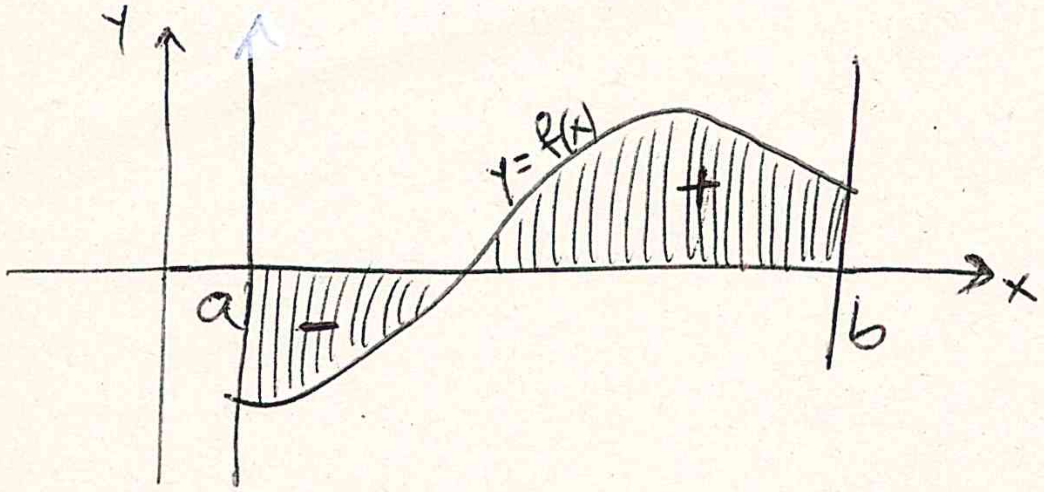
L'INTEGRALE

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Vogliamo determinare l'area "con segno" della regione delimitata dal grafico di f e dal segmento $[a,b]$ dell'asse x.



A questo scopo, bisognerà prima definire cosa si intende per area delle due regioni

$$E^+ = \{(x,y) : x \in [a,b], \ 0 \le y \le f(x)\},$$
$$E^- = \{(x,y) : x \in [a,b], \ f(x) \le y \le 0\}$$

prese col segno positivo la prima e col segno negativo la seconda: infatti noi sappiamo elementarmente misurare solo i rettangoli (base per altezza) e di conseguenza i triangoli.

Utilizzeremo un procedimento di approssimazione.

Definizione Una suddivisione, o partizione, dell'intervallo $[a,b]$ è un insieme finito $\sigma = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b\}$; i punti $x_j \in \sigma$

sono detti <u>nodi</u> della suddivisione σ.

Gli intervalli $I_j = [x_{j-1}, x_j]$ tra due nodi consecutivi saranno le basi dei rettangoli che useremo per le nostre approssimazioni.

Diciamo che, di due suddivisioni σ', σ'' di $[a,b]$, σ'' è <u>più fine</u> di σ' se si ha $\sigma' \subseteq \sigma''$, ossia σ'' si ottiene da σ' inserendo nuovi nodi. In generale due suddivisioni σ_1 e σ_2 possono non essere confrontabili, come nell'esempio che segue:

Però, date σ_1 e σ_2, esiste sempre una suddivisione σ che è più fine di entrambe: ad esempio, $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$.

<u>Esempio</u> La suddivisione <u>equispaziata</u> σ_k di $[a,b]$ è
$$\sigma_k = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b\}, \quad \text{con } x_j = a + \frac{j}{k}(b-a).$$

<u>Definizione</u> Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata e sia σ una suddivisione di $[a,b]$. La <u>somma superiore</u> di f rispetto a σ è il numero
$$S(f,\sigma) = \sum_{j=1}^{k} M_j (x_j - x_{j-1}), \quad \text{ove } M_j = \sup_{I_j} f;$$
la <u>somma inferiore</u> di f rispetto a σ è il numero
$$s(f,\sigma) = \sum_{j=1}^{k} m_j (x_j - x_{j-1}), \quad \text{ove } m_j = \inf_{I_j} f.$$

Questi numeri sono le "aree approssimate" per eccesso e per difetto.

È qui che si usa il fatto che f è limitata: altrimenti qualche somma superiore o inferiore sarebbe infinita.

Ci aspettiamo che, infittendo sempre di più i nodi, le somme superiori e inferiori forniscano approssimazioni sempre più precise dell'area "con segno" che ci interessa. E in effetti:

<u>Proposizione</u> Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata. Date tre suddivisioni $\sigma, \sigma', \sigma''$ di $[a,b]$, con σ più fine sia di σ' che di σ'', si ha

$$s(f,\sigma') \leq s(f,\sigma) \leq S(f,\sigma) \leq S(f,\sigma'').$$

<u>dim</u>. Delle tre disuguaglianze, quella centrale è evidente. Proviamo la prima (la terza si fa in modo analogo).

Il passaggio da σ' a σ si fa aggiungendo un numero finito di nuovi nodi. Se il nodo $\bar{x}$ si inserisce fra x_{j-1} e x_j, allora l'addendo $m_j(x_j - x_{j-1})$ è rimpiazzato da

$$\inf_{[x_{j-1},\bar{x}]} f \cdot (\bar{x} - x_{j-1}) + \inf_{[\bar{x},x_j]} f \cdot (x_j - \bar{x}) ;$$

ma

$$m_j \leq \inf_{[x_{j-1},\bar{x}]} f , \quad m_j \leq \inf_{[\bar{x},x_j]} f,$$

e quindi

$$m_j(x_j - x_{j-1}) = m_j(x_j - \bar{x}) + m_j(\bar{x} - x_{j-1}) \leq \inf_{[\bar{x},x_j]} f \cdot (x_j - \bar{x}) + \inf_{[x_{j-1},\bar{x}]} f \cdot (\bar{x} - x_{j-1}).$$

Ne segue $s(f,\sigma') \leq s(f,\sigma)$. $\square$

Ora definiamo le "approssimazioni ottimali" per difetto e per eccesso.

Definizione. Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata. L'integrale superiore di f è il numero

$$I^+(f) = \inf_{\sigma} S(f,\sigma);$$

l'integrale inferiore di f è il numero

$$I^-(f) = \sup_{\sigma} s(f,\sigma).$$

Osserviamo che, posto $\sigma_0 = \{a,b\}$, si ha

$$s(f,\sigma_0) = \inf_{[a,b]} f \cdot (b-a) \le I^-(f) \le I^+(f) \le \sup_{[a,b]} f \cdot (b-a) = S(f,\sigma_0).$$

Sarebbe bello che per ogni f limitata valesse $I^+(f) = I^-(f)$.
Ma così non è!

Esempio. Sia $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [a,b] \setminus \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{se } x \in [a,b] \cap \mathbb{Q}. \end{cases}$

Allora per ogni $\sigma = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b\}$ si ha (essendo $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ densi in $\mathbb{R}$) $m_j = 0$, $M_j = 1$ per $j = 0, 1, \dots, k$, da cui

$$s(f,\sigma) = 0, \quad S(f,\sigma) = b-a \quad \forall \sigma.$$

Ne segue

$$I^-(f) = 0, \quad I^+(f) = b-a.$$

Dunque la nostra procedura di approssimazione non funziona per tutte le funzioni limitate, ma solo per quelle "integrabili", cioè:

<u>Definizione</u>. Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ limitata. Diciamo che f è <u>integrabile</u> (secondo Riemann) in $[a,b]$, e scriveremo $f\in R[a,b]$, se risulta $I^-(f)=I^+(f)$. In tal caso questo valore si indica con $\int_a^b f(x)\,dx$. Dunque

$$\int_a^b f(x)\,dx = I^-(f)=I^+(f).$$

Proprietà dell'integrale

Anzitutto, un semplice criterio di integrabilità.

<u>Proposizione</u> Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ limitata: allora f è integrabile in $[a,b]$ se e solo se per ogni $\varepsilon>0$ esiste una suddivisione σ di $[a,b]$ tale che

$$S(f,\sigma)-s(f,\sigma)<\varepsilon.$$

<u>dim</u>. $(\Longrightarrow)$ Sia $\varepsilon>0$. Per definizione di integrale superiore e inferiore, $\exists\,\sigma',\sigma''$, suddivisioni di $[a,b]$, tali che

$$\int_a^b f(x)\,dx-\frac{\varepsilon}{2}<s(f,\sigma')\le I^-(f)=\int_a^b f(x)\,dx=I^+(f)\le S(f,\sigma'')<\int_a^b f(x)\,dx+\frac{\varepsilon}{2};$$

scelta una suddivisione σ più fine di σ' e σ'', si deduce

$$\int_a^b f(x)\,dx-\frac{\varepsilon}{2}<s(f,\sigma)\le\int_a^b f(x)\,dx\le S(f,\sigma)<\int_a^b f(x)\,dx+\frac{\varepsilon}{2},$$

da cui $S(f,\sigma)-s(f,\sigma)<\varepsilon$.

($\Leftarrow$) Dato $\varepsilon>0$, e scelta la suddivisione σ in modo che

$$S(f,\sigma)-s(f,\sigma)<\varepsilon,$$

si ha a maggior ragione

$$0\le I^+(f)-I^-(f)\le S(f,\sigma)-s(f,\sigma)<\varepsilon,$$

da cui $I^+(f)=I^-(f)$ per l'arbitrarietà di ε. $\square$

<u>Osservazione</u> Il criterio ci dice quando una funzione limitata f è integrabile, ma non ci dice quanto vale il suo integrale! Per questa informazione ci vorrà altro tempo.

<u>Proposizione</u> L'integrale è <u>lineare</u>: cioè, se $f,g\in R(a,b)$ e se $\lambda\in\mathbb{R}$, allora $f+g$, $\lambda f\in R(a,b)$ e

$$\int_a^b [f+g](x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx,\qquad \int_a^b [\lambda f](x)\,dx=\lambda\int_a^b f(x)\,dx.$$

<u>dim.</u> Per ogni $\varepsilon>0$ esistono suddivisioni σ', σ'' tali che

$$S(f,\sigma')-s(f,\sigma')<\varepsilon,\qquad S(g,\sigma'')-s(g,\sigma'')<\varepsilon.$$

Se σ è una suddivisione più fine di σ' e σ'', allora dalle relazioni

$$\sup(f+g)\le\sup f+\sup g,\qquad \inf(f+g)\ge\inf f+\inf g$$

segue che

$$S(f+g,\sigma)-s(f+g,\sigma)\le S(f,\sigma)+S(g,\sigma)-s(f,\sigma)-s(g,\sigma)\le$$
$$\le S(f,\sigma')-s(f,\sigma')+S(g,\sigma'')-s(g,\sigma'')<2\varepsilon,$$

mentre

$$S(\lambda f,\sigma)-s(\lambda f,\sigma)=|\lambda|\,[S(f,\sigma)-s(f,\sigma)]<|\lambda|\varepsilon,$$

il che è ovvio quando $\lambda \geq 0$, e quando $\lambda < 0$ segue dal fatto che

$$\sup \lambda f = -|\lambda| \inf f, \quad \inf \lambda f = -|\lambda| \sup f .$$

Inoltre

$$\int_a^b [f+g](x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx \begin{cases} \leq S(f+g,\sigma) - s(f,\sigma) - s(g,\sigma) \leq S(f,\sigma) + S(g,\sigma) - s(f,\sigma) - s(g,\sigma) < 2\varepsilon, \\ \geq s(f+g,\sigma) - S(f,\sigma) - S(g,\sigma) \geq s(f,\sigma) + s(g,\sigma) - S(f,\sigma) - S(g,\sigma) > -2\varepsilon, \end{cases}$$

e siccome ε è arbitrario, $\int_a^b [f+g](x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$.

Similmente, essendo

$$S(\lambda f,\sigma) = \begin{cases} \lambda S(f,\sigma) & \text{se } \lambda \geq 0 \\ \lambda s(f,\sigma) & \text{se } \lambda < 0 \end{cases}, \qquad s(\lambda f,\sigma) = \begin{cases} \lambda s(f,\sigma) & \text{se } \lambda \geq 0 \\ \lambda S(f,\sigma) & \text{se } \lambda < 0, \end{cases}$$

si ottiene, per $\lambda \geq 0$,

$$\int_a^b [\lambda f](x)\,dx - \lambda \int_a^b f(x)\,dx \begin{cases} \leq S(\lambda f,\sigma) - \lambda s(f,\sigma) = \lambda [S(f,\sigma) - s(f,\sigma)] \\ \geq s(\lambda f,\sigma) - \lambda S(f,\sigma) = -\lambda [S(f,\sigma) - s(f,\sigma)], \end{cases}$$

da cui

$$\left| \int_a^b [\lambda f](x)\,dx - \lambda \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \lambda \varepsilon \quad \text{se } \lambda \geq 0;$$

per $\lambda < 0$ invece

$$\int_a^b [\lambda f](x)\,dx - \lambda \int_a^b f(x)\,dx \begin{cases} \leq S(\lambda f,\sigma) - \lambda S(f,\sigma) = \lambda [s(f,\sigma) - S(f,\sigma)] \\ \geq s(\lambda f,\sigma) - \lambda s(f,\sigma) = \lambda [S(f,\sigma) - s(f,\sigma)], \end{cases}$$

da cui
$$\left|\int_a^b [\lambda f](x)\,dx - \lambda\int_a^b f(x)\,dx\right| \le |\lambda|\varepsilon \qquad \text{se } \lambda<0.$$
In definitiva, in tutti i casi ($\lambda\ge 0$ o $\lambda<0$) si ha
$$\left|\int_a^b [\lambda f](x)\,dx - \lambda\int_a^b f(x)\,dx\right| \le |\lambda|\varepsilon \quad \forall\varepsilon>0,$$
cioè
$$\int_a^b [\lambda f](x)\,dx = \lambda\int_a^b f(x)\,dx. \ \square$$

<u>Proposizione</u> Se $f, g\in R(a,b)$, allora fg, $\max\{f,g\}$, $\min\{f,g\}$ sono in $R(a,b)$; se inoltre $\inf_{[a,b]} g>0$ oppure $\sup_{[a,b]} g<0$, allora $\frac{f}{g}\in R(a,b)$.

<u>dim</u>. omessa. $\square$

<u>Proposizione</u> Se $f,g\in R(a,b)$ e $f\le g$ in $[a,b]$, allora
$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx.$$

<u>dim</u> Per ogni suddivisione σ, si ha $s(f,\sigma)\le s(g,\sigma)$. Passando all'estremo superiore si ha la tesi. $\square$

<u>Corollario</u> Se $f\in R(a,b)$ allora $|f|\in R(a,b)$ e
$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

<u>dim</u>. $|f(x)| = \max\{f(x),0\} - \min\{f(x),0\}\in R(a,b)$; poi, $-|f|\le f\le |f|$, da cui la tesi per la proposizione precedente. $\square$

<u>Proposizione</u> Se $f \in R(a,b)$ e $a < c < b$, allora $f \in R(a,c) \cap R(c,b)$ e

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

<u>dim.</u> Ovvia, pensando al significato geometrico. □

<u>Definizione</u>. Sia $f \in R(a,b)$. Per ogni $c, d \in [a,b]$ con $c < d$, poniamo:

$$\int_c^c f(x)\,dx = 0, \qquad \int_d^c f(x)\,dx = -\int_c^d f(x)\,dx.$$

<u>Corollario</u>. Se $f \in R(a,b)$ allora per ogni $u, v, w \in [a,b]$

$$\int_u^w f(x)\,dx = \int_u^v f(x)\,dx + \int_v^w f(x)\,dx.$$

<u>dim.</u> Noiosa verifica che usa la definizione precedente e analizza tutti i possibili casi, vale a dire: $u<v<w$; $v<w<u$; $w<u<v$; $u<w<v$; $v<u<w$; $w<v<u$; e poi i casi $u=v$, $v=w$, $u=w$. □

<u>Osservazione</u> Se $f \in R(a,b)$, allora per ogni $u, v \in [a,b]$ si ha

$$\left|\int_u^v f(x)\,dx\right| \le \left|\int_u^v |f(x)|\,dx\right|. \ \square$$