Risoluzione degli esercizi elencati alla fine di pag. 177

1. Sia $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$: poiché le f_k sono non negative,

$$S_n(x) \leq S_{n+1}(x) \quad \forall x \in D, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

ed inoltre

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \quad \forall x \in D.$$

Per il teorema di B. Levi,

$$\int_D \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)\,dx = \int_D \lim_{n\to\infty} S_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_D S_n(x)\,dx =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_D \sum_{k=0}^{n} f_k(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \int_D f_k(x)\,dx =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \int_D f_k(x)\,dx.$$

2. Poniamo

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x), \quad S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x),$$

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} |f_k(x)|, \quad T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} |f_k(x)|.$$

Per ipotesi si ha $\sum_{k=0}^{\infty} \int_D |f_k(x)|\,dx < \infty$; per l'esercizio 1,

$$\int_D T(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_D |f_k(x)|\,dx < \infty,$$

ossia T è sommabile in D. D'altra parte,

$$|S_n(x)| \le T_n(x) \le T(x) \quad \forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in D,$$

Inoltre

$$|S_n(x)-S(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\right| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| = T(x)-T_n(x);$$

poiché T è sommabile, deve essere $T(x)<\infty$ q.o., e dunque la serie $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ converge assolutamente per q.o. $x\in D$, da cui la serie converge per q.o. $x\in D$, cosicché $S(x)$ è ben definita e finita per q.o. $x\in D$. In definitiva

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x) \quad \text{q.o. in } D,$$

e per convergenza dominata

$$\lim_{n\to\infty}\int_D S_n(x)\,dx = \int_D S(x)\,dx,$$

ossia

$$\sum_{k=0}^{\infty}\int_D f_k(x)\,dx = \int_D \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)\,dx.$$

3. Si ha

$$\lim_{n\to\infty} |f(x)|^{\frac{1}{n}} = \begin{cases} 1 & \text{se } f(x)\in\mathbb{R}\setminus\{0\} \\ 0 & \text{se } f(x)=0 \\ +\infty & \text{se } f(x)=\pm\infty. \end{cases}$$

d'altra parte, essendo f sommabile in D,

$$m_N(\{f=\pm\infty\})=0.$$

Dunque

$$f(x)\longrightarrow I_{\{f\neq 0\}}(x) \quad \text{q.o. in } D;$$

d'altra parte

$$|f(x)|^{\frac{1}{n}}\leq \max\{|f(x)|,1\}$$

e questa funzione è sommabile in D, essendo $m_N(D)<\infty$.
Dal teorema di Lebesgue

$$\lim_{n\to\infty}\int_D |f(x)|^{\frac{1}{n}}\,dx=\int_{\{f\neq 0\}} 1\,dx = m_N(\{f\neq 0\}).$$

4. Si ha, per $x\in[0,1[$,

$$\frac{x^{p-1}}{1+x^q}=\sum_{k=0}^{\infty} x^{p-1}(-1)^k x^{qk}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{p+kq-1}.$$

La serie converge puntualmente e si ha

$$\left|\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{p+kq-1}\right|=x^{p-1}\cdot\left|\frac{1-(-1)^n x^{kq}}{1+x^q}\right|\leq x^{p-1}\cdot\frac{2}{1+x^q}\leq 2x^{p-1},$$

e la funzione $2x^{p-1}$ è sommabile in $[0,1]$. Ne segue

$$\int_0^1\frac{x^{p-1}}{1+x^q}\,dx=\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^1(-1)^k x^{p+kq-1}\,dx=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{p+kq}.$$

Nel caso $p=1,2,3$ e $q=1$ il primo membro si calcola esplicitamente.

Altri esercizi:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} \frac{(\sin x)^n}{2+(\sin x)^n}\,dx$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \int_B (1-x^2-y^2)^n\,dx\,dy$, ove $B=\{(x,y):\ x^2+y^2\leq 2\}$

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int_{-1}^{1} \frac{(1-x^2)^n}{n}\,dx$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^{1} \frac{|2x|^n}{1+(2x)^n}\,dx$

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \int_1^{e^3} \frac{n\ln x+x}{nx+x^2\ln x}\,dx$

6. $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^{\infty} \frac{x^{n+10}\sin e^{-nx}}{1+x^n}\,dx$

7. $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{|\sin x|^n}{x^\alpha}\,dx$ $(\alpha>1)$.

8. $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^{\infty} \frac{nxe^x-e^{2x}}{x^2e^x+ne^{3x}}\,dx$.