Teorema (del differenziale totale) Sia $f: A \to \mathbb{R}$, con A aperto di $\mathbb{R}^N$; sia $\underline{x}_0 \in A$. Se

(i) esiste $R>0$ tale che $B(\underline{x}_0, R) \subseteq A$ ed $\exists\, D_i f(\underline{x})$ in $B(\underline{x}_0, R)$, $1 \le i \le N$,

(ii) le $D_i f$ sono continue in $\underline{x}_0$, $1 \le i \le N$,

allora f è differenziabile in $\underline{x}_0$.

dim (nel caso $N=2$). Consideriamo

$$f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0) - \langle \nabla f(\underline{x}_0), \underline{x}-\underline{x}_0 \rangle_2 = f(x,y) - f(x_0,y_0) - f_x(x_0,y_0)(x-x_0) - f_y(x_0,y_0)(y-y_0) =$$

$$= [f(x,y) - f(x_0,y) - f_x(x_0,y_0)(x-x_0)] + [f(x_0,y) - f(x_0,y_0) - f_y(x_0,y_0)(y-y_0)] =$$

(per il teorema di Lagrange, applicato a $x \mapsto f(x,y)$ nell'intervallo di estremi x, x_0)

$$= [f_x(\xi_y, y) - f_x(x_0,y_0)](x-x_0) + \left[\frac{f(x_0,y) - f(x_0,y_0)}{y-y_0} - f_y(x_0,y_0)\right](y-y_0).$$

Sia $\varepsilon > 0$. Esiste $\delta > 0$ tale che

$$|f_x(u,v) - f_x(x_0,y_0)| < \varepsilon \quad \text{se} \quad \sqrt{(u-x_0)^2 + (v-y_0)^2} < \delta,$$

$$\left|\frac{f(x_0,y) - f(x_0,y_0)}{y-y_0} - f_y(x_0,y_0)\right| < \varepsilon \quad \text{se} \quad 0 < |y-y_0| < \delta.$$

Quindi, essendo $|\xi_y - x_0| \le |x-x_0|$, troviamo per $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$:

$$|f(x,y) - f(x_0,y_0) - f_x(x_0,y_0)(x-x_0) - f_y(x_0,y_0)(y-y_0)| \le$$

$$\le \varepsilon |x-x_0| + \varepsilon |y-y_0| \le 2\varepsilon \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$$

e ciò prova che f è differenziabile in (x_0,y_0), visto che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - f_x(x_0,y_0)(x-x_0) - f_y(x_0,y_0)(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0.$$

Si noti che abbiamo usato la <u>continuità</u> di f_x, ma solo l'<u>esistenza</u> di $f_y(x_0,y_0)$. □

Derivate direzionali

Definizione: sia $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^N$ aperto, sia $\underline{x}_0 \in A$. Fissato $\underline{v} \in \mathbb{R}^N \setminus \{\underline{0}\}$, la derivata direzionale di f secondo la direzione $\underline{v}$ è il

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\underline{x}_0 + h\underline{v}) - f(\underline{x}_0)}{h},$$

se esiste finito. Essa si denota con uno dei simboli

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x}_0), \quad D_{\underline{v}} f(\underline{x}_0), \quad f_{\underline{v}}(\underline{x}_0).$$

Naturalmente, se $\underline{v} = \underline{e}_i$ si ritrova la derivata parziale i-sima.

Osservazione Se f è differenziabile in $\underline{x}_0$, scegliendo $\underline{h} = t\underline{v}$ nella definizione di differenziabilità si trova

$$f(\underline{x}_0 + t\underline{v}) - f(\underline{x}_0) = t\langle \underline{a}, \underline{v} \rangle_N + |t|\, \omega(t\underline{v})$$

e dunque, dividendo per t e facendo il limite per $t \to 0$,

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x}_0) = \langle \underline{a}, \underline{v} \rangle_N = \langle \nabla f(\underline{x}_0), \underline{v} \rangle_N .$$

Se, in particolare, $|\underline{v}|_N = 1$ (caso più significativo), si vede che $\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x}_0)$ [che è la pendenza del grafico di f in $(\underline{x}_0, f(\underline{x}_0))$ nella direzione di $\underline{v}$] è massima quando $\underline{v} = \frac{\nabla f(\underline{x}_0)}{|\nabla f(\underline{x}_0)|_N}$ e minima quando $\underline{v} = -\frac{\nabla f(\underline{x}_0)}{|\nabla f(\underline{x}_0)|_N}$.

Esempio: $f(x,y) = x^2 y e^{x-y}$, $(x_0,y_0) = (1,2)$, $\underline{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Si ha:

$$\nabla f(x,y) = \left((2xy + x^2 y) e^{x-y}, (x^2 - x^2 y) e^{x-y} \right),$$

$$\nabla f(1,2) = \left(\frac{6}{e}, -\frac{1}{e} \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(1,2) = \langle \nabla f(1,2), \underline{v} \rangle_2 = \frac{3\sqrt{2}}{e} + \frac{1}{\sqrt{2}e} = \frac{7}{e\sqrt{2}}.$$

Osservazione La funzione dell'esempio di pag. 207 non è continua in $(0,0)$ (quindi non è differenziabile), però ha in $(0,0)$ tutte le derivate direzionali nulle: infatti ogni retta per $(0,0)$,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

per valori sufficientemente piccoli di t giace al di fuori della regione $\{0 < y < x^2\}$, quindi $f(tv_1, tv_2) = 0$ e perciò il rapporto incrementale nella direzione $\underline{v}$ è definitivamente nullo per $t \to 0$.

Esercizi

- Sia $f: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, definita da

$$f(\underline{x}) = \langle \underline{v}, \underline{x} \rangle_N \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^N,$$

ove $\underline{v}$ è un fissato vettore di $\mathbb{R}^N$. Si verifichi che f è differenziabile e

$$df(\underline{x}_0)(\underline{h}) = \langle \underline{v}, \underline{h} \rangle_N \quad \forall \underline{h} \in \mathbb{R}^N, \ \forall \underline{x}_0 \in \mathbb{R}^N.$$

- La funzione $f(x,y) = \sin x \cos y$ è differenziabile? Se sì, scrivere l'equazione del piano tangente in $\left(\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}, \frac{3}{4}\right)$ e calcolare, per $\underline{v} = (-1,2)$, la derivata direzionale $\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}\left(\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}\right)$.

- La funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } (x,y)=(0,0) \\ \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \end{cases}$$

è differenziabile in $(0,0)$?

- Si provi che $f(\underline{x}) = |\underline{x}|_N$ è differenziabile in $\mathbb{R}^N \setminus \{\underline{0}\}$, con

$$df(\underline{x}_0)(\underline{h}) = \left\langle \frac{\underline{x}}{|\underline{x}|_N}, \underline{h} \right\rangle_N \quad \forall \underline{h}\in\mathbb{R}^N, \ \forall \underline{x}_0 \in \mathbb{R}^N \setminus \{\underline{0}\}.$$

- Se $f:[0,\infty[\,\to \mathbb{R}$ è derivabile, e se $u(\underline{x}) = f(|\underline{x}|_N^2)$, allora $\underline{u}$ è differenziabile e

$$\nabla \underline{u}(\underline{x}) = f'(|\underline{x}|_N^2)\cdot 2\underline{x} \quad \forall \underline{x}\in\mathbb{R}^N.$$

- Se $f: A \to \mathbb{R}$ è differenziabile e se il segmento di estremi $\underline{x}$ e $\underline{y}$ è interamente contenuto in A, allora esiste un vettore $\underline{v}$ in tale segmento, tale che

$$f(\underline{y}) - f(\underline{x}) = \langle \nabla f(\underline{v}), \underline{y}-\underline{x} \rangle_N .$$

Dunque, se A è connesso e $\nabla f(\underline{x}_0) = \underline{0}$ $\forall \underline{x}_0 \in A$, allora f è costante in A.

- Sia $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $f(a,b,c,d) = \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad-bc$. Si provi che f è differenziabile in $\mathbb{R}^4$ e si scriva l'applicazione

$$df(a_0,b_0,c_0,d_0).$$

- Posto $f(x,y) = \dfrac{|x|^{\alpha}|y|^{\beta}}{x^2+y^2}$ se $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0)=0$, per quali $\alpha, \beta > 0$ la f è continua? Per quali $\alpha, \beta > 0$ la f è differenziabile?

- $f: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ si dice omogenea di grado $\alpha \in \mathbb{R}$ se

$$f(t\underline{x}) = t^{\alpha} f(\underline{x}) \quad \forall t > 0, \ \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^N.$$

Provare che se f è omogenea di grado α e differenziabile, allora

(i) $D_1 f, \dots, D_N f$ sono omogenee di grado $\alpha - 1$,

(ii) vale l'identità di Eulero:

$$\langle \nabla f(\underline{x}), \underline{x} \rangle_N = \alpha f(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^N.$$

- Sia A una matrice $N \times N$ reale simmetrica. Allora:

(i) $\underline{x} \to \langle A\underline{x}, \underline{x} \rangle_N$ è omogenea di grado 2 in $\mathbb{R}^N$,

(ii) $\nabla \left(\langle A\underline{x}, \underline{x} \rangle_N \right) = 2A\underline{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$.

- Verificare che $u(x,y,z) = x^2 y + y^2 z + z^2 x$ verifica in $\mathbb{R}^3$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial u}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial u}{\partial z}(x,y,z) = (x+y+z)^2.$$

- Verificare che $u(x,y) = \ln(e^x + e^y)$ verifica in $\mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 1.$$

- Verificare che $u(x,y) = x^y + y^x$ verifica in $\{(x,y) : x > 0, y > 0\}$

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = (x + y + \ln u) u.$$

- Scrivere le derivate parziali, dove esistono, di:

$$\frac{\cos x^2}{y}, \quad \frac{x+y}{x-y}, \quad (x^2+y^2)\sin xy, \quad \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \operatorname{tg}\frac{x^2}{y},$$

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x}, \quad x^y, \quad |xy|^2, \quad \log(1+x^2+y^2), \quad |x|\,|y|.$$

Per ognuna di queste, scrivere l'equazione del piano tangente (se esiste) in un punto a piacere, e la derivata direzionale in un punto a piacere, in una direzione a piacere.

- Sia $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenziabile con $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ continue. Se si ha
$$f(x,y)=0 \quad \text{su} \quad \Delta = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=y\},$$
allora:

(i) $\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial y}$ in Δ,

(ii) $\frac{f(x,y)}{x-y} := g(x,y) : \mathbb{R}^2 \setminus \Delta \to \mathbb{R}$ ha un'estensione continua a tutto $\mathbb{R}^2$.