<u>Criterio del confronto asintotico</u> Siano $\sum a_n$, $\sum b_n$ due serie a termini definitivamente positivi. Supponiamo che

$$\exists\, L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \ (\geq 0).$$

Allora:

(i) $L \in]0,\infty[\Rightarrow$ le 2 serie hanno lo stesso comportamento.

(ii) $L = 0$ e $\sum b_n$ convergente $\Rightarrow \sum a_n$ convergente.

(iii) $L = +\infty$ e $\sum a_n$ convergente $\Rightarrow \sum b_n$ convergente.

<u>Dim.</u> Sia $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $a_n > 0$ e $b_n > 0$ per ogni $n \geq \nu$.

i) Sia $\varepsilon \in]0, L[$. Esiste $n_0 \geq \nu$ tale che

$$0 < L-\varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < L+\varepsilon \quad \forall n \geq n_0.$$

Dunque

$$b_n(L-\varepsilon) < a_n < b_n(L+\varepsilon) \quad \forall n \geq n_0$$

e per confronto le 2 serie hanno lo stesso comportamento.

ii) Sia $\varepsilon > 0$. Come sopra, troviamo che

$$0 < \frac{a_n}{b_n} < \varepsilon \quad \text{definitivamente},$$

$$0 < a_n < \varepsilon b_n \quad \text{definitivamente},$$

e per confronto si ha la tesi.

iii) Sia $M > 0$. Come sopra $\frac{a_n}{b_n} > M$ definitivamente, $a_n > M b_n$ definitivamente e quindi la tesi per confronto. $\square$

<u>Esercizi</u> Analizzare il comportamento delle seguenti serie:

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$, • $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n!)^{1/n}}$,

- $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n!}$, • $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\sqrt{n}}$,

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$, • $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$,

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^n e^{-\sqrt{n}}$, • $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{\sqrt{n}}}{(\ln n)^n}$,

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n!}\; n^{-\sqrt{n}}$, • $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{\sqrt{n}}\left(\sqrt{n}\right)^{-n}$,

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 10^{n!-n^n}$, • $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^{n^2}}$;

- $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$: come per la serie armonica, scriviamo s_n con $n=2^m$:

$$s_{2^m} = \frac{1}{2\ln 2} + \left(\frac{1}{3\ln 3} + \frac{1}{4\ln 4}\right) + \left(\frac{1}{5\ln 5} + \frac{1}{6\ln 6} + \frac{1}{7\ln 7} + \frac{1}{8\ln 8}\right) +$$

$$+ \cdots + \left(\frac{1}{(2^{m-1}+1)\ln(2^{m-1}+1)} + \cdots + \frac{1}{2^m \ln 2^m}\right) >$$

$$> \frac{1}{2\ln 2} + \frac{2}{4\ln 4} + \frac{4}{8\ln 8} + \cdots + \frac{2^{m-1}}{2^m \ln 2^m} =$$

$$= \frac{1}{2\ln 2}\left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m}\right],$$

e quindi

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{m\to+\infty} s_{2^m} \geq \lim_{m\to+\infty} \frac{1}{2\ln 2}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k} = +\infty.$$