<u>Teorema di de l'Hôpital</u> Siano f, g due infinitesimi, oppure due infiniti, per $x \to x_0$, ove $x_0 \in \mathbb{R}$ oppure $x_0 = \pm\infty$. Supponiamo che
(i) $g'(x) \neq 0$ in un intorno di x_0, salvo al più x_0;
(ii) esista, finito o infinito, il numero $\lambda := \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.
Allora
$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda.$$

<u>Osservazione</u> Il teorema vale anche nel caso di $\lim_{x \to x_0^+}$ o $\lim_{x \to x_0^-}$.

<u>dim.</u> (solo nel caso di infinitesimi per $x \to x_0$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$).

Sia $\varepsilon > 0$. Esiste $\delta > 0$ tale che
$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - \lambda \right| < \varepsilon \qquad \text{per } 0 < |x - x_0| < \delta.$$
Sia x un punto tale che $0 < |x - x_0| < \delta$. Se estendiamo, o ridefiniamo, f e g in x_0 ponendo $f(x_0) = g(x_0) = 0$, allora f e g sono continue in tutto l'intervallo I di estremi x e x_0, e derivabili all'interno di I.

Per il teorema di Cauchy (si noti che $g(x) \neq 0$, altrimenti g' si annullerebbe in un punto interno a I), esiste ξ interno a I tale che
$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - \lambda \right| = \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} - \lambda \right| = \left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - \lambda \right| < \varepsilon,$$
visto che $0 < |\xi - x_0| < |x - x_0| < \delta$. $\square$

Esempi (1) Siano $f(x)=\ln x$, $g(x)=x$, $x_0=0$. Si ha

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{x}=-\infty,\quad \lim_{x\to0^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty$$

(infatti manca l'ipotesi che f sia infinitesima per $x\to0^+$)

(2) Siano $f(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=\cos\frac{1}{x}-1$, $x_0=+\infty$. Allora f e g sono infinitesimi per $x\to+\infty$, e

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to0^+}\frac{t}{\cos t-1}=-\infty,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ non esiste,}$$

perché $g'(x)=\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x^2}$ si annulla in ogni semiretta $[a,+\infty[$.
(infatti manca appunto l'ipotesi (i)).

(3) Siano $f(x)=x+\sin x$, $g(x)=x$, $x\to+\infty$. Allora $f(x)\to+\infty$ e $g(x)\to+\infty$; inoltre

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to+\infty}(1+\cos x) \text{ non esiste}$$

(infatti manca proprio l'ipotesi (iii)).

(4) Passare da $\frac{f(x)}{g(x)}$ a $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ porta spesso a una nuova forma indeterminata. Se così è, si può provare a considerare $\frac{f''(x)}{g''(x)}$, e così via. Se, dopo n passi, valgono ancora le ipotesi e si trova che $\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}=\lambda$, allora andando a ritroso si ricava

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)}{g^{(n-1)}(x)}=\lambda,\ \dots,\ \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lambda,\quad \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lambda.$$

Ad esempio,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos 2x - \cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin 2x + \sin x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-4\cos 2x + \cos x}{2} = -\frac{3}{2}.$$

Esercizio: Calcolare, se esiste,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x - x}{x - \operatorname{arctg} x}.$$

Risoluzione. Col teorema di de l'Hôpital andiamo a calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1}{1 - \frac{1}{1+x^2}},$$

che è ancora della forma $\frac{0}{0}$. Però, manipolando la frazione si trova

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{1+x^2}{x^2} = \frac{x^2}{1+\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{1+x^2}{x^2} =$$

$$= \frac{1+x^2}{(1+\sqrt{1-x^2})\sqrt{1-x^2}} \longrightarrow \frac{1}{2}.$$

Ne segue che il limite proposto vale $\frac{1}{2}$.

Avremmo anche potuto usare di nuovo il teorema di de L'Hôpital, calcolando

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}}{\frac{2x}{(1+x^2)^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+x^2)^2}{2(1-x^2)^{3/2}} = \frac{1}{2}.$$

Esercizi

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{x}$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^k}{x} \qquad (k\in\mathbb{N}^+)$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+\sqrt{x})}{\ln x}$

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\sqrt{1+x^2}}{1-\cos x}$

- $\lim\limits_{x\to 0} \left[\dfrac{x+1}{x} - \dfrac{1}{\ln(x+1)}\right]$

- $\lim\limits_{x\to 0^+} \left[\dfrac{1}{x} + \ln x\right]$

- $\lim\limits_{x\to 0^+} \left[\dfrac{1}{\arcsin x} - \dfrac{1}{x}\right]$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x}\left[\dfrac{1}{\arcsin x} - \dfrac{1}{x}\right]$

- $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$, $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$.

- $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$

- $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\cos\sqrt{x} - \cos x}{2x}$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[x\cos\dfrac{1}{\sqrt{x}} - x^2\sin\dfrac{1}{x}\right]$

- $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin x}$, $\lim\limits_{x\to 0^+} (\sin x)^x$.