p prevale.
Dovremmo supporre che ogni consumatore i pianifichi una procedura di selezione che gli permetta di consumare un bene nel sottoinsieme $D_i(p, r)$ del suo insieme di bilancio $B_i(p, r)$.

Definizione 4.1.1 *Diciamo che una multifunzione $D_i : P \times \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^l$ è una **multifunzione di domanda** se*

$$\forall p \in P, \quad \forall r \in \boldsymbol{R}, \quad D_i(p, r) \subset B_i(p, r).$$

*Un'**economia** verrà quindi definita dagli oggetti*

$$\{R^i, Y(i), D_i\}_{i \in N}.$$

Possiamo ora enunciare il problema base. Se assumiamo che

$$\begin{cases} (i) & Y = \sum_{i=1}^n Y(i) \text{ è appropriato,} \\ (ii) & \text{ogni consumatore } i \text{ sceglie un prodotto} \\ & \text{secondo la multifunzione di domanda } D_i, \end{cases}$$

ci chiediamo se sia possibile trovare un prezzo $\bar{p}$ tale che esistano prodotti $\bar{x}^i$ che soddisfino

$$\begin{cases} (i) & \forall i \in N, \ \bar{x}^i \in D_i(\bar{p}, r_i(\bar{p})), \\ (ii) & \sum_{i \in N} \bar{x}^i \in Y. \end{cases} \tag{4.1.10}$$

Definizione 4.1.2 *Diciamo che una coppia $\{\bar{x}, \bar{p}\} = \{\bar{x}^1, \cdots, \bar{x}^n, \bar{p}\} \in \boldsymbol{R}^N \times P$ che soddisfa 4.1.10 è un **pre-equilibrio di Walras**. Chiamiamo $\bar{x} = \{\bar{x}^1, \cdots, \bar{x}^n\}$ una **disposizione di Walras** e $\bar{p}$ un **prezzo di Walras**. Diciamo che $\{\bar{x}, \bar{p}\}$ è un **equilibrio di Walras** se, in aggiunta,*

$$\forall i \in N, \quad \langle \bar{p}, \bar{x}_i \rangle = r_i(\bar{p}).$$

4.2 Esempi di sottoinsiemi di prodotti disponibili appropriati

Esempio 4.2.1 *L'esempio più semplice si ha quando*

$$Y = w - \boldsymbol{R}^l_+$$

ossia quando Y *è l'insieme dei prodotti di valore non superiore ad un patrimonio iniziale* w. *Se si suppone che ogni consumatore* i *possegga una dotazione iniziale* w^i *di beni tali che* $w = \sum_{i=1}^n w^i$, *allora la configurazione di* Y *è definita da*

$$Y = \sum_{i \in N} Y(i), \quad Y(i) = w^i - \boldsymbol{R}^l_+.$$

Le funzioni $r(p)$ *e* $r_i(p)$ *sono*

$$r_i(p) = \left\langle p, w^i \right\rangle, \qquad r(p) = \langle p, w \rangle.$$

Esempio 4.2.2 *Consideriamo* m *imprese* j, *descritte dai loro sottoinsiemi di produzione* Z^j. *Se* w *è il patrimonio iniziale, allora*

$$Y = w + \sum_{j=1}^m Z^j - \boldsymbol{R}^l_+.$$

Solitamente per definire in modo appropriato Y *si assume che*

$$w = \sum_{i=1}^n w^i$$

sia la somma delle dotazioni iniziali e che ogni consumatore i *possegga una frazione* $\vartheta^i_j \in [0,1]$ *dell'impresa* j *e partecipi fino a tal punto nella produzione. Il sistema* $\vartheta = \{\vartheta^i_j\}$ *di azioni ovviamente soddisfa*

$$\forall j = 1, \cdots, m, \qquad \sum_{i \in N} \vartheta^i_j = 1$$

In altre parole, $Y = w + \sum_{j=1}^m Z^j - \boldsymbol{R}^l_+$ *è strutturato nel modo seguente*

$$Y = \sum_{i \in N} Y(i); \quad Y(i) = w^i + \sum_{j=1}^m \vartheta^i_j Z^j - \boldsymbol{R}^l_+$$

Le funzioni di profitto $r(p)$ e $r_i(p)$ sono definite da

$$\begin{cases} (i) & r_i(p) = \langle p, w^i \rangle + \sum_{j=1}^m \vartheta_j^i \sigma^\sharp(Z^j; p), \\ (ii) & r(p) = \langle p, w \rangle + \sum_{j=1}^m \sigma^\sharp(Z^j; p). \end{cases}$$

Il reddito del consumatore i deriva da due fonti, cioè la vendita della sua dotazione iniziale w^i e i dividendi legati alle azioni $\vartheta_j^i \sigma^\sharp(Z^j; p)$ ottenuti coi guadagni delle imprese j.

Proposizione 4.2.3 *Sia $\{\bar{x}, \bar{p}\}$ un equilibrio di Walras e sia $\bar{y} = \sum_{i \in N} \bar{x}^i$ il* ***vettore aggregato delle domande****. Allora per ogni disposizione $\{\bar{z}^1, \cdots, \bar{z}^n\}$ della produzione che soddisfi*

$$\sum_{i \in N} \bar{x}^i \leqslant w + \sum_{j=1}^m \bar{z}^j \tag{4.2.1}$$

si ha che

$$\forall j = 1, \cdots, m, \quad \left\langle \bar{p}, \bar{z}^j \right\rangle = \max_{z \in Z^j} \langle \bar{p}, z \rangle$$

cioè $\bar{z}^j$ massimizza il profitto sull'insieme di produzione Z^j quando prevale il prezzo di Walras $\bar{p}$.

Dim. Poiché $\bar{y} = \sum_{i \in N} \bar{x}^i$ appartiene a Y, per ogni $j = 1, \cdots, m$ esiste $\bar{z}^j \in Z^j$ tale che valga (4.2.1). Quindi

$$\begin{aligned} r(\bar{p}) = \sum_{i \in N} r_i(\bar{p}) &= \sum_{i \in N} \left\langle \bar{p}, \bar{x}^i \right\rangle = \langle \bar{p}, \bar{y} \rangle \\ &\leqslant \langle \bar{p}, w \rangle + \sum_{j=1}^n \left\langle \bar{p}, \bar{z}^j \right\rangle \leqslant r(\bar{p}). \end{aligned}$$

Perciò, poiché $r(\bar{p}) = \langle \bar{p}, w \rangle + \sum_{j=1}^m \sigma^\sharp(Z^j; \bar{p})$, si ottiene che

$$\sum_{j=1}^n (\left\langle \bar{p}, \bar{z}^j \right\rangle - \sigma^\sharp(Z^j; \bar{p})) = 0.$$

Ma $\langle \bar{p}, \bar{z}^j \rangle - \sigma^\sharp(Z^j; \bar{p}) \leqslant 0$ per ogni j. Ne deduciamo che $\langle \bar{p}, \bar{z}^j \rangle = \sigma^\sharp(Z^j; \bar{p})$ per ogni j. $\square$

4.3 Esistenza di un equilibrio di Walras

In questa sezione dimostriamo l'esistenza di un equilibrio di Walras quando le multifunzioni di domanda sono superiormente semicontinue.
Per tale scopo avremo bisogno di un teorema astratto sulla surgettività delle multifunzioni.

Teorema 4.3.1 *Assumiamo le seguenti ipotesi:*

1. *gli insiemi di consumo R^i sono chiusi, convessi e limitati inferiormente;*
2. *il sottoinsieme Y dei prodotti disponibili è chiuso e convesso;*
3. *il cono di recessione di Y è $-\boldsymbol{R}^l_+$;*
4. *esiste $w \in Y$ tale che $(Y - w) \cap \boldsymbol{R}^l_+ = \{0\}$;*
5. *$\xi \in \boldsymbol{R}^l_+$ è un numéraire e $P = \{p \in \boldsymbol{R}^l_+ : \langle p, \xi \rangle = 1\}$;*
6. *le multifunzioni di domanda D^i e le funzioni di reddito r_i sono tali che per ogni $i \in \boldsymbol{N}$, la funzione $p \in P \to D_i(p, r_i(p))$ è superiormente semicontinua con immagini chiuse convesse e non vuote.*

Allora esiste un pre-equilibrio di Walras $\{\bar{x}, \bar{p}\} \in \boldsymbol{R}^{l*}_+ \times P$.

Osservazione 4.3.2 *L'ipotesi d'esistenza di $w \in Y$ tale che $(Y - w) \cap \boldsymbol{R}^l_+ = \{0\}$ è, per la proposizione 2.6.12, una condizione sufficiente affinché la seguente funzione sia propria.*

$$\{x^1, x^2, \cdots, y\} \in R^N \times Y \mapsto \sum_{i \in N} x^i - y \in \boldsymbol{R}^l \tag{4.3.1}$$

Dobbiamo provare che il teorema 4.3.1 vale anche quando la terza ipotesi viene sostituita dalla proprietà (4.3.1).

Dim. È chiaro che $\bar{p}$ è un prezzo di Walras se e solo se $0 \in S(\bar{p})$, dove

$$S(p) = \sum_{i \in N} D_i(p, r_i(p)) - Y.$$

Poiché i sottoinsiemi $D_i(p, r_i(p))$ e Y sono chiusi, deduciamo dalla proprietà (4.3.1) che $S(p)$ è chiuso. È convesso (essendo la somma di sottoinsiemi convessi) e soddisfa $S(p) = S(p) + \mathbf{R}^l_+$ poiché $Y = Y - \mathbf{R}^l_+$. Allora la proprietà (4.3.1) implica che:

$$\forall p \in P, \quad S(p) = S(p) + \mathbf{R}^l_+ \text{ è chiuso e convesso.}$$

Inoltre, la semicontinuità superiore della multifunzione $p \to D_i(p, r_i(p))$ implica che le funzioni $p \mapsto \sigma^\sharp(D_i(p, r_i(p)), q)$ siano superiormente semicontinue (vedi il teorema 2.7.5).
Perciò,

1. $\forall q \in \mathbf{R}^{l*}$, $p \mapsto \sigma^\sharp(A(p); q)$ è superiormente semicontinua,
2. $S(p)$ è un chiuso non vuoto, convesso e soddisfa $S(p) = S(p) + \mathbf{R}^l_+$.

Sia $p \in P$ e sia z un punto qualsiasi di $S(p)$.
Da $z = \sum_{i \in N} x^i - y$ dove $x^i \in D_i(p, r_i(p))$ e $y \in Y$, deduciamo che $\langle p, z \rangle \leqslant \sum_{i \in N} r_i(p) - \langle p, y \rangle \leqslant r(p) - \langle p, y \rangle$. Allora

$$\inf_{z \in S(p)} \langle p, z \rangle \leqslant r(p) - \sup_{y \in Y} \langle p, y \rangle = 0.$$

Abbiamo quindi provato che

$$\forall p \in P, \quad \sigma^\flat(S(p), p) \leqslant 0.$$

Infine, poiché $\xi \in \mathbf{R}^l_+$ e poiché $-\mathbf{R}^l_+$ è il cono di recessione di Y, il teorema 2.5.3 implica che

$$P = \{p \in \mathbf{R}^{l*}_+ : \langle p, \xi \rangle = 1\} \text{ è convesso e compatto.}$$

L'esistenza di $\bar{p} \in P$ tale che $0 \in S(\bar{p})$ segue dal seguente teorema di esistenza.

Teorema 4.3.3 (Debreu-Gale-Nikaido) *Siano U uno spazio e U^* il suo duale. Supponiamo che P sia un sottoinsieme compatto convesso di U^* che non contiene 0 e sia $P^+ \subset U$ il suo cono polare. Sia $S : P \to U$ una multifunzione che soddisfi*

$$\begin{cases} (i) & \forall q \in U^*,\ p \mapsto \sigma^\sharp(S(p); q) \text{ è superiormente semicontinua,} \\ (ii) & \forall p \in P,\ S(p) + P^+ \text{ è non vuoto, chiuso e convesso} \\ (iii) & \forall p \in P,\ \sigma^\flat(S(p); p) = \inf_{y \in S(p)} \langle p, y \rangle \leqslant 0. \end{cases} \tag{4.3.2}$$

Esiste allora $\bar{p} \in P$ tale che

$$S(\bar{p}) \cap -P^+ \neq \emptyset \ (\text{cioè } 0 \in S(\bar{p}) + P^+). \tag{4.3.3}$$

Osservazione 4.3.4 *Una multifunzione S che soddisfa (i) è detta superiormente emicontinua.*

Dim. Introduciamo la funzione φ definita su $P \times P$ da

$$\varphi(p,q) = \sigma^\flat(S(p), q).$$

Tale funzione è concava rispetto a q, inferiormente semicontinua rispetto a p (poiché la multifunzione $p \to S(p)$ è superiormente emicontinua) e soddisfa $\varphi(p,p) \leqslant 0$ per ogni $p \in P$. Poiché P è compatto e convesso, il teorema di Ky-Fan implica l'esistenza di $\bar{p} \in P$ tale che

$$\forall q \in P, \quad \varphi(\bar{p}, q) = \sigma^\flat(S(\bar{p}, q)) \leqslant 0$$

(vedi il teorema 3.0.24).
Ciò implica che $0 \in \bar{co}(S(\bar{p}) + P^+)$ (poiché $(S(\bar{p}) + P^+)$ è chiuso e convesso).
Ciò significa che $S(\bar{p}) \cap -P^+ = \emptyset$. □

Osservazione 4.3.5 *Possiamo abbandonare il presupposto che P sia compatto ed assumere invece il presupposto seguente. Esiste $q_0 \in P$ tale che, per ogni λ, il sottoinsieme degli elementi $p \in P$ tali che $S(p)$ interseca il semi-spazio $H(q^0, \lambda) = \{z \in U : \langle q^0, z\rangle \leqslant \lambda\}$ sia relativamente compatto.*

Proposizione 4.3.6 *Supponiamo che P sia un sottoinsieme chiuso e convesso di U^* e che $S : P \to U$ sia una multifunzione che soddisfi la condizione (4.3.2) del teorema 4.3.3 e la proprietà (4.3.5). Allora esiste una soluzione $\bar{p}$ di (4.3.3).*

Dim. La proprietà enunciata nell'osservazione 4.3.5 equivale a dire che la funzione $p \mapsto \varphi(p, q^0) = \inf_{z \in S(p)} \langle q^0, z\rangle$ è inferiormente semicompatta, poiché il sottoinsieme degli elementi $p \in P$ tali che $S(p) \cap H(q^0, \lambda) \neq \emptyset$ è solo il sottoinsieme $\{p \in P : \sigma^\flat(S(p), q^0) = \varphi(p, q^0) \leqslant \lambda\}$.
Inoltre, φ è inferiormente semicontinua rispetto a p e concava rispetto a q. Perciò, il teorema 3.0.23 implica che esiste $\bar{p} \in P$ tale che

$$\begin{aligned}\sup_q \varphi(\bar{p}, q) &\leqslant \inf_{D \in (P,P)} \sup_{q \in P} \varphi(D(q), q) \\ &\leqslant \sup_q \varphi(q,q) = \sup_q \sigma^\flat(S(q), q) \leqslant 0.\end{aligned}$$

Ciò implica che $0 \in S(\bar{p}) + P^+$. □

4.4 Multifunzioni di domanda definite dalle funzioni di spesa

In questa sezione analizziamo il caso in cui le multifunzioni di domanda sono definite da

$$D_i(p,r) = \{x \in B_i(p,r) : f_i(x,p) = \min_{y \in B_i(p,r)} f_i(y,p)\}.$$

Per provare la semicontinuità superiore di una tale multifunzione di domanda, abbiamo bisogno della compattezza degli insiemi di consumo R^i. Dobbiamo perciò "compattificare" l'economia. Introduciamo a tale scopo un'ipotesi che implica che la mappa $\{x^1, \cdots, x^n, y\} \mapsto \sum_{i=1}^n x^i - y$ sia propria. Costruiamo quindi una nuova economia nella quale i sottoinsiemi di consumo R^i sono compatti ed in cui vale il teorema di esistenza 4.3.1. Controlliamo infine che queste due economie siano uguali nel senso che i loro sottoinsiemi di equilibrio coincidono.

Consideriamo le multifunzioni di domanda D_i ottenute assumendo che il consumatore i scelga un prodotto nell'insieme di bilancio B_i realizzando la spesa minore. In particolare, assumiamo che ogni consumatore scelga un prodotto secondo una funzione di spesa

$$f_i : R^i \times P \mapsto \mathbf{R}$$

che possa essere indicizzata dal prezzo prevalente nell'economia.
Allora definiamo D_i nel modo seguente

$$D_i(p,r) = \{x \in B_i(p,r) : f_i(x,p) = \min_{y \in B_i(p,r)} f_i(y,p)\}.$$

In tale situazione, possiamo riassumere le caratteristiche che descrivono l'economia con

$$\{R^i, Y(i), f_i\}_{i \in N}$$

poiché le multifunzioni di domanda D_i dipendono dalle funzioni di spesa f_i.
Iniziamo con l'enunciare un teorema di esistenza per l'equilibrio di Walras.

Teorema 4.4.1 *Supponiamo che*

1. *gli insiemi di consumo R^i siano chiusi, convessi e limitati inferiormente;*

2. *gli insiemi delle dotazioni iniziali $Y(i)$ siano chiuse, convesse ed abbiano come cono di recessione $-\boldsymbol{R}^l_+$;*

3. *$\forall i, \quad 0 \in \boldsymbol{R}^i - IntY(i)$;*

4. *la mappa $\{x, y\} \in R^N \times Y \mapsto \sum_{i \in N} x^i - y \in \boldsymbol{R}^l$ sia propria.*

Supponiamo anche che le funzioni di spesa f_i soddisfino

$$\begin{cases} (i) & \forall p \in P,\ x^i \mapsto f_i(x^i, p) \text{ è convesso} \\ (ii) & f_i \text{ è continua su } R^i \times P. \end{cases}$$

e la proprietà di non saziabilità

$$\forall p \in P,\ \forall x^i \in R^i \quad \exists y^i \in R^i\ :\ f_i(y^i, p) < f_i(x^i, p).$$

Allora esiste un equilibrio di Walras $\{\bar{x}, \bar{p}\}$.

La dimostrazione di questo teorema seguirà da diversi risultati preliminari. Per applicare il teorema 4.3.1, abbiamo prima bisogno di investigare sotto quali condizioni le multifunzioni di domanda D_i sono superiormente semicontinue. Vedremo che ciò richiede delle proprietà di compattezza (cioè che R^i sia compatto e che $Y(i) = Y_0(i) - \mathbf{R}^l_+$ dove $Y_0(i)$ è compatto). Abbiamo perciò bisogno di ridurre l'economia iniziale ad un'economia "compatta" equivalente (nel senso che gli insiemi dell'equilibrio di Walras coincidono). Iniziamo studiando i bilanci e le multifunzioni di domanda.

Proposizione 4.4.2 *Supponiamo che la funzione dei guadagni r_i*

$$\begin{cases} (i) & r_i \text{ è continua su } P \\ (ii) & \forall p \in P,\ \exists \tilde{x}^i \in R^i : \langle p, \tilde{x}^i \rangle < r_i(p). \end{cases} \tag{4.4.1}$$

Allora la multifunzione del bilancio $p \mapsto B(p_i, r_i(p))$ ha immagini non vuote chiuse convesse ed è chiusa ed inferiormente semicontinua.
Se inoltre:

$$\begin{cases} (i) & R^i \text{ è compatto,} \\ (ii) & \text{la funzione di spesa } f_i : R^i \times P \mapsto \boldsymbol{R} \text{ è continua,} \end{cases}$$

allora la multifunzione di domanda $p \to D_i(p, r_i(p))$ è superiormente semicontinua.

Dim. 1. I sottoinsiemi di bilancio $B_i(p, r_i(p))$ sono non vuoti per l'ipotesi (4.4.1) (i). Il grafico della multifunzione $p \to B_i(p, r_i(p))$ è chiuso poiché è il sottoinsieme delle coppie (p, x) che soddisfano $\langle p, x \rangle - r_i(p) \leqslant 0$ e $p \mapsto r_i(p)$ è superiormente semicontinua per l'ipotesi (4.4.1) (i).

2. La multifunzione di bilancio è inferiormente semicontinua perché, se $p_0 \in P$, $x_0 \in B_i(p_0, r_i(p_0))$ sono fissati e $N(x_0)$ è un intorno di x_0, possiamo costruire $x_\vartheta \in N(x_0)$ ed un intorno $N(p_0)$ di p_0 tale che $x_\vartheta \in B_i(p, r_i(p))$ per ogni $p \in N(p_0)$. Per costruzione, sia $\tilde{x}^i \in R^i$ definito dall'ipotesi 4.4.1 (ii). Allora
$$\left\langle p_0, \tilde{x}^i \right\rangle - r^i(p_0) = -c_0 < 0$$
Inoltre, esiste $\vartheta > 0$ tale che $x_\vartheta = \vartheta \tilde{x}^i + (1-\vartheta)x_0$ appartiene a $N(x_0)$. Poiché $\langle p_0, x_0 \rangle \leqslant 0$, deduciamo che $\langle p_0, x_0 \rangle \leqslant -c_0\vartheta$.
Prendiamo $\varepsilon = \frac{1}{4}c_0\vartheta$. Poiché r_i è inferiormente semicontinua, esiste un intorno $N(p_0)$ di p_0 tale che, per ogni $p \in N(p_0)$,
$$\langle p, x_\vartheta \rangle - r_i(p) \leqslant \langle p_0, x_\vartheta \rangle - r_i(p_0) + \varepsilon + \langle p - p_0, x_\vartheta \rangle \leqslant -\frac{1}{2}c_0\vartheta < 0.$$
Ciò implica che $x_\vartheta \in B(p, r_i(p)$ se $p \in N(p_0)$.

3. Per di più, se assumiamo che R^i sia compatto, allora $B_i(p, r_i(p))$ è contenuto nell'insieme compatto R^i ed allora, è superiormente semicontinua per la proposizione 2.7.11. Quindi B_i è continua. Poiché la funzione di spesa f_i è continua, deduciamo dal teorema 2.7.8 che la multifunzione di domanda è superiormente semicontinua.

□

Notiamo che la funzione di reddito $r_i = \sigma^\sharp(Y(i); \cdot\,)$ è continua su P ogni volta che $Y(i) = Y_0(i) - \mathbf{R}^l_+$ e che $Y_0(i)$ è compatto. Otteniamo perciò il seguente risultato di esistenza.

Proposizione 4.4.3 *Supponiamo che*
$$\begin{cases} (i) & \text{i sottoinsiemi di consumo } R^i \text{ siano compatti e convessi,} \\ (ii) & Y(i) = Y_0(i) - \boldsymbol{R}^l_+ \text{ dove } Y_0(i) \text{ compatto,} \end{cases} \tag{4.4.2}$$
le funzioni di spesa $f_i : R^i \times P \to \boldsymbol{R}$ sono continue e convesse rispetto a x^i, e
$$\forall i, \quad 0 \in R^i - IntY(i). \tag{4.4.3}$$
Allora esiste un pre-equilibrio di Walras.

Dim. Questa proposizione è una conseguenza diretta del teorema 4.3.1 e della proposizione 4.4.2, poiché (4.4.3) implica l'esistenza di $\tilde{x}^i \in R^i$ tale che $\langle p, \tilde{x}^i \rangle < r_i(p)$ per ogni $p \in P$. □

Si dice che un'economia $\{R^i, Y(i), f_i\}$ che soddisfa la condizione (4.4.2) è un'**economia compatta**. Il problema è se qualche economia sia equivalente ad un'economia compatta nel senso che i sottoinsiemi degli equilibri di Walras coincidono.

Supponiamo che la mappa

$$\{x^1, \cdots, x^n, y\} \in \prod_{i=1}^{n} R^i \times Y \mapsto \sum_{i=1}^{n} x^i - y \in \mathbf{R}^l \tag{4.4.4}$$

sia propria. Allora il sottoinsieme

$$X(N) = \{x \in \prod_{i=1}^{n} R^i : \sum_{i=1}^{n} x^i \in Y\}$$

è compatto. Perciò, le proiezioni $\pi_i X(N)$ di $X(N)$ negli spazi quoziente R^i sono compatte.
Se B è una palla chiusa di raggio positivo, allora $\pi_i X(N) + B$ è anche compatto. Definiamo

$$\begin{cases} \tilde{R}^i = R^i \cap (\pi_i X(N) + B); & \tilde{Y}_0(i) = Y(i) \cap (\pi_i X(N) + B); \\ \tilde{Y}(i) = \tilde{Y}_0(i) - \mathbf{R}^l_+; & \tilde{Y} = \sum_{i \in N} \tilde{Y}(i) \subset Y \cap \sum_{i \in N} (\pi_i X(N) + B). \end{cases}$$

Definizione 4.4.4 *Supponiamo che valga 4.4.4. Si dice allora che* $\{\tilde{R}^i, \tilde{Y}(i), f_i\}_{i \in N}$ *è l'**economia compattificata** di* $\{R^i, Y(i), f_i\}_{i \in N}$*. Denotiamo gli **insiemi di bilancio compattificati** con*

$$\tilde{B}_i(p, r) = \{x \in \tilde{R}^i : \langle p, x \rangle \leqslant r\}$$

*e i **sottoinsiemi di domanda compattificati** con*

$$\tilde{D}_i(p, r) = \{x \in \tilde{B}_i(p, r) : f_i(x, p) = \min_{y \in \tilde{B}_i(p,r)} f_i(y, p)\}.$$

*Le **funzioni di reddito compattificate***

$$\tilde{r}_i(p) = \sigma^\sharp(\tilde{Y}(i); p) \leqslant r_i(p)$$

sono continue poiché $\tilde{Y}_0(i)$ è compatto per ogni $i \in N$.

È chiaro che ogni pre-equilibrio di Walras $\{\bar{x}, \bar{p}\} \in \prod_{i=1}^{n} R^i \times P$ dell'economia $\{X^i, Y(i), f_i\}_{i \in N}$ è un pre-equilibrio di Walras dell'economia compattificata.

Proposizione 4.4.5 *Supponiamo che valga la proprietà 4.4.4 e che i sottoinsiemi R^i, $Y(i)$ e le funzioni di spesa $x^i \mapsto f_i(x^i, p)$ siano convessi. Allora ogni equilibrio di Walras dell'economia compattificata $\{\tilde{R}^i, \tilde{Y}(i), f_i\}_{i\in N}$ è un equilibrio di Walras dell'economia iniziale $\{R^i, Y(i), f_i\}_{i\in N}$.*

Dim. Sia $\{\bar{x}^1, \cdots, \bar{x}^n, \bar{p}\}$ un equilibrio di Walras dell'economia compattificata. Allora $\bar{x}^i \in \tilde{R}^i \subset R^i$ per ogni i e $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \bar{x}^i \in \tilde{Y} \subset Y$. Allora $\bar{x} \in X(N)$. Ciò implica che

$$\forall i \in N, \quad \bar{x}^i \in \pi_i X(N).$$

Sappiamo inoltre che $\langle \bar{p}, \bar{y} \rangle = \tilde{r}(\bar{p})$.

1. Dimostriamo che $\langle \bar{p}, \bar{y} \rangle = r(\bar{p})$. Se è falso, esiste $y \in Y$ tale che $\langle \bar{p}, y \rangle > \langle \bar{p}, \bar{y} \rangle$. Sia $y_\vartheta = (1-\vartheta)\bar{y} + \vartheta y$. Poiché Y è convesso e $\bar{y} \in Y$, ne segue che $y_\vartheta \in Y$. Poiché $y = \sum_{i\in N} y^i$ dove $y^i \in Y(i)$ e $\bar{x}^i \in \pi_i X(N)$, $\bar{x}^i + \vartheta(y^i - \bar{x}^i) \in Y(i) \cap (\pi_i X(N) + B) = \tilde{Y}_0(i)$ per ϑ abbastanza piccolo. Quindi $y_\vartheta = \sum_{i\in N}(\bar{x}^i + \vartheta(y^i - \bar{x}^i)) \in \tilde{Y}$. D'altra parte, $\langle \bar{p}, y_\vartheta \rangle = (1-\vartheta)\langle \bar{p}, \bar{y} \rangle + \vartheta \langle \bar{p}, y \rangle > \langle \bar{p}, \bar{y} \rangle$. Ciò è in contraddizione col fatto che $\langle \bar{p}, \bar{y} \rangle$ massimizza $\langle \bar{p}, \cdot \rangle$ su $\tilde{Y}$ (cioè che $\langle \bar{p}, \bar{y} \rangle = \tilde{r}(\bar{p})$).

2. Deduciamo che per ogni $i \in N, r_i(\bar{p}) = \tilde{r}_i(\bar{p})$. Poiché $\langle \bar{p}, \bar{x}^i \rangle \leqslant \tilde{r}_i(\bar{p})$ e $\langle \bar{p}, \bar{y} \rangle \leqslant \tilde{r}(\bar{p}) = r(\bar{p}) = \sum_{i=1}^n r_i(\bar{p})$, otteniamo che

$$\sum_{i=1}^n (\tilde{r}_i(\bar{p}) - r_i(\bar{p})) = 0.$$

   Ma $\tilde{r}_i(\bar{p}) \leqslant r_i(\bar{p})$ per ogni i. Ciò implica che $\tilde{r}_i(\bar{p}) = r_i(\bar{p})$ per ogni i.

3. Perciò $\bar{x}^i \in \tilde{D}^i(\bar{p}, r_i(\bar{p})) = \tilde{D}^i(\bar{p}, \tilde{r}_i(\bar{p}))$. Resta da provare che $\bar{x}^i$ appartiene a $D_i(\bar{p}, r_i(\bar{p}))$.
   Supponiamo per assurdo che $\bar{x}^i \notin D^i(\bar{p}, r_i(\bar{p}))$.
   Allora esiste $x^i \in D^i(\bar{p}, r_i(\bar{p}))$ tale che

$$f_i(x^i, \bar{p}) < f_i(\bar{x}^i, \bar{p}).$$

   Perciò, per ogni $\vartheta \in]0,1[$, $x^i_\vartheta = (1-\vartheta)\bar{x}^i + \vartheta x^i$ soddisfa il limite di bilancio $\langle \bar{p}, x^i_\vartheta \rangle \leqslant r_i(\bar{p})$.
   Per ϑ abbastanza piccolo, x^i_ϑ appartiene a $\pi_i X(N) + B$ perché $\bar{x}^i \in \pi_i X(N)$. Poiché x^i e $\bar{x}^i$ appartengono all'insieme convesso R^i, anche x^i_ϑ appartiene a R^i. Perciò $x^i_\vartheta \in \tilde{B}_i(\bar{p}, r_i(\bar{p}))$ per ϑ abbastanza piccolo. Ma, poiché f_i è convesso rispetto a x^i, se ne deduce la seguente contraddizione

$$f_i(x^i_\vartheta, p) \leqslant (1-\vartheta) f_i(\bar{x}^i, \bar{p}) + \vartheta f_i(x^i, \bar{p}) < f_i(\bar{x}^i, \bar{p}).$$

□

Proposizione 4.4.6 *Supponiamo che valga 4.4.4. Se la proprietà*

$$\forall i \in N, \quad 0 \in R^i - IntY(i)$$

vale nell'economia originale, allora vale anche nell'economia compattificata, cioè

$$\forall i \in N, \quad 0 \in \tilde{R}^i - Int\tilde{Y}(i). \tag{4.4.5}$$

Dim. La proprietà 4.4.5, significa che, per ogni i, esiste $\tilde{x}^i \in R^i \cap IntY(i) \subset R^i \cap Y(i)$. Allora $\sum_{i=1}^n \tilde{x}^i \in Y$, cioè $\tilde{x} = (\tilde{x}^1, \cdots, \tilde{x}^n) \in X(N)$. Ciò implica che $\tilde{x}^i \in \pi_i X(N)$. Quindi $\tilde{x}^i \in \tilde{R}^i$. D'altra parte, $\tilde{x}^i + B(\eta) \subset Y(i)$ dove $B(\eta)$ è una palla con raggio η abbastanza piccolo. Poiché $\tilde{x}^i + B(\eta) \subset \pi_i X(N) + B$ se η è abbastanza piccolo, allora $\tilde{x}^i + B(\eta) \subset \tilde{Y}(i)$, cioè $\tilde{x}^i$ è interno a $\tilde{Y}^i$. □

La dimostrazione dell'esistenza di un equilibrio di Walras necessita ancora di una proprietà sulla non saziabilità. Ricordiamone a tal fine la definizione:

Definizione 4.4.7 *Diremo che $f : U \to]-\infty, +\infty]$ ha la proprietà di* ***non saziabilità*** *se*

$$\forall x \in Domf, \ \exists \xi \in Domf \ : \ f(\xi) < f(x).$$

Proposizione 4.4.8 *Supponiamo che $f : U \to]-\infty, +\infty]$ sia convesso e che abbia la proprietà di non saziabilità. Se $\bar{x}$ minimizza f su X, allora $\bar{x}$ appartiene alla frontiera di X.*

Dim. Supponiamo per assurdo che $\bar{x}$ appartenga alla parte interna di X. Sia $\xi \in Dom\, f$ tale che $f(\xi) < f(\bar{x})$. Poiché $\bar{x} \in Int\, X$, esiste $\vartheta > 0$ abbastanza piccolo tale che $y = \bar{x} + \vartheta(\xi - \bar{x}) = (1-\vartheta)\bar{x} + \vartheta\xi \in X$. La contraddizione segue da

$$\begin{aligned} f(y) &= f((1-\vartheta)\bar{x} + \vartheta\xi) \leqslant (1-\vartheta)f(\bar{x}) + \vartheta f(\xi) \\ &< (1-\vartheta)f(\bar{x}) + \vartheta f(\bar{x}) = f(\bar{x}). \end{aligned}$$

□

Le ipotesi 1, 2, 4 (i) del teorema 4.4.1, 4.4.4 e la proposizione 4.4.5 implicano che possiamo sostituire l'economia iniziale $\{R^i, Y(i), f_i\}$ con l'economia compattificata $\{\tilde{R}^i, \tilde{Y}(i), f_i\}$. Le ipotesi 3 e 4 del teorema 4.4.1 e la proposizione 4.4.3 implicano l'esistenza di un pre-equilibrio di Walras dell'economia compattificata $\{\tilde{R}^i, \tilde{Y}(i), f_i\}$.

Le ipotesi 4 e 5 del teorema 4.4.1 implicano che $\bar{x}^i \in D_i(\bar{x}, \tilde{r}_i(\bar{p}))$ soddisfa $\langle \bar{p}, \bar{x}^i \rangle = r_i(\bar{p})$ per la proposizione 4.4.8.
Esiste quindi un equilibrio di Walras dell'economia compattificata, che è un equilibrio di Walras dell'economia iniziale per la proposizione 4.4.5.
Ciò conclude la dimostrazione del teorema 4.4.1.

$\square$

Bibliografia

[1] Paolo Acquistapace, *Appunti di analisi convessa*, 2009, http://www.dm.unipi.it/ acquistp/mate.html.

[2] Kim C. Aliprantis, Charalambos D.-Border, *Infinite dimensional analysis: a hitchhiker's guide*, Studies in economic theory, vol. 4, Springer, Berlin, 1999.

[3] Jean-Pierre Aubin, *Mathematical methods of game and economic theory*, Studies in Mathematics and its Applications, vol. 7, North-Holland, Amsterdam, 1979.

[4] Isaac Kelley, John L.-Namioka, *Linear topological spaces*, The University series in higher mathematics, Van Nostrand, Princeton, New Jersey, 1963.