Indipendenza

In generale, $P(A|H) \leq P(A)$. Può però capitare che il realizzarsi dell'evento H non influisca sulla realizzabilità di A. Si ha allora:

Definizione Due eventi $A, B \in \mathcal{A}$ si dicono indipendenti (o che l'uno è indipendente dall'altro) se si ha

$$P(A \cap H) = P(A)P(H),$$

e dunque, sempre che H sia non trascurabile, $P(A|H) = P(A)$.

La proprietà di indipendenza è automaticamente verificata se H è trascurabile.

Proposizione Se A, H sono eventi indipendenti, allora anche A e H^c sono indipendenti.

dim. Dobbiamo mostrare che $P(A \cap H^c) = P(A)P(H^c)$. Essendo $A \cap H$ e $A \cap H^c$ disgiunti con unione A, si ha

$$P(A \cap H^c) = P(A) - P(A \cap H) =$$

$$= P(A) - P(A)P(H) =$$

$$= P(A)(1 - P(H)) = P(A)P(H^c). \quad \square$$

Esempio (lancio di 2 monete). Si ha

$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2) : \omega_1, \omega_2 \in \{0,1\}\}$, ove testa $= \{1\}$, croce $= \{0\}$,

$\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, $P =$ ripartizione uniforme su Ω.

Calcoliamo la probabilità che esca testa nel 1° lancio: è l'evento $A = \{(1,0), (1,1)\}$, e si ha

$$P(A) = \frac{\# A}{\# \Omega} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Similmente la probabilità che esce testa al 2° lancio è, con $B = \{(0,1), (1,1)\}$,

$$P(B) = \frac{\# B}{\# \Omega} = \frac{1}{2}.$$

Si riconosce subito che A e B sono indipendenti: infatti

$$P(A \cap B) = P(\{(1,1)\}) = \frac{1}{4} = P(A)\, P(B).$$

La definizione di indipendenza si generalizza a n eventi come segue:

<u>Definizione</u> Siano $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$. Diciamo che essi sono <u>indipendenti</u> se per ogni sottofamiglia $A_{n_1}, \dots, A_{n_k}$ con $1 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_r \leq n$ si ha

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{r} A_{n_k} \right) = \prod_{k=1}^{r} P(A_{n_k}).$$

<u>Osservazione</u> Per $n=3$, A, B, C sono eventi indipendenti se e solo se
$P(A \cap B) = P(A)P(B)$, $P(A \cap C) = P(A)P(C)$, $P(B \cap C) = P(B)P(C)$,
$$P(A \cap B \cap C) = P(A)\,P(B)\,P(C).$$

<u>Osservazione</u> Se A, B, C sono indipendenti allora A è indipendente da $B \cap C$, $B \setminus C$, $B \cup C$.

Infatti: $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C) = P(A)\,P(B\cap C)$;

$$P(A \cap (B \setminus C)) = P(A \cap B \cap C^c) = P(A)P(B)P(C^c) =$$
$$= P(A)\,P(B \cap C^c) = P(A)\,P(B \setminus C),$$

$$P(A \cap (B \cup C)) = P((A \cap B) \cup (A \cap C)) =$$
$$= P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C) =$$
$$= P(A)P(B) + P(A)P(C) - P(A)P(B)P(C) =$$
$$= P(A)\left[P(B) + P(C) - P(B \cap C)\right] =$$
$$= P(A)\,P(B \cup C).$$

<u>Esempio</u> Un sistema formato da n componenti distinti è <u>in parallelo</u> quando funziona se e solo se funziona almeno uno dei componenti. Se il j-simo componente funziona con probabilità p_j, indipendentemente dagli altri, qual'è la probabilità che il sistema funzioni?

Sia A_j l'evento "il j-simo componente funziona". Allora $P(A_j) = p_j$, e gli eventi A_j sono fra loro indipendenti. Perciò, l'evento "il sistema funziona" $= \bigcup_{j=1}^{n} A_j$ ha probabilità

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = 1 - P\left(\bigcap_{j=1}^{n} A_j^c\right) = \text{(per indipendenza)}$$
$$= 1 - \prod_{j=1}^{n} P(A_j^c) = 1 - \prod_{j=1}^{n}\left[1 - P(A_j)\right] = 1 - \prod_{j=1}^{n}(1 - p_j).$$

Esercizi

- Un concorrente deve indovinare quale, tra tre carte coperte (un asso e due re), è l'asso. Egli sceglie la prima carta (senza scoprirla). Il presentatore del gioco, che sa dov'è l'asso, scopre una delle altre due carte, mostrando che è un re. La scelta è obbligata se l'asso è la seconda o terza carta, è fatta a caso se l'asso è la prima carta. A questo punto, viene chiesto al concorrente se voglia cambiare la sua scelta. Cosa gli conviene fare? Come cambia la situazione se il presentatore, nel caso in cui l'asso è la prima carta, sceglie di scoprire sempre la seconda?

Poniamo

$V_i =$ "l'asso è la carta i", $i=1,2,3$,

$A_j =$ "la carta che scopre il presentatore è la j", $j=2,3$.

Poichè $V_1 \cup V_2 \cup V_3 = \Omega$ e i V_i sono disgiunti, per la formula di disintegrazione si ha

$$P(A_2) = P(A_2|V_1)P(V_1) + P(A_2|V_2)P(V_2) + P(A_2|V_3)P(V_3);$$

ma $P(A_2|V_1) = \frac{1}{2}$, $P(A_2|V_2) = 0$, $P(A_2|V_3) = 1$, mentre $P(V_1) = \frac{1}{3}$, $P(V_2) = \frac{1}{3}$, $P(V_3) = 1/3$. Dunque risulta $P(A_2) = \frac{1}{2}$, e similmente $P(A_3) = \frac{1}{2}$. Allora per la formula di Bayes

$$P(V_1|A_2) = \frac{P(A_2|V_1)\,P(V_1)}{P(A_2)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3},$$

$$P(V_3|A_2) = \frac{P(A_2|V_3)\,P(V_1)}{P(A_2)} = \frac{1\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3},$$

e analogamente

$$P(V_1|A_3) = \frac{P(A_3|V_1)\,P(V_1)}{P(A_3)} = \frac{\frac{1}{2}\,\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3},$$

$$P(V_2|A_3) = \frac{P(A_3|V_2)\,P(V_2)}{P(A_3)} = \frac{1\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Dunque al concorrente conviene cambiare scelta.

Nella seconda situazione invece si ha

$$P(A_2|V_1) = 1,\quad P(A_2|V_2) = 0,\quad P(A_2|V_3) = 1,$$
$$P(A_3|V_1) = 0,\quad P(A_3|V_2) = 1,\quad P(A_3|V_3) = 0,$$

quindi

$$P(A_2) = \frac{2}{3},\qquad P(A_3) = \frac{1}{3},$$

e dunque

$$P(V_1|A_2) = \frac{1\cdot\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2},\qquad P(V_3|A_2) = \frac{1\cdot\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}.$$

In questo caso cambiare carta è ininfluente.

- Tre prigionieri A, B, C sono in attesa dell'esecuzione di uno di loro, ad essi ignoto ma noto alla guardia che li sorveglia. Il prigioniero A chiede alla guardia di dirgli chi tra B e C si salverà, oppure, se entrambi saranno salvi, di riferirgli uno dei due nomi a caso. La guardia si rifiuta. Se la guardia invece acconsentisse, cambierebbe per A la probabilità di morire?

Siano A, B, C gli eventi "A muore", "B muore", "C muore". Se la guardia dicesse ad A che B si salva, si passerebbe da $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}$ a $P(A|B^c)$. Dalla formula di Bayes

$$P(A|B^c) = \frac{P(B^c|A)\,P(A)}{P(B^c)},$$

e siccome $P(B^c|A) = 1$, $P(B^c) = \frac{2}{3}$, ricaviamo $P(A|B^c) = \frac{1}{2}$.

- Si lancia una moneta equilibrata 8 volte. Qual è la probabilità che:
  (i) al quinto lancio esca testa,
  (ii) al terzo e quarto lancio esca testa,
  (iii) escano tante teste quante croci,
  (iv) esca testa nei lanci pari,
  (v) la prima testa esca al 5° lancio,
  (vi) escano almeno due teste. [Risposte: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{70}{256}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, $\frac{247}{256}$.]

- Da un mazzo ben mescolato di 40 carte se ne estraggono 8 in blocco. Si calcoli la probabilità che escano:

  (i) tre assi e 5 figure;

  (ii) tutte carte rosse.

  [Risposte: $\dfrac{\binom{4}{3}\binom{12}{5}}{\binom{40}{8}}$, $\dfrac{\binom{20}{8}}{\binom{40}{8}}$.]

- Da un'urna contenente 50 palline numerate da 1 a 50, se ne estraggono in sequenza 4, rimettendo ogni volta la pallina nell'urna. Si calcoli la probabilità che escano:

  (i) esattamente tre palline con numero >45;

  (ii) al più tre palline con numero <21;

  (iii) almeno tre palline con numero pari.

  [Risposte: $\binom{4}{3}\left(\frac{5}{50}\right)^3 \frac{45}{50}$, $1-\left(\frac{20}{50}\right)^4$, $\frac{5}{2^4}$]

- Un test di matematica è composto da 10 domande a cui si può rispondere SÌ o NO. Qual è la probabilità che, rispondendo a caso, si diano 6 risposte corrette?

  [Risposta: $\binom{10}{6}\frac{1}{2^{10}}$]

- Determinare la probabilità che il PIN di un bancomat:

  (i) contenga due 1, un 7 e due 3;

  (ii) abbia esattamente tre 0;

  (iii) abbia esattamente due cifre distinte;

  (iv) abbia le cifre tutte distinte;

(v) abbia come prodotto delle 5 cifre un numero pari.

[Risposte: $\frac{5!}{2!\,2!}\frac{1}{10^5}$; $\binom{5}{3}\frac{9^2}{10^5}$; $\frac{\binom{10}{2}\left[\binom{5}{2}+\binom{5}{1}\right]}{10^5}$ $\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{10^5}$; $1-\frac{1}{2^5}$]

- Una compagnia aerea ha 2 tipi di aereo: da 20 posti e da 10 posti. Si sa che un passeggero prenotato rinuncia al posto con probabilità $\frac{1}{10}$. La compagnia, di conseguenza, accetta 22 prenotazioni sui voli con 20 posti e 11 prenotazioni sui voli con 10 posti. In quale tipo di aereo è maggiore il rischio che un passeggero munito di prenotazione non trovi posto?

[Risposta: si rischia di restare a terra con probabilità $\left(\frac{9}{10}\right)^{22}+\binom{22}{1}\frac{9^{21}}{10^{22}}$ nel 1° caso, con probabilità $\frac{9^{11}}{10^{11}}$ nel 2° caso: 0.334 contro 0.314.]

- Un'urna contiene r palline rosse e b bianche. Si estrae una pallina che è messa da parte senza essere vista. Dopodiché si estrae una seconda pallina. Qual è la probabilità che questa sia bianca?

[Risposta: $\frac{b}{b+r}$]

- Si giocano al lotto i numeri 1, 17, 29, 65, 90. Qual è la probabilità di:
  (i) una cinquina,
  (ii) una quaterna,
  (iii) un terno,
  (iv) un ambo,
  (v) avere nessun numero estratto?

[Risposte: $1/\binom{90}{5}$, $5/\binom{90}{4}$, $\binom{5}{2}/\binom{90}{3}$, $\binom{5}{3}/\binom{90}{2}$, $\frac{85\cdot 84\cdot 83\cdot 82\cdot 81}{90\cdot 89\cdot 88\cdot 87\cdot 86}$.]