Osservazione: La funzione

$$(*) \quad f(x)=\begin{cases} 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} & \text{se } x\neq 0 \\ 0 & \text{se } x=0 \end{cases}$$

è definita in $\mathbb{R}$, è discontinua nel punto $x=0$ ed è continua in tutti gli altri punti. Essa ha una primitiva in $\mathbb{R}$, che è

$$G(x)=\begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & \text{se } x\neq 0 \\ 0 & \text{se } x=0. \end{cases}$$

Infatti si verifica che $G'(x)=f(x) \ \forall x\in\mathbb{R}$.

Dunque:

- $f\in C[a,b] \implies \int f(x)dx \neq \emptyset$, e la funzione integrale gli appartiene.
- $\int f(x)dx \neq \emptyset \not\Rightarrow f\in C[a,b]$, un esempio è la funzione $(*)$; la sua funzione integrale è $\int_0^x f(t)dt = G(x)-G(0) = x^2\sin\frac{1}{x} \ \forall x\in\mathbb{R}$, quindi essa è una primitiva di f, benché f sia discontinua.

Perciò il teorema fondamentale del calcolo integrale non è invertibile (la tesi non implica l'ipotesi).

Esercizi

- Sia $f\in C[a,b]$, $f\geq 0$; se $\int_a^b f(x)dx=0$ allora $f\equiv 0$. Levando una qualunque delle ipotesi, la tesi è falsa.

- Calcolare $\int_0^2 2xe^{x^2}dx$
- Calcolare $\int_1^2 \frac{1}{x}\ln x\,dx$, $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x}\ln|x|\,dx$.
- Calcolare
$$\int_0^{\pi/2} [x\cos x + \sin x]\,dx, \quad \int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx$$
$$\int_0^{\pi/2} [x\sin x - \cos x]\,dx, \quad \int_0^{\pi/2} x\sin x\,dx.$$
- Calcolare
$$\int_{-1}^{1} e^x\,dx, \quad \int_{-1}^{1}(xe^x+e^x)\,dx, \quad \int_{-1}^{1} xe^x\,dx.$$
- Calcolare
$$\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x\,dx$$
- Calcolare
$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx, \quad \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx, \quad \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$
- Per $f \in C(\mathbb{R})$, calcolare
$$\frac{d}{dx}\int_x^{2x} f(t)\,dt, \quad \frac{d}{dx}\int_{-x}^{x^2} f(t)\,dt, \quad \frac{d}{dx}\sin\left(\int_{2^x}^{3^x} f(t)\,dt\right).$$
- Osservato che $\frac{d}{dx}\frac{x|x|}{2} = |x|$ $\forall x\in\mathbb{R}$, calcolare $\int_{-1}^{2}\left|x-\frac{1}{2}\right|dx$.