# Compitini di Analisi in più variabili 3 - 2010-11

## Compitino del 15 dicembre 2010

**Esercizio 1** Risolvere il problema di Cauchy-Dirichlet

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + u(x,t) = e^{-t}\sin x, & x \in ]0,\pi[\,, \quad t > 0 \\ u(x,0) = \pi x - x^2, & x \in [0,\pi] \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

**Esercizio 2** Sia $f \in L^1(-\pi,\pi)$. Si provi che $f$ è dispari se e solo se

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, t^{2n}\, dt = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

**Esercizio 3** Fissata $g \in L^1(\mathbb{R}^N)$ tale che $\|g\|_1 \leq 1$, si definisca

$$g_1 = g, \qquad g_{n+1} = g_n \star g \quad \forall n \in \mathbb{N}^+.$$

**(i)** Si verifichi che $\|g_{n+1}\|_1 \leq \|g_n\|_1$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$.

**(ii)** Si provi che se $\|g\|_1 < 1$, allora $g_n \to 0$ in $L^1(\mathbb{R}^N)$.

**(iii)** Si mostri che se esiste $h \in L^1(\mathbb{R}^N)$ tale che $g_n \to h$ in $L^1(\mathbb{R}^N)$, allora $h = 0$.

**(iv)** Si analizzi il caso in cui $N = 1$ e $g(x) = \chi_{[0,\infty[}(x)\, e^{-x}$.

**Esercizio 4** Calcolare la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = \frac{1}{x^4 + 4}\,, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

### Risoluzione

**Esercizio 1** Cerchiamo la soluzione nella forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\, \sin nx,$$

scelta giustificata dalle condizioni $u(0,t)=u(\pi,t)=0$. Supponendo di poter derivare la serie termine a termine, sostituendo nell'equazione differenziale si trova

$$\sum_{n=1}^{\infty}[u_n'(t)+n^2u_n(t)+u_n(t)]\sin nx = e^{-t}\sin x;$$

dunque deve essere

$$\begin{cases} u_n'(t)+(n^2+1)u_n(t)=0 & \text{per } n\geq 2,\\ u_1'(t)+2u_1(t)=e^{-t} & \text{per } n=1. \end{cases}$$

Inoltre per $t=0$ si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(0)\,\sin nx = \pi x - x^2;$$

dunque deve aversi

$$u_n(0)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi x - x^2)\sin nx\,dx \qquad \forall n\in\mathbb{N}^+.$$

Con tre integrazioni per parti, si ricava allora

$$u_n(0)=\frac{4}{\pi n^3}[1-(-1)^n]=\begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è pari}\\ \frac{8}{\pi n^3} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases} \qquad \forall n\in\mathbb{N}^+.$$

Pertanto si hanno i problemi di Cauchy

$$\begin{cases} u_n'(t)+(n^2+1)u_n(t)=0\\ u_n(0)=0 \end{cases} \qquad \text{se } n \text{ è pari},$$

$$\begin{cases} u_n'(t)+(n^2+1)u_n(t)=0\\ u_n(0)=\frac{8}{\pi n^3} \end{cases} \qquad \text{se } n>1 \text{ è dispari},$$

$$\begin{cases} u_1'(t)+2u_1(t)=0\\ u_n(0)=\frac{8}{\pi} \end{cases} \qquad \text{se } n=1.$$

Risolvendo i problemi si conclude che

$$u_n(t)=\begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è pari}\\ \frac{8}{\pi n^3}\,e^{-(n^2+1)t} & \text{se } n>1 \text{ è dispari}\\ \frac{8}{\pi}\,e^{-2t}+e^{-2t}(e^t-1) & \text{se } n=1. \end{cases}$$

Dunque

$$u(x,t) = \left[\frac{8}{\pi}\, e^{-2t} + e^{-2t}(e^t - 1)\right] \sin x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-(4k^2+4k+1)t}}{\pi(2k+1)^2}\, \sin(2k+1)x.$$

Questa serie converge uniformemente in $[0,\pi] \times [0,\infty[$ e le sue derivate convergono uniformemente in $[0,\pi] \times [\delta,\infty[$ per ogni $\delta > 0$. Ne consegue che $u$ è davvero (l'unica) soluzione del problema.

**Esercizio 2** Se $f$ è dispari, ovviamente tutti gli integrali considerati sono nulli, poiché si integra una funzione dispari su un intervallo simmetrico rispetto all'origine.

Viceversa, sia $f$ una funzione $2\pi$-periodica e sommabile in $[-\pi,\pi]$ tale che tutti gli integrali considerati siano nulli. Allora si ha anche

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(-t)\, t^{2n}\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(u)\, u^{2n}\, du = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

da cui

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(t) + f(-t)]\, t^{2n}\, dt = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

D'altra parte la funzione $t \mapsto [f(t) + f(-t)]$, essendo pari, verifica anche

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(t) + f(-t)]\, t^{2n+1}\, dt = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

ossia

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(t) + f(-t)]\, t^{k}\, dt = 0 \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Ma è noto che ciò implica $f(t) + f(-t) = 0$ q.o., ossia $f(t) = -f(-t)$ q.o. in $\mathbb{R}$. Dunque $f$ è dispari.

**Esercizio 3 (i)** Ovviamente, essendo $\|g\|_1 \le 1$,

$$\|g_{n+1}\|_1 = \|g \star g_n\|_1 \le \|g\|_1 \|g_n\|_1 \le \|g_n\|_1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^+.$$

**(ii)** Se $\|g\|_1 < 1$, iterando la stima precedente troviamo

$$\|g_n\|_1 \le \|g\|_1 \|g_{n-1}\|_1 \le \|g\|_1^2 \|g_{n-2}\|_1 \le \cdots \|g_1\|_1^n \to 0 \quad \text{per } n \to \infty.$$

**(iii)** Supponiamo che $g_n \to h$ in $L^1(\mathbb{R}^N)$. Allora si ha anche

$$\|\widehat{g_n} - \widehat{h}\|_\infty \le \|g_n - h\|_1 \to 0,$$

quindi $\widehat{g_n}(\xi) = \widehat{g}(\xi)^n \to \widehat{h}(\xi)$ uniformemente in $\mathbb{R}$. D'altra parte, il limite di $\widehat{g}(\xi)^n$ può essere soltanto 0 o 1; quindi la funzione continua $\widehat{h}$ può assumere solo i valori 0 e 1. Per il teorema dei valori intermedi, si ha allora $\widehat{h} \equiv 0$ oppure $\widehat{h} \equiv 1$; ma la prima eventualità è impossibile perché $\widehat{h}(\xi)$ deve tendere a 0 per $|\xi| \to \infty$. Ne segue $\widehat{h} \equiv 0$ e quindi, per l'iniettività della trasformata di Fourier, si ottiene $h = 0$ q.o. come richiesto.

**(iv)** Se $N = 1$ e $g(x) = \chi_{[0,\infty[}(x) \frac{x^n}{n!} e^{-x}$, allora per $x > 0$ si ha

$$g_2(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x-y)g(y)\,dy = \int_0^x e^{-x+y}e^{-y}\,dy = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\,e^{-x},$$

mentre per $x \leq 0$ risulta $\chi_{[0,\infty[}(x-y)\chi_{[0,\infty[}(y) = 0$ per ogni $y \in \mathbb{R}$ e dunque $g_2(x) = 0$. Pertanto

$$g_2(x) = \chi_{[0,\infty[}(x)\,x\,e^{-x}.$$

Per induzione, se $g_{n-1}(x) = \chi_{[0,\infty[}(x)\,\frac{x^n}{n!}\,e^{-x}$, allora analogamente per $x > 0$ si ha

$$g_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x-y)g_{n-1}(y)\,dy = \int_0^x e^{x+y}\,\frac{y^n}{n!}\,e^{-y}\,dy = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\,e^{-x},$$

mentre per $x \leq 0$, come prima, $g_n(x) = 0$. Ciò prova il passo induttivo. In definitiva

$$g_n(x) = \chi_{[0,\infty[}(x)\,\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\,e^{-x} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Si noti che

$$\|g_n\|_1 = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^+, \qquad \lim_{n\to\infty} g_n(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

quindi se esistesse $h \in L^1(\mathbb{R})$ tale che $\|g_n - h\|_1 \to 0$, avremmo $\|h\|_1 = 1$. D'altra parte, da (iii) segue invece $h = 0$, il che porta ad una contraddizione. Si conclude che la successione $\{g_n\}$ non converge in $L^1(\mathbb{R})$.

**Esercizio 4** Anzitutto,

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ix\xi}}{(x^2+2i)(x^2-2i)}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f_\xi(x)\,dx,$$

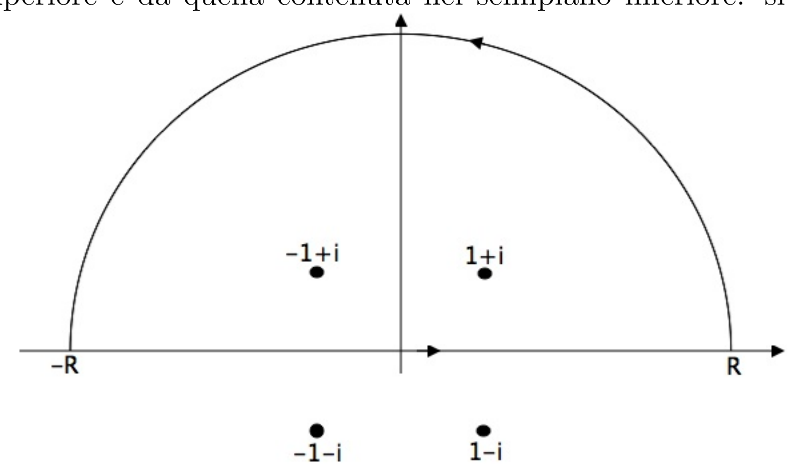
ove

$$f_\xi(x) = \frac{e^{-ix\xi}}{(z+1+i)(z-1+i)(z+1-i)(z-1-i)}\,.$$

Questa funzione è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{z_j\}_{1\le j\le 4}$ , ove

$$z_1 = -1 + i, \quad z_2 = \overline{z_1} = -1 - i, \quad z_3 = 1 + i, \quad z_4 = \overline{z_3} = 1 - i.$$

Andiamo a calcolare $\widehat{f}(\xi)$ utilizzando il teorema dei residui. A questo proposito indichiamo con $\gamma_R^+$ e $\gamma_R^-$ le due curve chiuse costituite rispettivamente dalla frontiera della semicirconferenza di raggio $R$ contenuta nel semipiano superiore e da quella contenuta nel semipiano inferiore: si ha allora




$$\int_{\gamma_R^+} f_\xi(z)\, dz = 2\pi i\, [\mathrm{Res}(f_\xi, z_1) + \mathrm{Res}(f_\xi, z_3)],$$

$$\int_{\gamma_R^-} f_\xi(z)\, dz = 2\pi i\, [\mathrm{Res}(f_\xi, z_2) + \mathrm{Res}(f_\xi, z_4)].$$

La scelta di integrare su una curva o sull'altra dipende dal segno di $\xi$: ad esempio, per $\xi < 0$, posto $z = R\, e^{i\vartheta}$, si ha

$$e^{-iz\xi} = e^{-iR\cos\vartheta}\, e^{\xi R \sin\vartheta},$$

e dunque, affinché l'esponenziale non diverga, dobbiamo scegliere la semicirconferenza $\gamma_R^+$ lungo la quale è $\sin\vartheta \ge 0$.
Notiamo però che, dal momento che $f$ è una funzione pari, anche $\widehat{f}$ sarà una funzione pari, e quindi possiamo limitarci a calcolare $\widehat{f}(\xi)$ per $\xi < 0$.
Consideriamo dunque $\gamma_R^+$ orientata positivamente. Risulta $\gamma_R^- = \varphi_R \cup \psi_R^-$, ove

$$\varphi_R(t) = t, \quad t \in [-R, R]; \qquad \psi_R^+(\vartheta) = R\, e^{i\vartheta}, \quad \vartheta \in [0, \pi].$$

Quindi

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_R^+} f_\xi(z)\,dz &= \int_{-R}^{R} f_\xi(t)\,dt + \int_0^\pi f_\xi(Re^{i\vartheta})\,i\,Re^{i\vartheta}\,d\vartheta = \\ &= 2\pi i[\mathrm{Res}(f_\xi, z_1) + \mathrm{Res}(f_\xi, z_3)],\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}&\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f_\xi(t)\,dt = \\ &\quad = -\lim_{R\to\infty}\int_0^\pi f_\xi(Re^{i\vartheta})\,i\,Re^{i\vartheta}\,d\vartheta + 2\pi i[\mathrm{Res}(f_\xi, z_1) + \mathrm{Res}(f_\xi, z_3)].\end{aligned}$$

Il limite a secondo membro vale 0, essendo

$$\left|\int_0^\pi f_\xi(Re^{i\vartheta})\,i\,Re^{i\vartheta}\,d\vartheta\right| \le \int_0^\pi \frac{R\,e^{\xi R\sin\vartheta}}{|R^4\,e^{4i\vartheta}+1|}\,d\vartheta \le \frac{\pi R}{R^4-1}\,.$$

D'altra parte

$$\begin{aligned}&2\pi i[\mathrm{Res}(f_\xi, z_1) + \mathrm{Res}(f_\xi, z_3)] = \\ &\quad = 2\pi i\left[\lim_{z\to z_1}(z-z_1)f_\xi(z) + \lim_{z\to z_3}(z-z_3)f_\xi(z)\right] = \\ &\quad = 2\pi i\left[\frac{e^{-i(-1+i)\xi}}{2i(-2+2i)(-2)} + \frac{e^{-i(1+i)\xi}}{2i(2+2i)(2)}\right] = \frac{\pi}{4}\,e^{\xi}\left[\frac{e^{i\xi}}{1-i} + \frac{e^{-i\xi}}{1+i}\right] = \\ &\quad = \frac{\pi}{4}\,e^{\xi}\,\mathrm{Re}\frac{e^{i\xi}}{1-\xi} = \frac{\pi}{4}\,e^{\xi}\,\mathrm{Re}[(1+i)e^{i\xi}] = \frac{\pi}{4}\,e^{\xi}(\cos\xi - \sin\xi).\end{aligned}$$

Se ne deduce che

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f_\xi(t)\,dt = \frac{\pi}{4}\,e^{\xi}(\cos\xi - \sin\xi) \qquad \forall \xi < 0,$$

e dunque, finalmente, essendo $\widehat{f}$ pari,

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{\pi}{4}\,e^{-|\xi|}(\cos\xi + \sin|\xi|) \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

## Compitino del 26 gennaio 2011

**Esercizio 1** Sia $N = 3$. Si definiscano il 2-covettore

$$\Omega = a\, e^{12} + b\, e^{13} + c\, e^{23}$$

e l'1-covettore non nullo

$$\omega = P\, e^1 + Q\, e^2 + R\, e^3.$$

Si provi che risulta $\Omega \wedge \omega = 0$ se e solo se esiste un 1-covettore

$$\eta = f\, e^1 + g\, e^2 + h\, e^3$$

tale che $\Omega = \eta \wedge \omega$.

**Esercizio 2** Sia $N = 4$. Si calcoli

$$*[(u^2\, dx + xz^3\, dy + zu\, dz + x^3 y\, du) \wedge d(y\, dx + z\, dy + u\, dz + x\, du)].$$

**Esercizio 3** Si consideri la varietà 2-dimensionale $V$ di $\mathbb{R}^3$, grafico della funzione

$$f(x, y) = \sin(x + y), \qquad (x, y) \in [0, \pi]^2.$$

Si calcoli

$$\int_{V^{\boldsymbol{\alpha}}} [(x - y)\, dx \wedge dy + z\, dx \wedge dz - dy \wedge dz],$$

ove $\boldsymbol{\alpha}$ è l'orientazione di $V$ per la quale il versore normale $\boldsymbol{\nu}$ a $V$ verifica in ogni punto $\nu^3(x, y) \geq 0$.

## Risoluzione

**Esercizio 1** Se $\Omega = \eta \wedge \omega$, allora

$$\Omega \wedge \omega = \eta \wedge \omega \wedge \omega = \eta \wedge (\omega \wedge \omega) = 0,$$

in quanto $\omega \wedge \omega = 0$ per ogni 1-forma.
Sia, viceversa, $\Omega \wedge \omega = (aR - bQ + cP)\, e^{123} = 0$: dunque $aR - bQ + cP = 0$. Per provare la tesi dobbiamo esibire una 1-forma $\eta = f\, e^1 + g\, e^2 + h\, e^3$ tale che $\Omega = \eta \wedge \omega$. Scriviamo in coordinate questa uguaglianza: essendo

$$\eta \wedge \omega = (fQ - gP)\, e^{12} + (fR - hP)\, e^{13} + (gR - hQ)\, e^{23},$$

deve valere il sistema
$$\begin{cases} a = fQ - gP \\ b = fR - hP \\ c = gR - hQ, \end{cases}$$
in cui le incognite sono $f, g, h$. Poiché, per ipotesi, $\omega$ è non nulla, possiamo supporre che ad esempio sia $P \neq 0$. In questo caso, possiamo ad esempio scegliere
$$f = 0, \qquad g = -\frac{a}{P}\,, \qquad h = -\frac{b}{P};$$
le prime due equazioni sono ovviamente soddisfatte, e anche la terza lo è, in quanto dall'ipotesi segue che
$$c = \frac{bQ}{P} - \frac{aR}{P} = -hQ + gR.$$
Pertanto la 1-forma cercata è
$$\eta = -\frac{a}{P}\,e^2 - \frac{b}{P}\,e^3,$$
e per essa, come è giusto, risulta
$$\begin{aligned} \eta \wedge \omega &= -a\,e^{21} - \frac{aR}{P}\,e^{23} - b\,e^{13} - \frac{bR}{P}\,e^{32} = \\ &= a\,e^{12} + b\,e^{13} - \left(\frac{aR}{P} + \frac{bR}{P}\right) e^{23} = a\,e^{12} + b\,e^{13} + c\,e^{23} = \Omega. \end{aligned}$$

**Esercizio 2** Si ha
$$\begin{aligned} d(y\,dx + z\,dy + u\,dz + x\,du) &= dy \wedge dx + dz \wedge dy + du \wedge dz + dx \wedge du = \\ &= -dx \wedge dy + dx \wedge du - dy \wedge dz - dz \wedge du, \end{aligned}$$
da cui
$$\begin{aligned} &(u^2\,dx + xz^3\,dy + zu\,dz + x^3y\,du) \wedge d(y\,dx + z\,dy + u\,dz + x\,du) = \\ &\quad = (u^2\,dx + xz^3\,dy + zu\,dz + x^3y\,du) \wedge \\ &\qquad \wedge(-dx \wedge dy + dx \wedge du - dy \wedge dz - dz \wedge du) = \\ &\quad = -u^2\,dx \wedge dy \wedge dz - u^2\,dx \wedge dz \wedge du - xz^3\,dx \wedge dy \wedge du - \\ &\qquad -xz^3\,dy \wedge dz \wedge du - zu\,dx \wedge dy \wedge dz - zu\,dx \wedge dz \wedge d - \\ &\qquad -x^3y\,dx \wedge dy \wedge du - x^3y\,dy \wedge dz \wedge du = \\ &\quad = -(u^2 + zu)\,dx \wedge dy \wedge dz - (xz^3 + x^3y)\,dx \wedge dy \wedge du - \\ &\qquad -(u^2 + zu)\,dx \wedge dz \wedge du - (xz^3 + x^3y)\,dy \wedge dz \wedge du. \end{aligned}$$

Pertanto

$$
\begin{aligned}
&*[(u^2\,dx + xz^3\,dy + zu\,dz + x^3y\,du)\wedge d(y\,dx + z\,dy + u\,dz + x\,du)] = \\
&\quad = *[-(u^2+zu)\,dx\wedge dy\wedge dz - (xz^3+x^3y)\,dx\wedge dy\wedge du - \\
&\qquad -(u^2+zu)\,dx\wedge dz\wedge du - (xz^3+x^3y)dy\wedge dz\wedge du] = \\
&\quad = -(xz^3+x^3y)\,dx + (u^2+zu)\,dy - (xz^3+x^3y)dz + (u^2+zu)du.
\end{aligned}
$$

**Esercizio 3** L'insieme $V$ è il grafico di una funzione di classe $C^\infty$, quindi è una varietà di classe $C^\infty$. Posto $\mathbf{g}(x,y) = (x, y, \sin(x+y))$, lo spazio tangente a $V$ è generato dai vettori

$$
\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cos(x+y) \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \sin(x+y) \end{pmatrix},
$$

cosicché una orientazione per $V$ è data da $\boldsymbol{\alpha}(x,y) = \frac{\mathbf{a}(x,y)}{|\mathbf{a}(x,y)3,2|}$, ove

$$
\mathbf{a}(x,y) = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x}(x,y)\wedge\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial y}(x,y) = e_{12} + cos(x+y)\,e_{13} - cos(x+y)\,e_{23}.
$$

Il vettore $\boldsymbol{\nu} = *\boldsymbol{\alpha}$ è un versore normale a $V$. Poiché

$$
\boldsymbol{\nu}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1+cos^2(x+y)}}[-\cos(x+y)\,\mathbf{e}_1 - \cos(x+y)\,\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3],
$$

risulta, come richiesto, $\nu^3(x,y) > 0$, e pertanto l'orientazione richiesta è proprio quella indotta dalla parametrizzazione $\mathbf{g}$. Troviamo allora, avendo posto $\omega = (x-y)\,e^{12} + z\,e^{13} - e^{23}$,

$$
\begin{aligned}
\int_{V^{\boldsymbol{\alpha}}} \omega &= \int_V \langle \omega, \boldsymbol{\alpha}\rangle^*_{3,2}\,d\mathbf{v}_2 = \\
&= \int_0^\pi\int_0^\pi [(x-y) + \sin(x+y)\cos(x+y) + \cos(x+y)]\,dxdy.
\end{aligned}
$$

Il contributo del primo addendo è nullo per simmetria. Il secondo addendo vale

$$
\int_0^\pi\int_0^\pi \sin(x+y)\cos(x+y)\,dxdy = \frac{1}{2}\int_0^\pi [\sin^2(x+\pi) - \sin^2 x]\,dx = 0,
$$

dato che la funzione $x \mapsto \sin^2 x$ è periodica di periodo $\pi$. Il terzo addendo invece dà

$$\int_0^\pi \int_0^\pi \cos(x+y)\,dxdy = \int_0^\pi [\sin(x+\pi) - \sin x]\,dx = -2\int_0^\pi \sin x\,dx = -4.$$

In conclusione

$$\int_{V^{\boldsymbol{\alpha}}} \omega = -4.$$