VARIABILI ALEATORIE

Negli esperimenti aleatori spesso non interessa il risultato puro e semplice dell'esperimento, ma piuttosto certe quantità numeriche che sono funzioni di tale risultato.

Ad esempio, nel lancio di due dadi spesso interessa la somma dei valori dei due dadi: l'eventualità che si realizza è $\{(h,k)\}$, con $1 \le h \le 6$, $1 \le k \le 6$, e la somma è la funzione

$$X(h,k) = h+k.$$

Definizione Su uno spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ si chiama variabile aleatoria (abbreviato: v.a.) ogni funzione $X: \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ per la quale risulti

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\} \in \mathcal{A} \quad \text{per ogni intervallo } A \subseteq \mathbb{R}.$$

Ricordando la definizione di funzione misurabile secondo Lebesgue in $\mathbb{R}^N$, vediamo che le v.a. non sono altro che funzioni da Ω (anziché $\mathbb{R}^N$) a $\overline{\mathbb{R}}$, misurabili rispetto alla tribù $\mathcal{A}$ (anziché la tribù dei misurabili $\mathcal{M}_N$)

Si può dimostrare che X è una v.a., secondo la definizione precedente, se e solo se risulta, più generalmente,

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\} \in \mathcal{A} \quad \text{per ogni boreliano } A \subseteq \mathbb{R}$$

Scriveremo più brevemente $\{X \in A\}$ in luogo di $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}$.

La probabilità di tale evento, $P(X\in A)$, si chiama "la probabilità che la v.a. X cada in A".

<u>Definizione</u> Sia X un'assegnata v.a. sullo spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. La <u>legge</u>, o <u>distribuzione, di X secondo P</u> è la funzione $A \longmapsto P(X\in A)$, che ad ogni $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ (boreliano di $\mathbb{R}$) associa la probabilità che X cada in A. Dunque la legge di X è una misura di probabilità su $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Per avere informazioni sulla legge di una data v.a., occorre sapere come essa si comporta sugli <u>intervalli</u> di $\mathbb{R}$, perchè ciò implicherà le stesse caratteristiche su ogni boreliano.

<u>Esempio</u> (Lancio di due dadi). Sia $X(h,k) = h+k$: come già osservato, X è la somma dei risultati dei due lanci. Lo spazio probabilizzato è $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, ove $\Omega = \{(h,k) : h,k\in\{1,2,3,4,5,6\}\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, P è la ripartizione uniforme. La X va da Ω a $\{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$, e la sua legge è nota se conosciamo i numeri $P(X=k)$, $k=2,3,\dots,12$. Si ha

$P(X=2) = P(X=12) = \frac{1}{36}$, $\quad P(X=3) = P(X=11) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$,

$P(X=4) = P(X=10) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$, $\quad P(X=5) = P(X=9) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$,

$P(X=6) = P(X=8) = \frac{5}{36}$, $\quad P(X=7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Se ci interessa conoscere $P(X \geq 9)$, si ha

$$P(X \geq 9) = P(X=9) + P(X=10) + P(X=11) + P(X=12) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}.$$

<u>Definizione</u> Due v.a. X, Y su $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ si dicono <u>indipendenti</u> se per ogni coppia di intervalli $I, J \subseteq \mathbb{R}$ gli eventi $\{X \in I\}$ e $\{Y \in J\}$ sono indipendenti; dunque, X e Y sono indipendenti se e solo se, per ogni I, J,

$$P(X \in I, Y \in J) = P(X \in I)\, P(Y \in J).$$

<u>Esempio</u> Nel lancio di due monete, in cui

$$\Omega = \{ (h,k) : h \in \{0,1\},\ k \in \{0,1\} \},$$

le v.a. $X(h,k) = h$, $Y(h,k) = k$ sono indipendenti: infatti esse sono completamente determinate dai quattro eventi

$$\{X=0\},\ \{X=1\},\ \{Y=0\},\ \{Y=1\},$$

e sappiamo già che uno qualunque dei primi 2 è indipendente da uno qualunque dei secondi 2.

Come vedremo, spesso nel seguito saranno più importanti le v.a. e le loro leggi, piuttosto che lo spazio probabilizzato sottostante. Per chiarire questo punto, immaginiamo un esperimento aleatorio in cui si abbiano 2 soli esiti possibili, vale a dire 0 – 1, testa o croce, pari o dispari, vincere o perdere. In questo caso, fissato $p \in]0,1[$, p sarà la "probabilità di

successo" e $q=1-p$ sarà la "probabilità d'insuccesso".
Si chiama <u>legge di Bernoulli di parametro p</u>, denotata con $\mathcal{B}(p)$, la legge di una v.a., definita su un opportuno spazio probabilizzato, che prende due soli valori: 1, con probabilità p, 0 con probabilità q. Qui, quello che conta è la legge, e non importa se 1 e 0 significano testa o croce, pari o dispari, sano o malato, eccetera.
A ben guardare, la legge di Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ è una funzione $L:\{0,1\} \to [0,1]$, definita (senza alcun riferimento alla probabilità) da

$$L(1)=p\,,\quad L(0)=q.$$

VARIABILI ALEATORIE DISCRETE, LEGGI DISCRETE

Le v.a. <u>bernoulliane</u> (cioè quelle che hanno legge di Bernoulli) sono il primo esempio di <u>v.a. discrete</u>, cioè che assumono un insieme finito (o numerabile) di valori. Sia $E \subset \mathbb{R}$ l'insieme di tali valori per una v.a. discreta X: poniamo

$$p_X(k) = P(X=k) \qquad \forall k \in E.$$

La funzione $p_X : E \to [0,1]$ è una densità discreta di probabilità su E, detta <u>densità discreta della legge di X</u>.
Essa assume un numero finito (o numerabile) di valori in $[0,1]$.

e verifica

$$\sum_{k\in E} p_X(k) = 1,$$

in quanto

$$\sum_{k\in E} p_X(k) = \sum_{k\in E} P(X=k) = P\Big(\bigcup_{k\in E}\{X=k\}\Big) = P(\Omega) = 1.$$

Vedremo adesso i principali esempi di leggi discrete. Come già accennato, non dobbiamo preoccuparci di determinare di volta in volta lo spazio probabilizzato sul quale è definita la v.a. dotata della legge che stiamo considerando: vi è infatti un teorema generale, del calcolo delle probabilità, che ci limitiamo ad enunciare, che garantisce sempre l'esistenza di un adeguato spazio probabilizzato. Infatti:

<u>Teorema</u> Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ un insieme finito o numerabile, e sia $L: E \to [0,1]$ una funzione tale che $\sum_{k\in E} L(k) = 1$. Allora esistono uno spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ed una v.a. discreta $X: \Omega \to E$ tali che L sia la legge di X secondo P, ossia

$$L(k) = P(X=k) \quad \forall k \in E.$$

<u>dim</u>. omessa. □

Dunque, per una v.a. X bernoulliana la densità discreta di X, con legge $\mathcal{B}(p)$, è

$$p_X(k) = \begin{cases} p & \text{se } k=1 \\ q & \text{se } k=0, \end{cases} \quad \text{ove } p,q \in [0,1] \text{ con } p+q=1.$$

<u>Legge binomiale</u>: se $n \in \mathbb{N}^+$ e $p \in]0,1[$, è la legge, detta $\mathcal{B}(n,p)$, di una v.a definita su $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, data da

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \quad k=0,1,\dots,n.$$

Per $n=1$, $\mathcal{B}(1,p) = \mathcal{B}(p)$ è la legge di Bernoulli. Per $n>1$, $\mathcal{B}(n,p)$ è la tipica legge di uno schema di <u>n prove ripetute e indipendenti</u>, ciascuna delle quali ha risultati 0 o 1 ottenuti con probabilità q o p. Allora $P(X=k)$ è la probabilità di ottenere k successi in n prove: p^k è la probabilità di k successi in k fissate prove su n, q^{n-k} è la probabilità di $n-k$ insuccessi nelle residue $n-k$ prove, $\binom{n}{k}$ è il numero dei modi in cui si possono fissare k prove su un insieme di n.

In effetti, se X_i è la v.a. definita da

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se l'i-sima prova ha dato risultato } 1 \\ 0 & \text{se l'i-sima prova ha dato risultato } 0, \end{cases}$$

allora $X_1, \dots, X_n$ sono bernoulliane di parametro p, mentre $X = X_1 + \dots + X_n$ è la v.a. che conta il n° di successi ed ha legge binomiale.

Esempio Si consideri una popolazione composta da due tipi di individui: quelli di tipo A (fumatori, oppure sani, oppure più alti di 180 cm) e quelli di tipo B (non fumatori, o malati, o più bassi di 180 cm).
Si supponga che la percentuale di individui di tipo A sia p, e quella degli altri sia dunque $1-p=q$.
Scegliamo a caso n individui e chiediamoci quanti di essi siano di tipo A. Poniamo $X_k=1$ se il k-simo individuo è di tipo A, $X_k=0$ altrimenti. Si può supporre che le X_k siano bernoulliane; quindi $X=X_1+\dots+X_n$ ha legge binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ e dunque la probabilità che k individui su n siano di tipo A è $\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$.
Il numero di individui di tipo B sarà dato dalla v.a. $Y=n-X$, che ha legge $\mathcal{B}(n,q)$, essendo somma delle n v.a. $Y_i=1-X_i$, bernoulliane di parametro q.

Legge geometrica Sia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ una successione (infinita) di v.a. indipendenti e bernoulliane di parametro p, definite su $(\Omega,\mathcal{A},P)$.
Possiamo pensare a $\{X_n\}$ come a una sequenza infinita di prove in cui i risultati sono solo 2 (successo e insuccesso).
Consideriamo la v.a T = istante di primo successo:

$$T(\omega) = \inf \{ n \in \mathbb{N}^+ : X_n(\omega) = 1 \},$$

con la convenzione che se, per un dato ω, l'insieme $\{n \in \mathbb{N}^+ : X_n(\omega) = 1\}$ è vuoto, cioè $X_n(\omega) = 0$ per ogni indice n, allora $T(\omega) = +\infty$. Allora T è una v.a. discreta a valori in $\mathbb{N}^+ \cup \{+\infty\}$: infatti, per ogni n si ha

$$\{T > n\} = \{X_i = 0 \text{ per } i = 1 \dots n\} = \bigcap_{i=1}^n \{X_i = 0\} \in \mathcal{A}.$$

Calcoliamo $P(T > n)$: poiché le X_i sono indipendenti e con legge $\mathcal{B}(p)$, si ha

$$P(T > n) = P\left(\bigcap_{i=1}^n \{X_i = 0\}\right) = \prod_{i=1}^n P(X_i = 0) = q^n;$$

inoltre

$$\{T = \infty\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^+} \{T > n\},$$

e poiché $\{T > n\} \supseteq \{T > n+1\}$, si ha

$$P(T = \infty) = \lim_{n \to \infty} P(T > n) = \lim_{n \to \infty} q^n = 0,$$

cioè $\{T = \infty\}$ è trascurabile, ovvero quasi certamente vi sarà almeno un successo, prima o poi. Inoltre, osservato che $\{T = n\} = \{T > n-1\} \setminus \{T > n\}$, si ha

$$P(T = n) = P(T > n-1) - P(T > n) = q^{n-1} - q^n = p q^{n-1}.$$

La legge di T si chiama <u>legge geometrica</u> di parametro p, si denota con $\mathcal{G}(p)$ e rappresenta, come si è detto, la legge dell'istante di primo successo in una sequenza infinita di prove indipendenti.

Una proprietà importante della legge geometrica $\mathcal{G}(p)$ è l'<u>assenza di memoria</u>. Per spiegare questa proprietà, sia T, come prima, l'istante di primo successo: l'evento $H=\{T>n\}$ è il "ritardo di n estrazioni nell'apparizione del 1° successo". La v.a $T-n$, dentro H, rappresenta dunque il tempo residuo da attendere per ottenere il 1° successo, dopo i primi n tentativi vani. Calcoliamo la legge di $T-n$ secondo la probabilità condizionale P_H: se $k\geq 1$,

$$P(\{T-n=k\}\mid H)=\frac{P(T-n=k,\ T>n)}{P(H)}=\frac{P(T=n+k)}{P(T>n)}=\frac{pq^{n+k-1}}{q^n}=$$
$$=pq^{k-1}=P(T=k).$$

Dunque, sotto la condizione di aver avuto n insuccessi, la legge del tempo residuo da attendere, a partire da n, per avere un successo è sempre la stessa, $\mathcal{G}(p)$, qualunque sia n, cioè comunque grande sia il ritardo.

<u>Legge di Poisson</u>: è la legge di una v.a. X, su $(\Omega,\mathcal{A},P)$, a valori in $\mathbb{N}$, con

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\quad k\in\mathbb{N},$$

ove $\lambda>0$ è un parametro. Essa si indica con $P(\lambda)$. La sua importanza sta nel fatto che, se n è grande e p è piccolo, la legge binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, scomoda da calcolare, è ben approssimata dalla legge di Poisson di parametro $\lambda = np$. Infatti se X è una v.a. con legge binomiale $\mathcal{B}(n,p) = B(n, \frac{\lambda}{n})$, si ha per $n \to \infty$

$$P(X=k) = \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\,\frac{\lambda^k}{n^k}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!}\,\frac{n(n-1)\cdots n-k+1}{n^k}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \to \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},$$

visto che

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} = 1.$$

<u>Esempio</u> Contiamo il n° di particelle α emesse da un materiale radioattivo in un determinato intervallo di tempo (1 secondo). Sappiamo che ciascun atomo ha una bassissima probabilità p di emettere particelle α, ma che in un grammo di materiale c'è un enorme numero di atomi ($N \cong 10^{24}$ per ogni mole). La v.a. che descrive il n° di decadimenti in un secondo ha legge binomiale $\mathcal{B}(N,p)$ e quindi, all'incirca, legge di Poisson $\mathcal{P}(Np)$. Se ad esempio, sperimentalmente si scopre che $\lambda = Np = 3,2$, allora si emettono k particelle α con probabilità $P(X=k) = e^{-3,2}\frac{(3,2)^k}{k!}$.