Esercizi

1. Trovare il massimo e il minimo di $f(x,y,z) = e^{-(x^2 - \frac{y^2}{2} + z^2)}$ sull'ellissoide "pieno"
$$E = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{4} + y^2 + 3z^2 \leq 1 \right\}.$$

2. Trovare i punti stazionari liberi e vincolati di $f(x,y,z) = x^2 - yz$ sulla sfera piena
$$S = \left\{ (x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \right\}$$
stabilendone la natura (massimo relativo, minimo relativo, sella).

3. Si verifichi che l'insieme
$$D = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{\sqrt{x^2 + \frac{y^2}{2}} - 1}{4} + z^2 = 1 \right\}$$
è chiuso e limitato, e si determini la massima e minima distanza dei punti di D dall'origine.

4. Sia $E = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 - (x-y)^2 = 1 \right\}$.
Posto $f(x,y) = (x-3y)^2$, si mostri che
$$\lim_{\substack{x^2+y^2 \to +\infty \\ (x,y) \in E}} f(x,y) = +\infty$$
e si determini il minimo di f in E.

Risoluzione

(1) Cerchiamo anzitutto i punti stazionari interni:

$$f_x = e^{-\left(x^2-\frac{y^2}{2}+z^2\right)}(-2x)$$

$$f_y = e^{-\left(x^2-\frac{y^2}{2}+z^2\right)}(y)$$

$$f_z = e^{-\left(x^2-\frac{y^2}{2}+z^2\right)}(-2z)$$

ed è chiaro che il gradiente di f si annulla solo nell'origine, ove

$$f(0,0,0)=1.$$

Cerchiamo i punti stazionari vincolati, col metodo dei moltiplicatori. Posto

$$L(x,y,z,\lambda)=e^{-\left(x^2-\frac{y^2}{2}+z^2\right)}+\lambda\left(\frac{x^2}{4}+y^2+3z^2-1\right),$$ si ha

$\nabla L = \underline{0}$ se e solo se

$$\begin{cases} -2x\, e^{-\left(x^2-\frac{y^2}{2}+z^2\right)}+\frac{\lambda}{2}x=0 \\ y\, e^{-\left(x^2-\frac{y^2}{2}+z^2\right)}+2\lambda y=0 \\ -2z\, e^{-\left(x^2-\frac{y^2}{2}+z^2\right)}+6\lambda z=0 \\ \frac{x^2}{4}+y^2+3z^2=1. \end{cases}$$

Indicando per brevità $e^{-\left(x^2-\frac{y^2}{2}+z^2\right)}$ con f, si ha equivalentemente

$$\begin{cases} x(\lambda-4f)=0 \\ y(2\lambda+f)=0 \\ z(3\lambda-f)=0 \\ \frac{x^2}{4}+y^2+3z^2=1 . \end{cases}$$

Se $\lambda=4f$, si ha necessariamente $z=y=0$, e dalla equazione del vincolo $x^2=4$. Quindi si trovano i due punti $(\pm 2,0,0)$, nei quali

$$f(\pm 2,0,0)=e^{-4}.$$

Se $\lambda=\frac{f}{3}$, allora necessariamente $x=y=0$, da cui $z^2=\frac{1}{3}$. Abbiamo i due punti $\left(0,0,\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, nei quali

$$f\left(0,0,\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=e^{-1/3}.$$

Se $\lambda=-\frac{f}{2}$, allora $x=z=0$ mentre $y^2=1$; così troviamo i punti $(0,\pm 1,0)$, dove

$$f(0,\pm 1,0)=e^{\frac{1}{2}}.$$

Infine, se $\lambda\neq 4f$, $\lambda\neq-\frac{f}{2}$ e $\lambda\neq\frac{f}{3}$, allora $x=y=z=0$ e il punto non appartiene al vincolo.

Confrontando tutti i valori si ottiene

$$\min_E f=f(\pm 2,0,0)=e^{-4},$$
$$\max_E f=f(0,\pm 1,0)=e^{1/2}.$$

2. Cerchiamo prima di tutto i punti stazionari di f interni a S:

$$\nabla f(x,y,z) = (2x, -z, -y),$$

quindi si ha l'unico punto stazionario

$$(0,0,0), \quad \text{con } f(0,0,0) = 0;$$

si tratta chiaramente di un punto di sella, dato che per $\varepsilon > 0$ si ha

$$f(\varepsilon,0,0) = \varepsilon^2 > 0, \quad f(0,\varepsilon,\varepsilon) = -\varepsilon^2 < 0.$$

Cerchiamo ora i punti stazionari vincolati di f sul bordo di S. Consideriamo la Lagrangiana

$$L(x,y,z,\lambda) = x^2 - yz + \lambda(x^2+y^2+z^2-1);$$

si ha

$$\nabla L(x,y,z,\lambda) = \underline{0}$$

se e solo se

$$\begin{cases} 2x + 2\lambda x = 0 \\ -z + 2\lambda y = 0 \\ -y + 2\lambda z = 0 \\ x^2+y^2+z^2 = 1, \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} x(1+\lambda) = 0 \\ 2\lambda y = z \\ 2\lambda z = y \\ x^2+y^2+z^2 = 1. \end{cases}$$

Se $x = 0$, allora deve essere $\lambda \neq 0$ e quindi si deduce $z \neq 0$, $y \neq 0$. Ne segue $\frac{z}{y} = \frac{y}{z} = 2\lambda$, da cui $\lambda = \pm\frac{1}{2}$ e $y = \pm z$; l'equazione del vincolo dice allora $2y^2 = 1$, ossia $y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Si hanno i punti $\pm\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $\pm\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, nei quali

$$f\left(\pm\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)=-\frac{1}{2},\quad f\left(\pm\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)=\frac{1}{2}.$$

Se $\lambda=-1$, allora la 2^a e 3^a equazione dicono $z=-2y$, $y=-2z$, il che implica $z=y=0$ e di conseguenza $x=\pm 1$. Si ha

$$f(\pm 1,0,0)=1.$$

Si vede subito che

$$\max_S f = f(\pm 1,0,0)=1,\quad \min_S f = f\left(\pm\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)=-\frac{1}{2},$$

e in particolare $(\pm 1,0,0)$ sono punti di massimo relativo di f su S, mentre $\pm\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ sono punti di minimo relativo di f su S. Invece $\pm\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ sono punti di sella: infatti, se $\varepsilon>0$, utilizzando lo sviluppo di Taylor di $\sqrt{1+t}$ per $t\to 0$, si vede con fatica che
$f\left(\pm\left(\varepsilon,\frac{1}{\sqrt{2}},-\sqrt{\frac{1}{2}-\varepsilon^2}\right)\right)>\frac{1}{2}$, $f\left(\pm\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}}-\varepsilon,-\sqrt{\frac{1}{2}-\sqrt{2}\varepsilon-\varepsilon^2}\right)\right)<\frac{1}{2}$ per ε piccolo.

3. Se $(x,y,z)\in D$, allora $\sqrt{x^2+\frac{y^2}{2}}+4z^2=5$.

Ciò mostra che $|x|$, $|y|$ e $|z|$ sono limitate. Dunque D è limitato. Inoltre D è chiuso perché è la curva di livello 1 di una funzione continua.

Dobbiamo calcolare $\max_D \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ e $\min_D \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

Per non avere troppe radici quadrate, scriviamo

$$D=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ 5-4z^2\geq 0,\ x^2+\frac{y^2}{2}=(5-4z^2)^2\right\},$$

e cerchiamo il massimo e il minimo su D di

$$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2.$$

Consideriamo la lagrangiana

$$L(x,y,z,\lambda)= x^2+y^2+z^2+\lambda\left(x^2+\frac{y^2}{2}-(5-4z^2)^2\right).$$

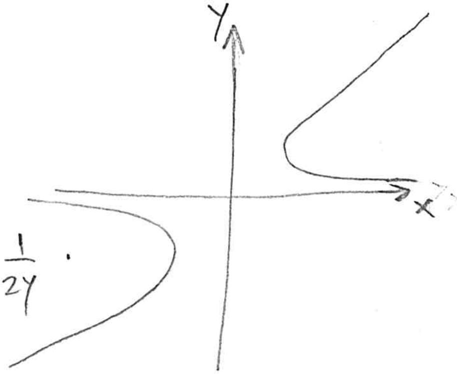
Si ha $\nabla L=\underline{0}$ se e solo se

$$\begin{cases} 2x+2\lambda x=0\\ 2y+\lambda y=0\\ 2z+16\lambda z(5-4z^2)=0\\ x^2+\frac{y^2}{2}=(5-4z^2)^2 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} x(1+\lambda)=0\\ y(2+\lambda)=0\\ z\left[1+8\lambda(5-4z^2)\right]=0\\ x^2+\frac{y^2}{2}=(5-4z^2)^2. \end{cases}$$

Se $\lambda=-1$, allora $y=0$ e $z(1-8(5-4z^2))=0$. Ne segue $z=0$ oppure $z^2=\frac{39}{32}$. Dunque $x^2=(5-4z^2)^2=25$ oppure $x^2=\frac{1}{64}$. Si hanno così i punti $(\pm\frac{1}{8},0,0)$ e $(\pm5,0,\frac{\sqrt{39}}{4\sqrt{2}})$, $(\pm5,0,-\frac{\sqrt{39}}{4\sqrt{2}})$.
In tali punti, $F(\pm\frac{1}{8},0,0)=\frac{1}{64}$, $F(\pm5,0,\pm\frac{\sqrt{39}}{4\sqrt{2}})=\frac{839}{32}$.
Se $\lambda=-2$, allora $x=0$ e $z(1-16(5-4z^2))=0$. Ne segue $z=0$ oppure $z^2=\frac{79}{64}$. Dunque $y^2=2(5-4z^2)^2=50$ oppure $y^2=\frac{1}{16}$. Si hanno così i punti $(0,\pm5\sqrt{2},0)$ e $(0,\pm\frac{1}{4},\frac{\sqrt{79}}{8})$, $(0,\pm\frac{1}{4},-\frac{\sqrt{79}}{8})$.
In tali punti, $F(0,\pm5\sqrt{2},0)=50$, $F(0,\pm\frac{1}{4},\pm\frac{\sqrt{79}}{8})=5$. Confrontando i valori si conclude che $\max_D F=50$, $\min_D F=\frac{1}{64}$, e quindi

$$\max_D \sqrt{x^2+y^2+z^2} = 5\sqrt{2}\,, \qquad \min_D \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{1}{8}.$$

4). Se $(x,y)\in E$, allora $y\neq 0$ e



$$\cancel{x^2} - y^2 - \cancel{x^2} + 2xy - y^2 = 1,$$

cioè

$$x = \frac{1+2y^2}{2y} = y + \frac{1}{2y}.$$

Dunque, se $(x,y)\in E$ e $x^2+y^2 \to +\infty$, allora

$$f(x,y) = (x-3y)^2 = x^2+9y^2-6xy = x^2+9y^2-3(1+2y^2) =$$

$$= x^2+3y^2-3 \geq x^2+y^2-3 \to +\infty.$$

Per trovare il minimo di f, consideriamo

$$L(x,y,\lambda) = (x-3y)^2 + \lambda\left(x^2-y^2-(x-y)^2-1\right).$$

Si ha $\nabla L = \underline{0}$ se e solo se

$$\begin{cases} 2(x-3y) + 2\lambda x - 2\lambda(x-y) = 0 \\ -6(x-3y) - 2\lambda y + 2\lambda(x-y) = 0 \\ x^2-y^2-(x-y)^2 = 1 \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} x-3y+\lambda y = 0 \\ -6x+18y-4\lambda y+2\lambda x = 0 \\ x^2-y^2-(x-y)^2 = 1. \end{cases}$$

Le prime due equazioni formano un sistema lineare omogeneo nelle due variabili x, y:

$$\begin{cases} x + (\lambda-3)y = 0 \\ (2\lambda-6)x + (18-4\lambda)y = 0 \end{cases}.$$

La soluzione $(0,0)$ non soddisfa la 3^a equazione: quindi deve essere

$$\det\begin{pmatrix} 1 & \lambda-3 \\ 2\lambda-6 & 18-4\lambda \end{pmatrix} = 0,$$

ossia

$$18-4\lambda - 2(\lambda-3)^2 = 0,$$

cioè

$$-\lambda^2 + 4\lambda = 0.$$

Ne segue $\lambda = 0$ oppure $\lambda = 4$. Per $\lambda = 0$ si ha $x = 3y$, e la 3^a equazione fornisce $12y^2 = 1$, cioè $y = \pm\frac{1}{2\sqrt{3}}$. Si hanno i punti stazionari vincolati $\pm\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$, nei quali

$$f\left(\pm\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)\right) = 0.$$

Se $\lambda = 4$, allora $x = -y$, e la 3^a equazione dà $-4y^2 = 1$, che non ha soluzioni. Si conclude allora che

$$\min_E f = f\left(\pm\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)\right) = 0.$$